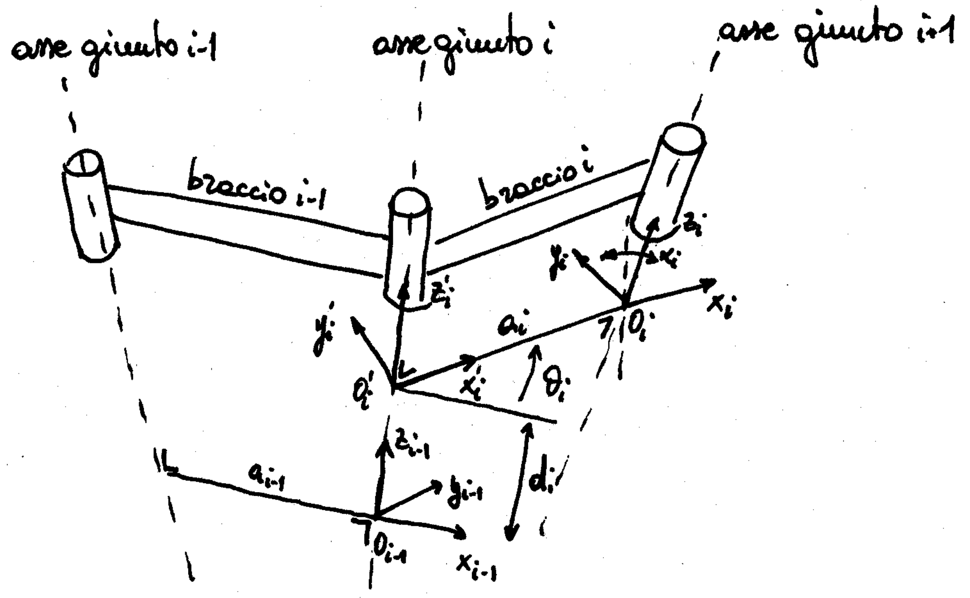
Parametri di Denavit-Hartenberg



Parametri del giunto i : $a_i, d_i, \alpha_i, \vartheta_i$

Matrice di trasformazione del giunto i

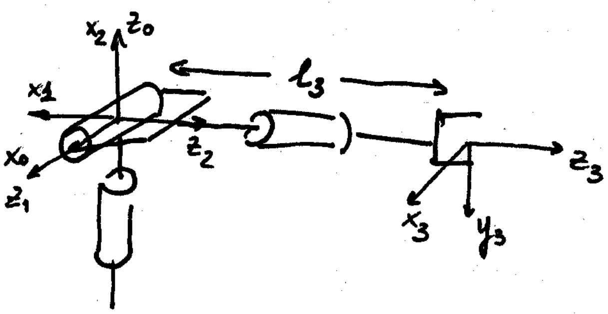
$$A_i^{i-1}(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Regole operative

- se gli assi z_{i-1} e z_i sono paralleli e il giunto i è rotoidale posizionare O_i in modo da annullare d_i
  se il giunto è prismatico si sceglie O_i in corrispondenza di un fine corsa
- fissare la terna n scegliendo x_n perpendicolare a z_{n-1}
  se il giunto n è di rotazione allineare z_n a z_{n-1}

