Controllo dei robot

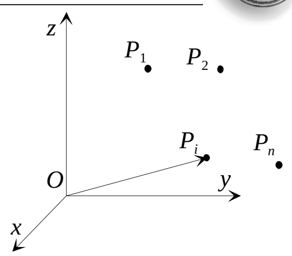
Dinamica

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Centro di massa

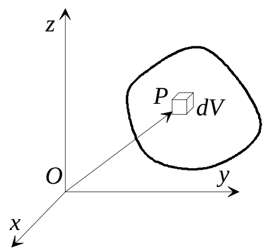
Consideriamo un sistema di punti materiali, ciascuno dei quali abbia massa m_i e la cui posizione sia descritta dal vettore $\boldsymbol{p}_i$ rispetto ad una terna *xyz*.
Definiamo **centro di massa**, o **baricentro**, il punto individuato dal vettore:

$$\boldsymbol{p}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i m_i}{m}, \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



Consideriamo ora un **corpo rigido**, di massa *m*, volume *V* e densità ρ. Il centro di massa è individuato dal vettore:

$$\boldsymbol{p}_c = \frac{\int_V \boldsymbol{p} \rho dV}{m}$$



Momento d'inerzia

Consideriamo un punto materiale di massa m ed un asse $\boldsymbol{r}$. Sia d la distanza del punto dall'asse. Definiamo momento d'inerzia del punto rispetto all'asse la quantità:

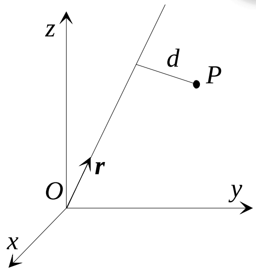
$$I_r = md^2$$

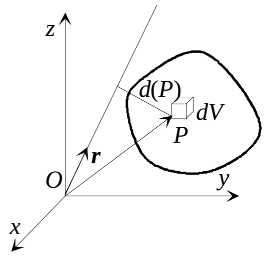
Analogamente, per un sistema di punti materiali:

$$I_r = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

Consideriamo ora un **corpo rigido**, di massa m, volume V e densità ρ. Il momento d'inerzia rispetto all'asse è definito come:

$$I_r = \int_V d^2(\boldsymbol{p})\rho dV$$





Tensore d'inerzia

Il momento d'inerzia di un corpo rigido rispetto ad un asse passante per O e avente versore $\boldsymbol{r}$ si può esprimere come:

$$I_r = \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{I}_o \boldsymbol{r}$$

dove la matrice $\boldsymbol{I}_O$, di dimensioni 3×3 e simmetrica, prende il nome di **tensore d'inerzia** del corpo relativo al polo O. Questa matrice assume l'espressione:

$$\boldsymbol{I}_O = \begin{bmatrix} I_{Oxx} & I_{Oxy} & I_{Oxz} \\ I_{Oxy} & I_{Oyy} & I_{Oyz} \\ I_{Oxz} & I_{Oyz} & I_{Ozz} \end{bmatrix}$$

Dipende dal polo O e dalla terna di riferimento.

Momenti d'inerzia

$$I_{Oxx} = \int_V \left(p_y^2 + p_z^2\right)\rho dV$$
$$I_{Oyy} = \int_V \left(p_z^2 + p_x^2\right)\rho dV$$
$$I_{Ozz} = \int_V \left(p_x^2 + p_y^2\right)\rho dV$$

Prodotti d'inerzia

$$I_{Oxy} = \int_V - p_x p_y \rho dV$$
$$I_{Oxz} = \int_V - p_x p_z \rho dV$$
$$I_{Oyz} = \int_V - p_y p_z \rho dV$$

Tensore d’inerzia

Il tensore d’inerzia dipende sia dal polo che dall’orientamento della terna di riferimento.
Se si considera una nuova terna, ruotata secondo la matrice $\boldsymbol{R}$ rispetto alla terna originaria, il tensore d’inerzia si trasforma secondo la seguente legge:

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{I}\boldsymbol{R}^T$$

Poiché il tensore d’inerzia è una matrice definita positiva, esiste una terna per cui esso assume forma diagonale. Gli assi di tale terna prendono il nome di **assi principali d’inerzia**.
Se la terna ha origine nel baricentro, gli assi prendono anche il nome di **assi centrali d’inerzia**.

