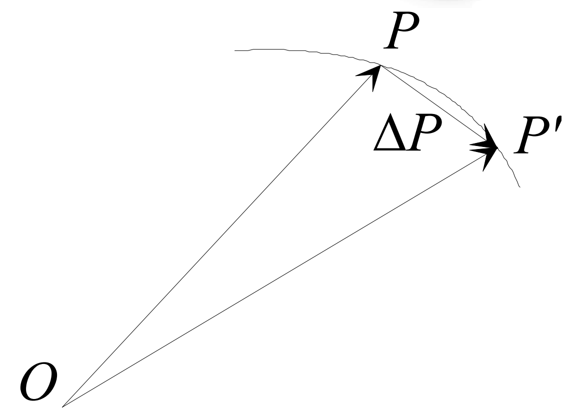
Robotica industriale

Richiami di cinematica

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Velocità di un punto

Consideriamo un punto P in moto rispetto ad un osservatore in O. Siano:



P la posizione all'istante *t* (ossia il vettore ***P***–***O***)

P′ la posizione all'istante $t+\Delta t$

$\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}$ lo spostamento del punto nell'intervallo Δt

Consideriamo il vettore $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta t$ e valutiamone il limite per Δt tendente a 0.

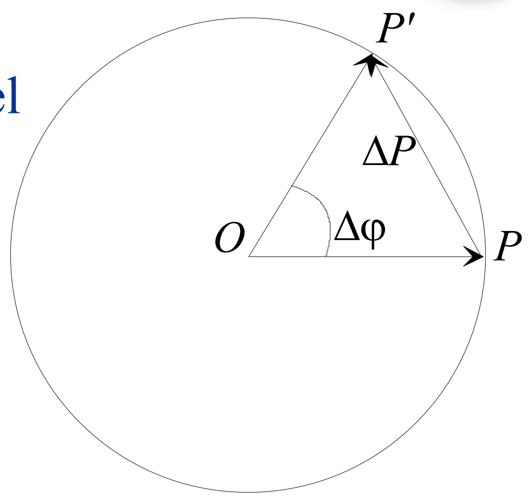
Otteniamo il vettore **velocità del punto:**

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt}$$

Il vettore è diretto come la tangente alla traiettoria nel punto P.

Velocità di un punto in moto rotatorio

Si supponga che il punto P sia in moto lungo una circonferenza. Sia $\Delta\varphi$ l'angolo che ne descrive il moto nel passaggio dal punto P a P'.



Sia $\boldsymbol{r}$ il versore di un asse ortogonale al piano della circonferenza, passante per il centro O ed uscente dal foglio.

Se l'angolo $\Delta\varphi$ è infinitesimo, risulta:

$$\Delta\boldsymbol{P} = \Delta\varphi\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O})$$

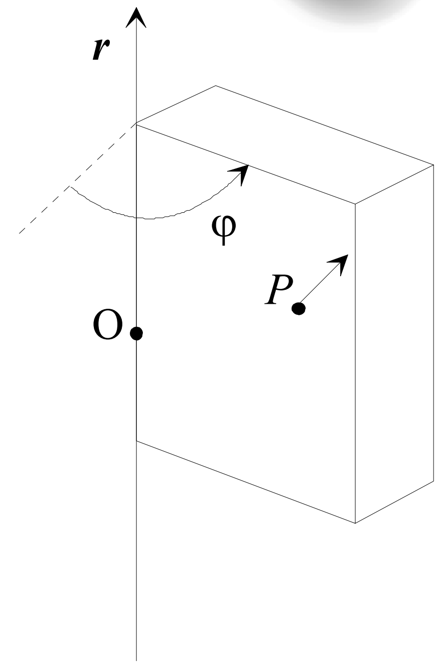
Dividendo per Δt e prendendo il limite per Δt tendente a 0 si ha la velocità del punto:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\varphi}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O})$$

N.B.: Prodotto vettoriale $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

Direzione: ortogonale al piano di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$
Verso: regola della mano destra
Modulo: $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\vartheta)$, ϑ: angolo tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

Moto rotatorio intorno ad asse fisso



Si abbia un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso. Sia ***r*** il versore dell'asse di rotazione e:

O un punto sull'asse

P un punto solidale con il corpo in moto

φ l'angolo formato rispetto ad un riferimento

La velocità del punto P si ottiene, qualunque sia O, come:

$$\boldsymbol{v} = \omega \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O})$$

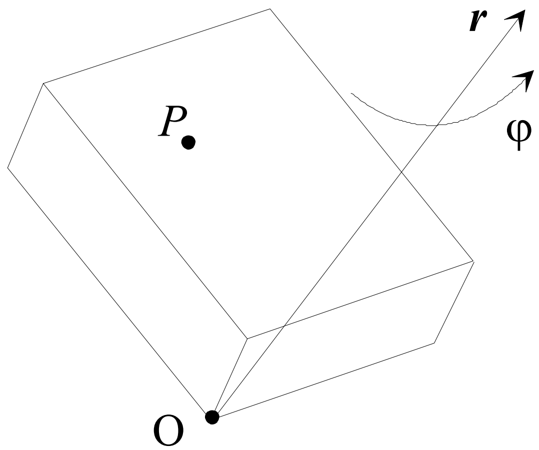
con ω vettore **velocità angolare**, genericamente funzione del tempo.