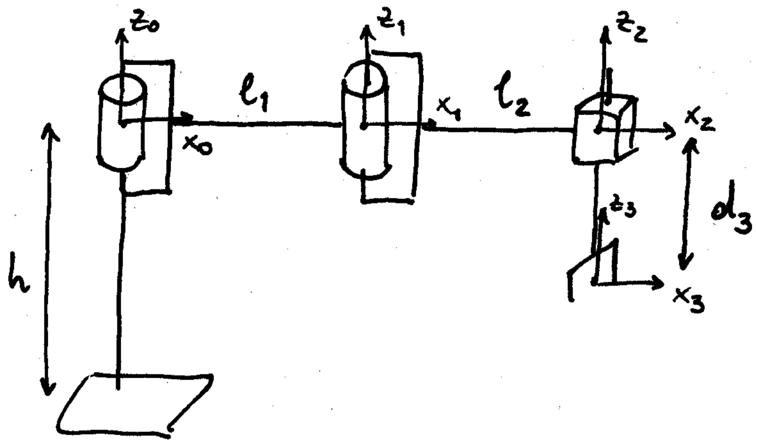
Cinematica diretta

Polso sferico



	a	α	d	θ
1	0	$-\pi/2$	0	θ_1
2	0	$\pi/2$	0	θ_2
3	0	0	ℓ_3	θ_3

Scara

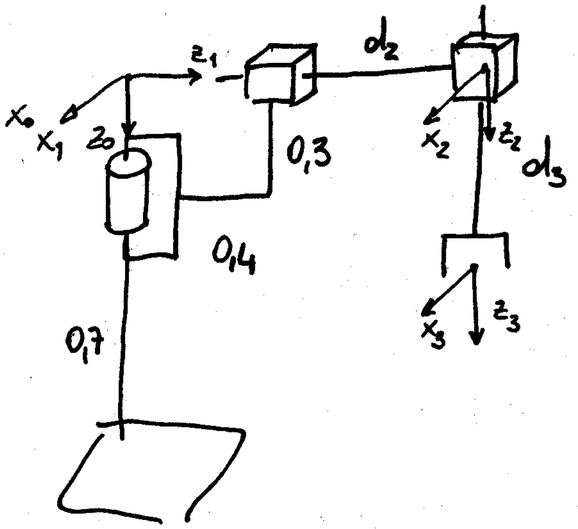


	a	α	d	θ
1	ℓ_1	0	0	θ_1
2	ℓ_2	0	0	θ_2
3	0	0	$-d_3$	0

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & \ell_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & \ell_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & \ell_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & \ell_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3^0 = \begin{bmatrix} c_1c_2 - s_1s_2 & -c_1s_2 - s_1c_2 & 0 & \ell_2c_1c_2 - \ell_2s_1s_2 + \ell_1c_1 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & c_1c_2 - s_1s_2 & 0 & \ell_2s_1c_2 + \ell_2c_1s_2 + \ell_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore 1

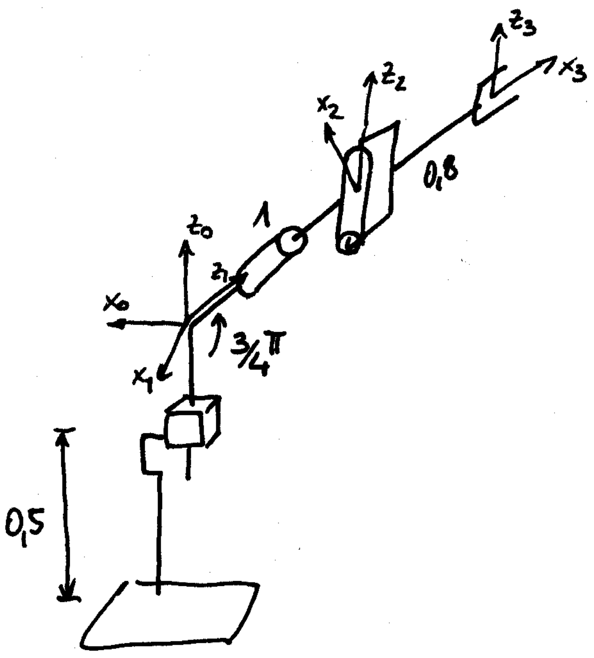


	a	α	d	θ
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	0	$-\pi/2$	$0{,}4+d_2$	0
3	0	0	d_3	0

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0{,}4+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & s_1(0{,}4+d_2) \\ s_1 & c_1 & 0 & -c_1(0{,}4+d_2) \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore 2

