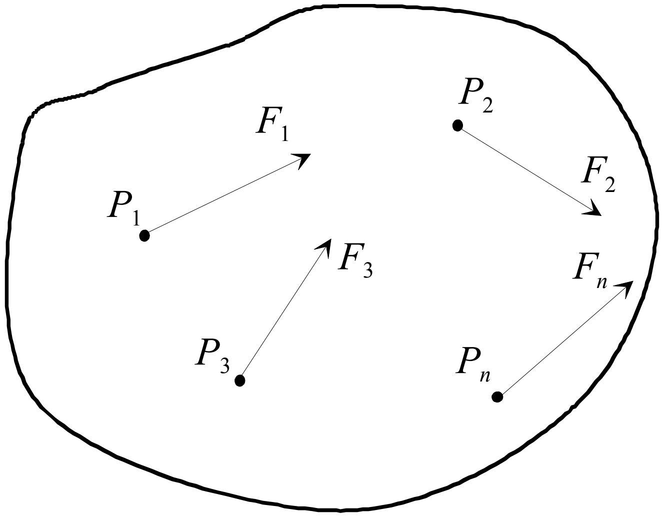
Robotica industriale

Richiami di statica del corpo rigido

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Sistemi di forze



Consideriamo un sistema di forze agenti su un corpo rigido.
Ciascuna forza è rappresentabile da un vettore applicato in un punto.

Come si riduce questo sistema di forze? C'è un modo per ridurlo ad un sistema di forze più semplice?

Siamo interessati in particolare alla **statica del corpo** ovvero alle condizioni in base alle quali il sistema di forze, applicato al corpo rigido, lo lascia nella stessa condizione di quiete che aveva prima dell'applicazione delle forze (si dice in questo caso che il corpo è in *equilibrio*).

Postulati fondamentali

1. Non si altera l'equilibrio di un corpo sostituendo ad un insieme di forze applicate in un punto il **risultante** (cioè la forza rappresentata dal vettore somma vettoriale delle singole forze) applicato allo stesso punto, oppure se si sostituisce ad una forza applicata in un punto altre forze aventi per somma vettoriale la prima ed applicate nel punto.
2. Non si altera l'equilibrio di un corpo rigido se si trasporta il punto di applicazione di una forza lungo la sua **retta di applicazione** (postulato valido solo per i corpi rigidi).

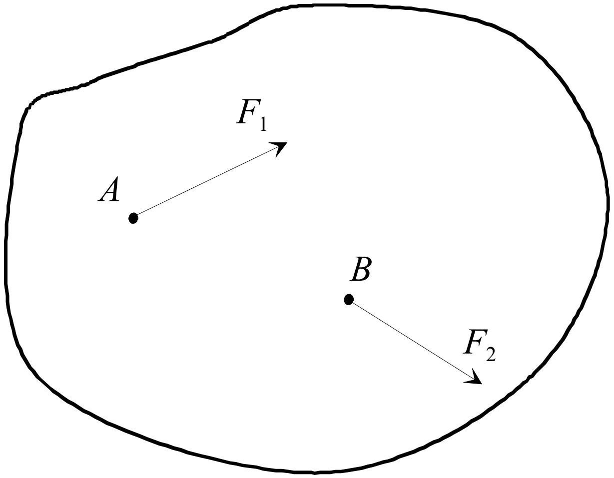
Due sistemi di forze applicate al corpo rigido ottenuti passando dall'uno all'altro eseguendo, anche in sequenza, le suddette operazioni, si dicono **equipollenti**: il passaggio da un sistema all'altro non altera lo stato di equilibrio del corpo.

Riduzione dei sistemi di forze

Con semplici ragionamenti si conclude che:
- un sistema di forze le cui rette di applicazione concorrono in un punto
- un sistema di forze parallele a risultante non nullo
- un sistema di forze piane a risultante non nullo

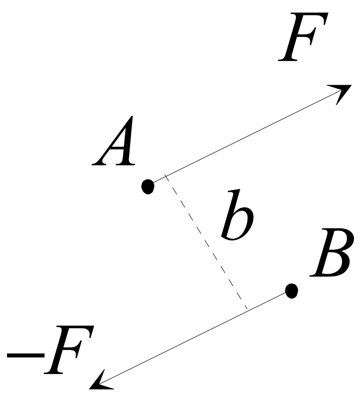
sono tutti equipollenti ad un'unica forza.