Momento rispetto ad assi paralleli

Sia I_C il momento d’inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse passante **per il baricentro**.
Consideriamo un asse parallelo al precedente, a distanza Δ da esso. Il momento d’inerzia I_A rispetto a questo nuovo asse risulta:

$$I_A = I_C + m\Delta^2$$

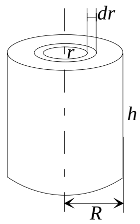
Sia ora $\boldsymbol{I}_C$ il tensore d’inerzia del corpo di massa m rispetto ad una terna avente come origine **il baricentro**.
Il tensore d’inerzia, rispetto ad una terna parallela a quella baricentrale e avente origine in un diverso punto O, è dato da:

$$\boldsymbol{I}_O = \boldsymbol{I}_C + m\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{p}_C)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_C)$$

dove $\boldsymbol{p}_C$ è la posizione del baricentro nella terna avente come origine O e $\boldsymbol{S}$ è l’operatore anti-simmetrico.

Alcuni esempi

Cilindro circolare omogeneo

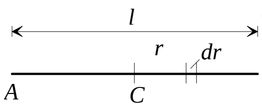


Calcoliamo il momento d’inerzia rispetto all’asse:

$$I = \int_V \rho r^2 dV = \int_0^R \rho r^2 2\pi r h dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = m\frac{R^2}{2}$$

essendo $m=\rho\pi R^2 h$ la massa del cilindro.

Asta omogenea



Calcoliamo il momento d’inerzia rispetto ad un asse perpendicolare passante per il baricentro:

$$I_C = 2\int_0^{l/2} r^2 \rho dr = 2\rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2$$

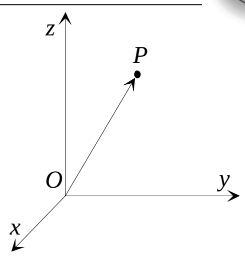
Rispetto ad un asse passante per A: $$I_A = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

Energia cinetica

Consideriamo un punto materiale di massa m e la cui posizione sia descritta dal vettore $\boldsymbol{p}$ rispetto ad una terna xyz.

Definiamo **energia cinetica** del punto la quantità:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{p}}^T \dot{\boldsymbol{p}}$$

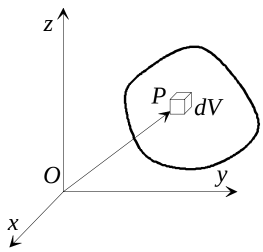


Analogamente, per un sistema di punti materiali:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{p}}_i^T \dot{\boldsymbol{p}}_i$$

Consideriamo ora un **corpo rigido**, di massa m, volume V e densità ρ. L’energia cinetica è definita come:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \dot{\boldsymbol{p}}^T \dot{\boldsymbol{p}} \rho dV$$



Energia cinetica di un corpo rigido

Per il calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido esiste il seguente risultato notevole (**teorema di König**):

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{p}}_C^T \dot{\boldsymbol{p}}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}_C \boldsymbol{\omega}$$

dove $\boldsymbol{p}_C$ indica la posizione del baricentro, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare e $\boldsymbol{I}_\mathrm{C}$ è il tensore di inerzia rispetto ad una terna con origine il baricentro e parallela alla terna di riferimento.

Nel caso particolare di **rotazione rispetto ad asse fisso**, assunto questo asse coincidente con l'asse z, il risultato si semplifica nel seguente:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{p}}_C^T \dot{\boldsymbol{p}}_C + \frac{1}{2} I_{cz} \omega_z^2$$

dove I_{cz} è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo all'asse z, passante per il baricentro e ω_z è la proiezione di $\boldsymbol{\omega}$ lungo l'asse.