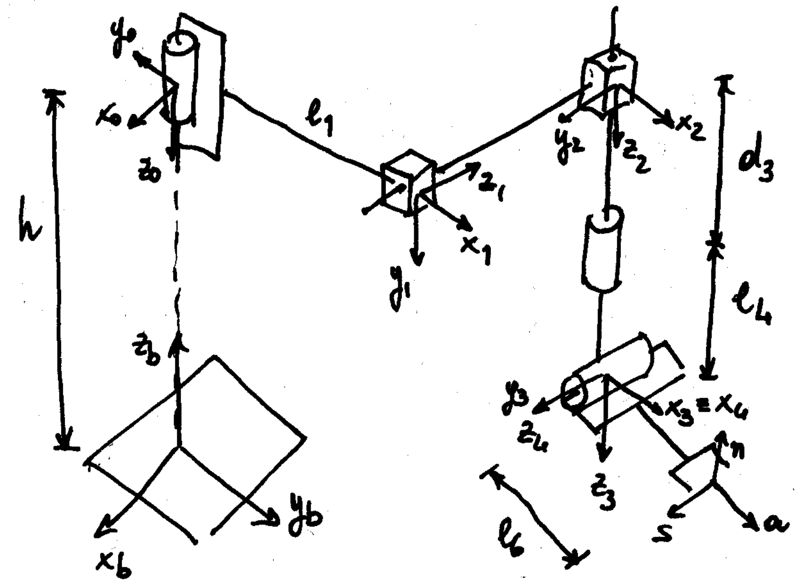


	a	α	d	θ
1	0	$-\pi/4$	$-d_1$	$\pi/2$
2	0	$\pi/2$	1	θ_2
3	0,8	0	0	θ_3

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0{,}8c \\ s_3 & c_3 & 0 & 0{,}8s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(s_2c_3 + s_3\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s_2s_3 - c_3\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 & -\frac{0{,}8}{\sqrt{2}}s_2c_3 - \frac{0{,}8}{\sqrt{2}}s_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2c_3 & -c_2s_3 & s_2 & 0{,}8c_2c_3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s_3 - s_2c_3\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(s_2s_3 + c_3\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 & -\frac{0{,}8}{\sqrt{2}}s_2c_3 + \frac{0{,}8}{\sqrt{2}}s_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinematica inversa



	a	α	d	θ
1	l_1	$\pi/2$	0	θ_1
2	0	$-\pi/2$	d_2	0
3	0	0	$d_3 + l_4$	0

Per il seguente manipolatore, noti posizione e orientamento $(p_x, p_y, p_z, \varphi, \theta, \psi)$ dell'organo terminale calcolare i rispettivi angoli di giunto.

Grazie alla presenza del polso sferico (con $\theta_6 = 0$) sfruttiamo il disaccoppiamento tra posizione e orientamento.

Orientamento

$\Phi = (\varphi, \theta, \psi)$ è una terna di angoli di Eulero ZYZ per la scelta di terne operata

Allora

$$R_{ee}(q) = R(\Phi) = R_3^b(\theta_1)\, R_{ee}^3(\theta_4, \theta_5)$$

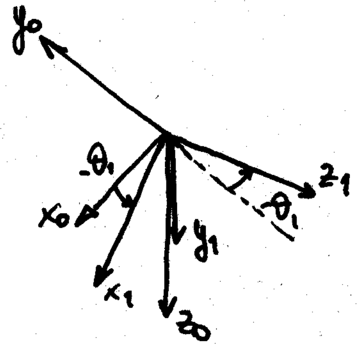
e si ricava allora

$$R_3^b(\theta_1)^T R(\Phi) = R_{ee}^3(\theta_4, \theta_5)$$

Dalla posizione delle terne si ricava

$$R_0^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} \cos -\vartheta_1 & 0 & -\sin -\vartheta_1 \\ -\sin -\vartheta_1 & 0 & -\cos -\vartheta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Risulta quindi