Con un ragionamento un po' più complesso, si dimostra che un sistema generale di forze può sempre ridursi a **due forze**, una delle quali applicate in un punto prefissato.



Coppia

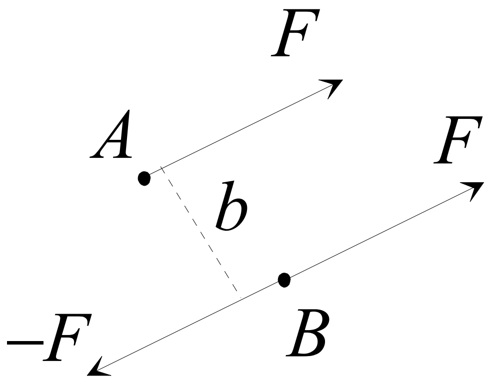
Consideriamo ora un sistema di forze a risultante nullo. Esso è equipollente a due forze opposte $\boldsymbol{F}$ e $-\boldsymbol{F}$, applicate in due punti A e B. Se le due forze hanno la stessa retta di applicazione, possono sopprimersi, altrimenti, se le rette di applicazione sono parallele, costituiscono una **coppia**.



Sono facilmente definibili il *piano* della coppia (piano cui appartengono le due rette d'applicazione), il *braccio b* (distanza tra le due rette) ed il *verso*.

Riduzione ad una forza e una coppia

Aggiungendo una coppia, è possibile spostare una forza da un punto di applicazione ad un altro.



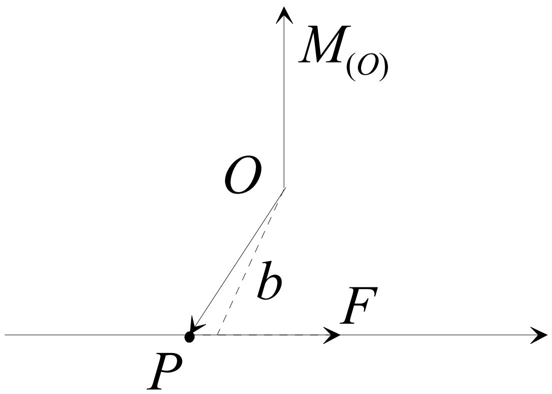
Si abbia la forza $\boldsymbol{F}$ applicata nel punto A. Aggiungiamo le due forze opposte $\boldsymbol{F}$ e $-\boldsymbol{F}$, applicate nel punto B. Si ottiene la forza $\boldsymbol{F}$ applicata nel punto B, e la coppia di forze $\boldsymbol{F}$ e $-\boldsymbol{F}$, applicate in A e B.

Per quanto detto finora, si conclude che un generico sistema di forze agenti su un corpo rigido, è equipollente ad **una forza**, applicata in un punto prefissato, e ad **una coppia**.

Momento di una forza rispetto ad un polo

Sia $\boldsymbol{F}$ una forza applicata in un punto P. Il momento della forza rispetto al polo O è definito dal prodotto vettoriale:

$$\boldsymbol{M}_{(O)} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{F}$$



Il modulo del vettore momento è dato dal prodotto del modulo di $\boldsymbol{F}$ per la distanza b del polo dalla retta di applicazione della forza.

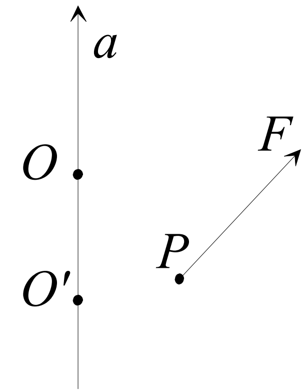
Di fatto il momento non dipende dalla scelta di P sulla retta di applicazione della forza $\boldsymbol{F}$.