Risulta inoltre:

$$\omega = \dot{\varphi}\boldsymbol{r}$$

(la direzione ed il verso di ω sono quelli del versore ***r***).

Moto rotatorio con punto fisso



Si abbia un corpo rigido in rotazione con un punto O fisso (moto polare).

E' noto che la rotazione di una terna solidale con il corpo rispetto ad una terna fissa con origine in O è sempre rappresentabile con una rotazione di un angolo φ intorno ad un asse ***r*** (rappresentazione asse-angolo).

La velocità di un punto P del corpo si ottiene allora come:

$$\boldsymbol{v} = \omega \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O})$$

con ω vettore **velocità angolare**, funzione del tempo, ma non del punto P (è la stessa per tutti i punti del corpo).

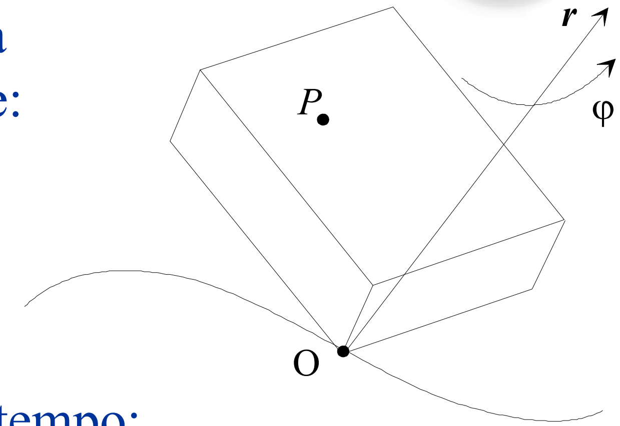
Risulta inoltre:

$$\omega = \dot{\varphi}\boldsymbol{r}$$

La direzione ed il verso di ω sono quelli del versore ***r***, e cambiano ad ogni istante (***r***=***r***(*t*)): asse di *istantanea* rotazione).

Moto rototraslatorio

Il più generale moto di un corpo rigido è quello in cui la velocità di un generico punto P si possa esprimere come:

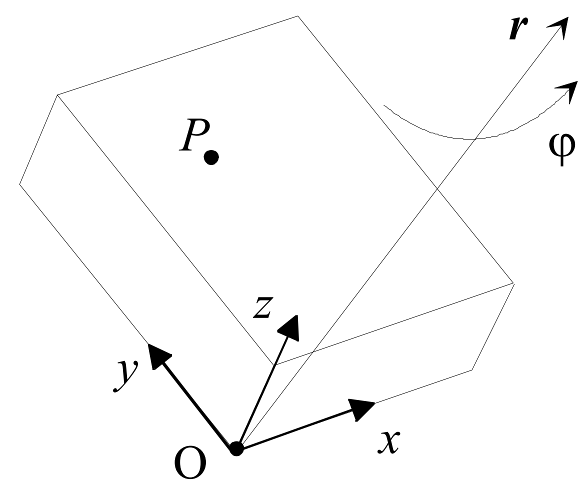


$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \omega \times \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}\right)$$

O è un punto prefissato solidale al corpo

ω è il vettore **velocità angolare** del corpo funzione del tempo:

non dipende né da P, né da O.



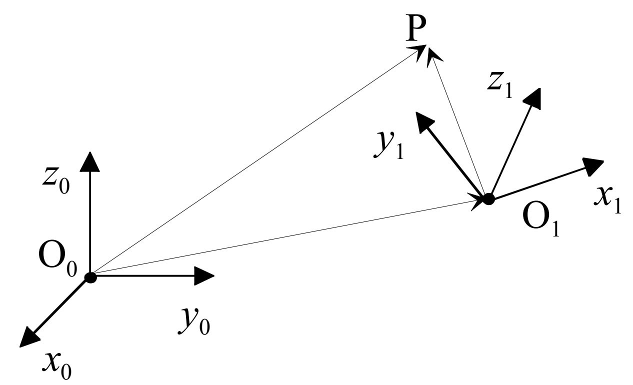
Se poi consideriamo una terna solidale con il corpo:

$\boldsymbol{v}_o$ è la velocità (lineare) dell’origine O della terna rispetto ad un osservatore fisso

ω è definibile come velocità angolare della terna stessa

Cinematica relativa

Consideriamo un osservatore che diciamo “fisso” ed un secondo osservatore in moto rispetto al primo. Sia P un punto mobile. I due osservatori descriveranno il moto di P con leggi diverse.



Associamo a ciascun osservatore una terna. Siano:

V la velocità di P rispetto all’osservatore fisso

v la velocità di P rispetto all’osservatore mobile

Risulta (regola del *parallelogramma* delle velocità):

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}_s$$

con:

$$\boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{V}_{o1} + \omega_1 \times \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}_1\right)$$

velocità di trascinamento (velocità che avrebbe P se si muovesse solidalmente con la terna mobile).