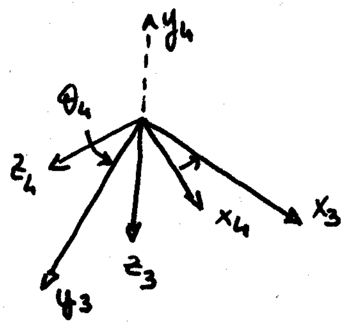
$$R_3^b = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ -s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

È poi noto che

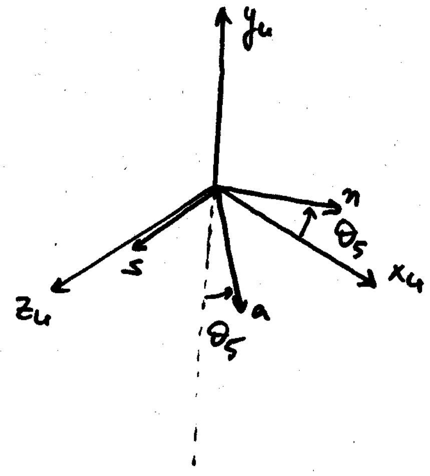
$$R(\Phi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Infine dall'analisi delle terne polso si ricava

$$R_4^3 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_4 & 0 & -\sin\vartheta_4 \\ \sin\vartheta_4 & 0 & \cos\vartheta_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$R_e^4 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_5 & 0 & \sin\vartheta_5 \\ \sin\vartheta_5 & 0 & -\cos\vartheta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



e dal prodotto si ricava

$$R_e^3 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 & -s_4 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 & c_4 & s_4 s_5 \\ -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix}$$

Consideriamo l'ultima riga di $\quad R_3^{b\,T} R(\Phi) = R_e^3$
si ricava

- $$\begin{bmatrix} s_\vartheta c_\psi & -s_\vartheta s_\psi & -c_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix}$$

ovvero $\quad \vartheta = \begin{cases} \pi + \vartheta_5 \\ \pi - \vartheta_5 \end{cases} \qquad (-c_\vartheta = c_5)$

$$\psi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} -s_\vartheta s_\psi = 0 \\ s_\vartheta c_\psi = -s_5 \end{matrix} \right)$$

Si ricava quindi che ψ non può essere assegnato arbitrariamente infatti il polso ha in questo caso solo due gradi di libertà.

Consideriamo la soluzione $\theta = \theta_5 + \pi$, $\psi = 0$; sostituendo nella relazione $R_3^{bT} R(\Phi) = R_e^3$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ -s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_\varphi c_5 & -s_\varphi & -c_\varphi s_5 \\ -s_\varphi c_5 & c_\varphi & -s_\varphi s_5 \\ s_5 & 0 & -c_5 \end{bmatrix} =$$

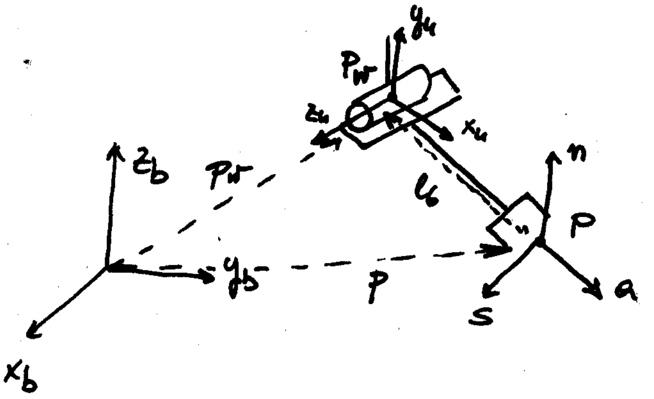
$$= \begin{bmatrix} -c_{1\varphi} c_5 & -s_{1\varphi} & -c_{1\varphi} s_5 \\ s_{1\varphi} c_5 & -c_{1\varphi} & s_{1\varphi} s_5 \\ -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 c_5 & -s_4 & c_4 s_5 \\ s_4 c_5 & c_4 & s_4 s_5 \\ -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix}$$