Se invece del polo O si considera il polo O', si ottiene:

$$\boldsymbol{M}_{(O')} = \boldsymbol{M}_{(O)} + (\boldsymbol{O} - \boldsymbol{O}') \times \boldsymbol{F}$$

Momento di una forza rispetto ad un asse

Sia $\boldsymbol{F}$ una forza applicata in un punto P e consideriamo un asse caratterizzato dal versore $\boldsymbol{a}$. Siano O e O' due punti sull'asse. Valutiamo la componente sull'asse del vettore momento, rispetto ai due poli:



$$\boldsymbol{M}_{(O')} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}_{(O)} \cdot \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{O} - \boldsymbol{O}') \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}$$

Poiché O–O' e $\boldsymbol{a}$ sono paralleli, risulta:

$$\boldsymbol{M}_{(O')} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}_{(O)} \cdot \boldsymbol{a}$$

Pertanto la **componente secondo un asse** del momento di una forza rispetto ad un polo costituito da un punto dell'asse è indipendente dalla posizione del punto stesso sull'asse.
Questo giustifica il nome di **momento della forza rispetto all'asse** dato allo *scalare*:

$$M_a = \boldsymbol{M}_{(O)} \cdot \boldsymbol{a}$$

Momento di un sistema di forze

Consideriamo ora un sistema di forze $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, … $\boldsymbol{F}_n$, applicate rispettivamente nei punti P_1, P_2, … P_n. Dato un polo O, il momento del sistema di forze rispetto al polo è dato da:

$$\boldsymbol{M}_{(O)} = \boldsymbol{M}_{1(O)} + \boldsymbol{M}_{2(O)} + \cdots + \boldsymbol{M}_{n(O)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{O}\right) \times \boldsymbol{F}_i$$

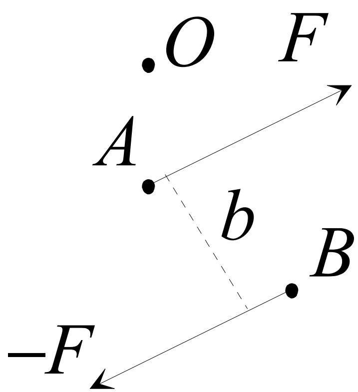
Se in particolare tutte le forze sono applicate nel medesimo punto P:

$$\boldsymbol{M}_{(O)} = \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}\right) \times \boldsymbol{R}$$

essendo $\boldsymbol{R}$ il risultante delle forze (teorema di Varignon).
Il momento del sistema di forze è quindi uguale al momento del risultante.

Momento di una coppia

Se il sistema di forze è costituito da una **coppia** si ha:



$$\boldsymbol{M}_{(O)} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{O})\times\boldsymbol{F} + (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{O})\times(-\boldsymbol{F})$$
$$= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{F}$$

Il momento della coppia è quindi indipendente dal polo.

Potremo allora rappresentare una **coppia** con il suo **vettore momento** che avrà:

- direzione ortogonale al piano della coppia
- modulo pari al prodotto *Fb*, essendo *b* il braccio della coppia
- verso congruente con il verso della coppia

In particolare quando si parla di coppia τ agente su un elemento in rotazione (per esempio un giunto) su cui sia stato fissato un asse, si intende lo scalare ottenuto proiettando il momento della coppia sull'asse.

Massima riduzione di un sistema di forze

Teorema fondamentale: CNS perché due sistemi di forze applicate ad un corpo rigido siano equipollenti è che abbiano lo stesso risultante e lo stesso momento rispetto ad un polo.