Energia cinetica di un sistema di corpi

Consideriamo ora un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli di mobilità (come un manipolatore robotico), per il quale si possa esprimere il moto in termini di un vettore $\boldsymbol{q}$ di coordinate generalizzate.
L'energia cinetica del sistema si può esprimere per mezzo della seguente forma quadratica:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}}$$

La matrice $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})$ prende il nome di **matrice di inerzia** del sistema di corpi rigidi e generalmente dipende dal vettore di coordinate $\boldsymbol{q}$.
Poiché l'energia cinetica è una quantità positiva per velocità diverse da zero, la matrice di inerzia, simmetrica, è sempre **definita positiva**.

Energia potenziale

Un sistema di forze posizionali (cioè dipendenti solo dalle posizioni dei punti d'applicazione) si dice **conservativo** se il lavoro compiuto da ciascuna forza non dipende dalla traiettoria seguita dal punto di applicazione ma solo dalla sua posizione iniziale e finale.
In questo caso il lavoro elementare coincide con il differenziale, cambiato di segno, di una funzione che prende il nome di **energia potenziale**:

$$dW = -dU$$

Un esempio di sistema di forze conservativo è la **forza gravitazionale**.
Per un **punto materiale** avremo l'energia potenziale:

$$U = -m\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}$$

dove $\boldsymbol{g}$ è il vettore accelerazione di gravità.

Per un **corpo rigido**:

$$U = -\int_V \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p} \rho dV = -m\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_C$$

Equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema di corpi rigidi, le posizioni ed orientamenti dei quali si possano esprimere per mezzo di n coordinate generalizzate q_i.
Definiamo **lagrangiana** del sistema meccanico la quantità:

$$L = T - U$$

essendo T e U rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema. Siano poi ξ_i le forze generalizzate associate alle coordinate generalizzate q_i. Il lavoro elementare compiuto dalle forze agenti sul sistema si può esprimere come:

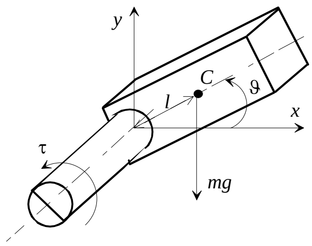
$$dW = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dq_i$$

Si può dimostrare che la dinamica del sistema è retta dalle seguenti **equazioni di Lagrange:**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n}$$

Esempio

Consideriamo un sistema costituito da un motore rigidamente connesso ad un carico soggetto a forza gravitazionale.
Siano I_m e I i momenti di inerzia di motore e carico rispetto all'asse del motore, m la massa del carico, l la distanza del baricentro del carico dall'asse del motore.



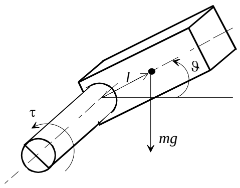
<u>Energia cinetica del motore</u>
Poiché il baricentro è fisso e l'asse di rotazione è baricentrale, si ha:

$$T_m = \frac{1}{2} I_m \dot{\vartheta}^2$$

<u>Energia cinetica del carico</u>
Dal teorema di König:

$$T_c = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{p}}_C^T \dot{\mathbf{p}}_C + \frac{1}{2} I_{cz} \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_{cz} \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}\left(ml^2 + I_{cz}\right)\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2$$

Esempio



Energia potenziale gravitazionale:

$$U = -m\mathbf{g}^T \mathbf{p}_C = -m\begin{bmatrix}0 & -g\end{bmatrix}\begin{bmatrix} l\cos\vartheta \\ l\sin\vartheta \end{bmatrix} = mgl\sin\vartheta$$

Lagrangiana: $L = T_m + T_c - U = \frac{1}{2}\left(I_m + I\right)\dot{\vartheta}^2 - mgl\sin\vartheta$

Equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\left(I + I_m\right)\dot{\vartheta}\right) + mgl\cos\vartheta = \tau$$

Pertanto:

$$\left(I + I_m\right)\ddot{\vartheta} + mgl\cos\vartheta = \tau$$

L'equazione si lascia facilmente interpretare come l'equilibrio dei momenti rispetto all'asse di rotazione.