Dal confronto della seconda colonna si ricava $\theta_4 = \pi - (\theta_1 + \varphi)$

Dato l'orientamento della terna utensile si ricava quindi che una delle possibili soluzioni della cinematica inversa per gli angoli di polso è

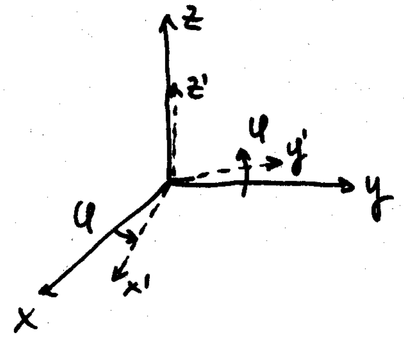
$$\theta_5 = \theta - \pi$$
$$\theta_4 = \pi - (\theta_1 + \varphi) \qquad \text{con } \psi = 0$$

<u>Posizione</u>

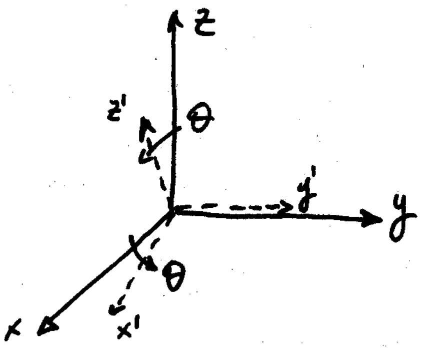


Si ricava $\vec{P}_W = \vec{P} - \ell_6 \vec{a}$

Ricaviamo la matrice $R_{ee}(\varphi, \theta)$ che definisce l'orientamento dell'end effector e quindi del vettore $\vec{a}$.



$$R_\varphi = \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_\theta = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$R_{ee}(\varphi, \theta) = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & c_\varphi s_\theta \\ & & s_\varphi s_\theta \\ & & c_\theta \end{bmatrix}$$

Dalla relazione vettoriale precedente si ricava quindi

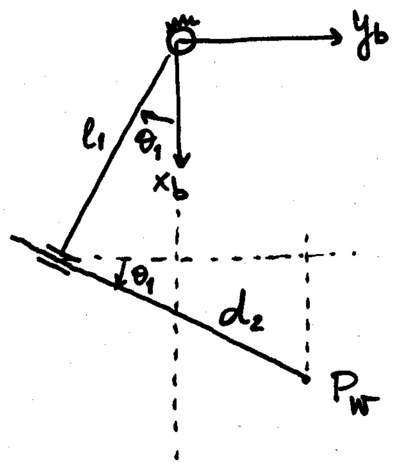
$$\begin{bmatrix} p_{w_x} \\ p_{w_y} \\ p_{w_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - l_6 c_\varphi s_\theta \\ p_y - l_6 s_\varphi s_\theta \\ p_z - l_6 c_\theta \end{bmatrix}$$

Dall'analisi dei primi tre gdl si ricava che p_{w_z} dipende solo dal secondo giunto prismatico, ovvero

$$p_{w_z} = h - d_3 - l_4$$

da cui $\quad d_3 = h - l_4 - p_{w_z} = h - l_4 - p_z + l_6 c_\theta$

I due rimanenti gradi di libertà riguardano un moto piano e possono quindi essere analizzati proiettando la struttura sul piano xy.



$$p_{w_x} = l_1 \cos\theta_1 + d_2 \sin\theta_1$$

$$p_{w_y} = d_2 \cos\theta_1 - l_1 \sin\theta_1$$

Quadrando e sommando queste relazioni si ricava

$$p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 = l_1^2 + d_2^2 + \cancel{2 l_1 d_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1} - \cancel{2 l_1 d_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1}$$