Sappiamo che nel caso più generale possiamo ridurre un sistema qualsiasi di forze ad una forza applicata in un punto (il risultante) e ad una coppia. Ne consegue che potremo sempre rappresentare un sistema di forze con due vettori:

- Un **vettore forza** applicata in un punto *O* (di fatto il risultante)
- Un **vettore momento** (di fatto il momento della coppia, ovvero il momento del sistema originario di forze rispetto al polo *O*)

Condizioni di equilibrio

Corpo rigido **libero**

CNS perché un corpo rigido libero sia in equilibrio è che sia nullo il risultante delle forze esterne e nullo il momento del sistema costituito da tali forze, rispetto a qualunque polo:

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{M} = 0$$

Corpo rigido **vincolato**

CNS perché un corpo rigido vincolato sia in equilibrio è che sia nullo il risultante delle forze esterne (sia quelle attive che quelle di reazione vincolare) e nullo il momento del sistema costituito da tali forze, rispetto a qualunque polo:

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}' = 0, \quad \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}' = 0$$

$\boldsymbol{R}'$ e $\boldsymbol{M}'$: risultante e momento delle forze di reazione vincolare.

Sistemi di corpi

Si consideri un sistema di r corpi rigidi (quali, per esempio, i bracci di un robot). Se tutti i corpi sono liberi di muoversi nello spazio, il moto del sistema è ad ogni istante descrivibile per mezzo di $6r$ coordinate $\boldsymbol{x}$.

Supponiamo ora che che esistano delle limitazioni al moto dei corpi che costituiscono il sistema (quali quelle indotte dalla connessione di un braccio con il successivo tramite un giunto, che elimina cinque su sei gradi di mobilità relativi tra i due bracci).

Diciamo che sul moto dei corpi esiste un **vincolo**, che esprimeremo con la relazione:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0$$

Un vincolo rappresentato da un'equazione di questo tipo si dice **olonomo** (perché dipende solo dalle coordinate di posizione e non dalle velocità) e **stazionario** (perché non dipende dal tempo).

Coordinate libere

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0$$

Se il vincolo $\boldsymbol{h}$ è costituito da s componenti scalari e tutte sono continue e differenziabili con continuità, è possibile, per mezzo del vincolo, eliminare s coordinate dalle equazioni del sistema.

Le rimanenti $n=6r-s$ coordinate prendono il nome di **coordinate libere**, o **lagrangiane**, o **generalizzate**, e n è il numero di **gradi di libertà** del sistema meccanico.

Per esempio**,** in un robot a 6 giunti, delle 36 coordinate originarie, se ne eliminano 30 in virtù dei vincoli imposti dai 6 giunti e ne rimangono 6 che costituiscono le coordinate lagrangiane: tipicamente si scelgono le coordinate di giunto (l'angolo ϑ o la distanza d, rispettivamente per giunto rotazionale o prismatico).

Spostamento virtuale

Definiamo **lavoro elementare** compiuto da un sistema di forze agenti su un corpo rigido e aventi risultante $\boldsymbol{f}$ e momento rispetto ad un qualsiasi punto Q del corpo μ_Q, la quantità:

$$dW = \boldsymbol{f}^T d\boldsymbol{p}_Q + \mu_Q^T \omega dt$$

dove ω è la velocità angolare del corpo.

Consideriamo ora un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli di mobilità, per il quale si possano esprimere le coordinate $\boldsymbol{x}$ in termini di un vettore λ di coordinate generalizzate: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\lambda)$.

Definiamo **spostamento virtuale** la quantità:

$$\delta\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \lambda}\delta\lambda$$

ovvero uno spostamento elementare conforme ai vincoli.

Principio dei lavori virtuali

In corrispondenza di uno spostamento virtuale, possiamo definire il **lavoro virtuale**, ovvero il lavoro elementare compiuto dalle forze agenti sul sistema di corpi per lo spostamento virtuale.

Poiché le forze di reazione vincolare non producono lavoro, essendo ortogonali ai vincoli, e ipotizzando vincoli privi si attrito, il lavoro virtuale si riduce al lavoro δW_a delle forze attive.

Si può dimostrare che condizione per **l'equilibrio del sistema di corpi rigidi** è che il lavoro virtuale delle forze attive sia nullo per qualunque spostamento virtuale:

$$\delta W_a = \boldsymbol{\zeta}^T \delta \boldsymbol{\lambda} = 0$$

dove ζ è un vettore di forze generalizzate.