Manipolatore robotico: lagrangiana

Per un manipolatore robotico, il cui moto è caratterizzato dalle n coordinate libere di giunto q_i, **l'energia cinetica** è data dalla forma quadratica:

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

mentre l'energia potenziale è la somma delle energie potenziali dei singoli bracci (calcolate per mezzo delle posizioni dei baricentri $\boldsymbol{p}_{Ci}$) :

$$U(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} -m_i \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{Ci}$$

Ne consegue l'espressione della Lagrangiana:

$$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - U(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{Ci}$$

dove b_{ij} sono gli elementi della matrice di inerzia $\boldsymbol{B}$.

Manipolatore robotico: derivazioni

Deriviamo la lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{db_{ij}(\boldsymbol{q})}{dt}\dot{q}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]\dot{q}_j$$

Inoltre:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{jk}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{g}^T \frac{\partial \boldsymbol{p}_{Cj}}{\partial q_i} = g_i(\boldsymbol{q})$$

Manipolatore robotico: modello

Dalle equazioni di Lagrange otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\boldsymbol{q}) = \xi_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

dove:

$$h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}$$

In termini matriciali:

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}}$$

dove $\boldsymbol{C}$ è un'opportuna matrice $n\times n$ i cui elementi soddisfano la relazione:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\dot{q}_k\dot{q}_j$$

Significato dei termini

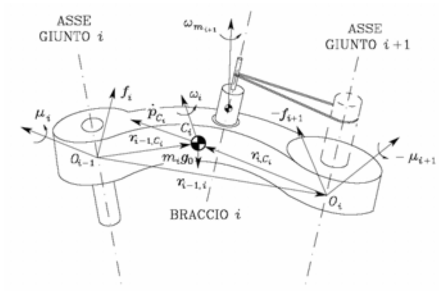
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

- $\boldsymbol{\tau}$ → Coppie ai giunti
- $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ → Termini gravitazionali
- $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$ → Termini centrifughi e di Coriolis
- $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}$ → Termini inerziali

Esistono **metodi sistematici** per ricavare i coefficienti della matrice d'inerzia e quindi, per derivazione, quelli centrifughi e di Coriolis.
Tuttavia la scrittura del modello dinamico basata sulle equazioni di Lagrange, pur dando luogo ad un modello in forma chiusa, facilmente interpretabile ed utilizzabile nella sintesi del controllore, costituisce un procedimento **inefficiente dal punto di vista computazionale**.

Metodo di Newton-Eulero

Una strada alternativa per la formulazione del modello dinamico del manipolatore è quella che va sotto il nome di **metodo di Newton-Eulero**.
Si tratta di scrivere i bilanci di forze e momenti agenti sul singolo braccio, mettendo in evidenza le interazioni con i bracci contigui nella catena cinematica.



Si ottiene un sistema di equazioni che possono essere risolte in modo **ricorsivo**, propagando le velocità ed accelerazioni dalla base verso l'organo terminale, e le forze ed i momenti in senso opposto.

La ricorsività rende l'algoritmo di Newton-Eulero **computazionalmente efficiente.**

Il disegno è tratto dal testo:
L.Sciavicco, B.Siciliano
Robotica industriale – Modellistica e controllo di robot manipolatori (2a ed.)
Mc Graw-Hill, 2000

Dinamica diretta ed inversa

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \tau$$

Dinamica diretta

Assegnate le coppie ai giunti $\tau(t)$, determinare le accelerazioni ai giunti $\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$ e, note le posizioni iniziali $\boldsymbol{q}(t_0)$ e le velocità iniziali $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$, le posizioni $\boldsymbol{q}(t)$ e le velocità $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$.