Infine $\quad d_2 = \sqrt{p_{w_x}^2 + p_{w_y}^2 - l_1^2}$

Dalle relazioni precedenti, sommando e sottraendo, si ricava anche.

$$\begin{array}{l} l_1 p_{w_x} = l_1^2 \cos\theta_1 + \cancel{l_1 d_2 \sin\theta_1} \\ d_2 p_{w_y} = d_2^2 \cos\theta_1 - \cancel{l_1 d_2 \sin\theta_1} \\ \hline l_1 p_{w_x} + d_2 p_{w_y} = (l_1^2 + d_2^2) \cos\theta_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} d_2 p_{w_x} = \cancel{l_1 d_2 \cos\theta_1} + d_2^2 \sin\theta_1 \\ l_1 p_{w_y} = \cancel{l_1 d_2 \cos\theta_1} - l_1^2 \sin\theta_1 \\ \hline d_2 p_{w_x} - l_1 p_{w_y} = (d_2^2 + l_1^2) \sin\theta_1 \end{array}$$

ovvero

$$\cos\theta_1 = \frac{l_1 p_{w_x} + d_2 p_{w_y}}{l_1^2 + d_2^2}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{d_2 p_{w_x} - l_1 p_{w_y}}{l_1^2 + d_2^2}$$

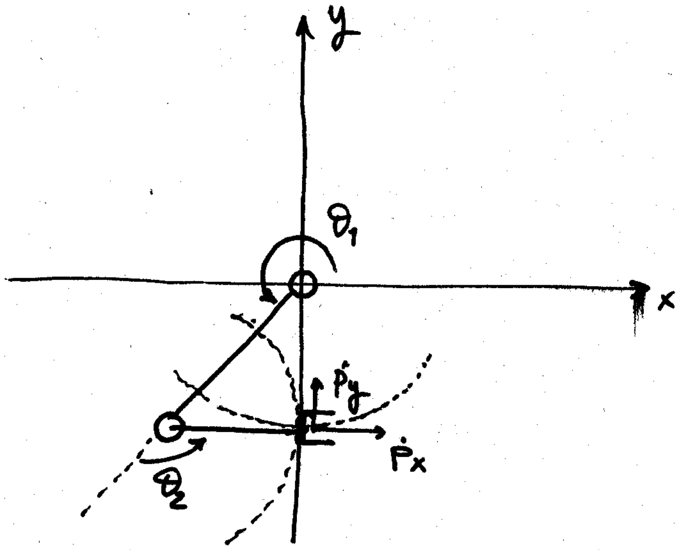
e si ricava quindi $\quad \theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1)$

Jacobiano geometrico

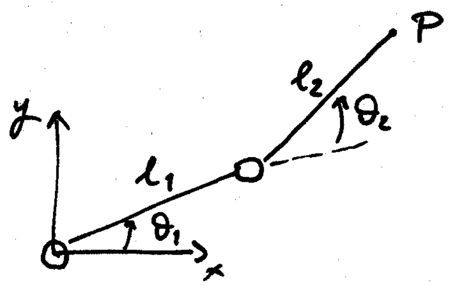
Dato un manipolatore planare a due bracci trovare la configurazione in cui $J_p = I_2$.

$J_p = I_2$ significa

$$\dot{p}_x = \theta_1$$
$$\dot{p}_y = \theta_2$$



Ricaviamo l'espressione dello jacobiano geometrico



$$p = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per definizione $J_p = \begin{bmatrix} z_0 \wedge (p - p_0) & z_1 \wedge (p - p_1) \end{bmatrix}$

Dove

$$z_0 \wedge = z_1 \wedge = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$J_P = \begin{bmatrix} -\ell_1 s_1 - \ell_2 s_{12} & -\ell_2 s_{12} \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} & \ell_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imponendo $J_P = I_2$ si ottiene

$$\begin{cases} -\ell_1 s_1 - \ell_2 s_{12} = 1 \\ \ell_2 c_{12} = 1 \\ \ell_2 s_{12} = 0 \\ \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} = 0 \end{cases}$$

Poichè $s_{12} = 0$ dovrà essere $c_{12} = \pm 1$ quindi $\ell_2 = 1$ e $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0$.

Dalle altre due equazioni si ricava

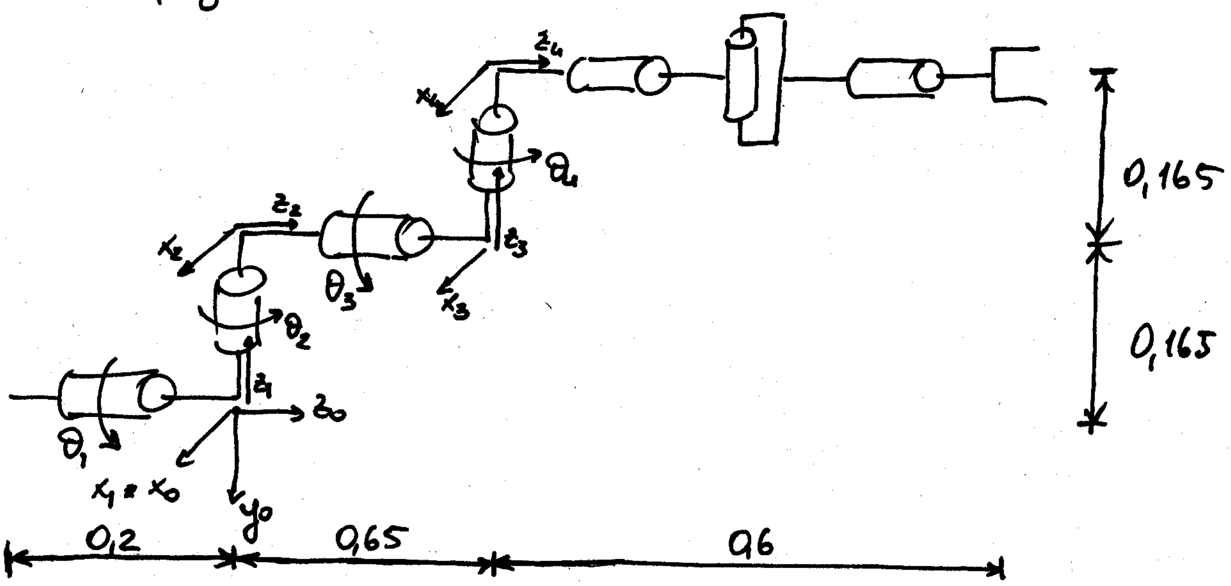
$$\begin{cases} -\ell_1 s_1 = 1 \\ -\ell_1 c_1 = 1 \end{cases}$$

cioè $s_1 = c_1 = -\frac{1}{\ell_1}$ e si ricava che ϑ_1 deve essere un multiplo di $\frac{\pi}{4}$ e $\ell_1 = \sqrt{2}$. Infine $\vartheta_1 = \frac{5}{4}\pi$.

La configurazione desiderata è quindi $\vartheta_1 = \pi\, 5/4$, $\vartheta_2 = -\pi\, 5/4$ con $\ell_1 = \sqrt{2}$ e $\ell_2 = 1$.

Calcolo diretto dello jacobiano

Data la seguente struttura



Considerando bloccati gli ultimi tre gradi di libertà calcolare J_P relativo alla configurazione data

L'end effector può solo ruotare intorno a z_0 e y_0, quindi istantaneamente solo $\dot{p}_x \neq 0$

$$J_P = \begin{bmatrix} 0{,}165 \cdot 2 & -(0{,}65+0{,}6) & 0{,}165 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}33 & -1{,}25 & 0{,}165 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$