- Problema la cui soluzione è utile per la **simulazione numerica** della dinamica
- È risolubile sia con l'approccio di Lagrange che con l'approccio di Newton-Eulero

Dinamica inversa

Assegnate le accelerazioni $\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$, le velocità $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ e le posizioni $\boldsymbol{q}(t)$ determinare le coppie ai giunti $\tau(t)$ necessarie alla generazione del movimento.

- Problema la cui soluzione è utile per la **pianificazione della traiettoria** e per il **controllo** basato sul modello.
- Si può risolvere efficientemente con l'approccio di Newton-Eulero

Sistema dinamico

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})=\tau$$

Dal punto di vista della teoria dei sistemi, il manipolatore costituisce un sistema dinamico di ordine $2n$. Definite infatti le variabili di stato:

$$\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{q}\in\Re^n,\quad \boldsymbol{z}_2=\dot{\boldsymbol{q}}\in\Re^n$$

e le variabili di ingresso:

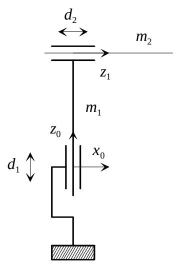
$$\boldsymbol{u}=\tau\in\Re^n$$

il sistema è composto dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}_1=\boldsymbol{z}_2\\ \dot{\boldsymbol{z}}_2=-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{z}_1)^{-1}\left(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2)\boldsymbol{z}_2+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_1)\right)+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{z}_1)^{-1}\boldsymbol{u}\end{cases}$$

Si osservi che in corrispondenza di un ingresso costante, lo stato di equilibrio si caratterizza come segue: $\begin{cases}\boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{z}}_1)=\bar{\boldsymbol{u}}\\ \bar{\boldsymbol{z}}_2=\boldsymbol{0}\end{cases}$

Manipolatore cartesiano a due bracci



Consideriamo un manipolatore cartesiano a due bracci, caratterizzati dalle masse m_1 e m_2.
Il vettore delle coordinate generalizzate risulta:

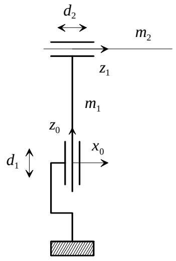
$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix}d_1\\ d_2\end{bmatrix}$$

I baricentri dei due bracci hanno posizioni (a meno di costanti) e velocità date in terna base da:

$$\boldsymbol{p}_{c1}=\begin{bmatrix}0\\0\\d_1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_{c2}=\begin{bmatrix}d_2\\0\\d_1\end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{p}}_{c1}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{d}_1\end{bmatrix},\quad \dot{\boldsymbol{p}}_{c2}=\begin{bmatrix}\dot{d}_2\\0\\\dot{d}_1\end{bmatrix}$$

Il vettore dell'accelerazione di gravità è: $\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix}$

Manipolatore cartesiano a due bracci



Calcoliamo l'energia cinetica, tenendo conto che la velocità angolare di entrambi i bracci è nulla:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{p}}_{c1}{}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{c1} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{p}}_{c2}{}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{c2} =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{d}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{d}_1{}^2 + \dot{d}_2{}^2 \right)$$

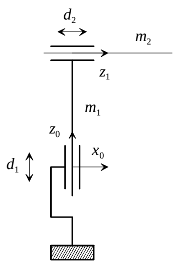
Per quanto riguarda invece l'energia potenziale gravitazionale, definita a meno di una costante, si ha:

$$U = -m_1 \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{c1} - m_2 \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{c2} = m_1 g d_1 + m_2 g d_1$$

La lagrangiana è quindi:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{d}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2{}^2 - (m_1 + m_2) g d_1$$

Manipolatore cartesiano a due bracci



Le equazioni di Lagrange sono le seguenti:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_1} - \frac{\partial L}{\partial d_1} = f_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_2} - \frac{\partial L}{\partial d_2} = f_2$$

f_1 e f_2: forze agenti lungo le coordinate generalizzate

Risulta quindi:

$$(m_1 + m_2)\ddot{d}_1 + (m_1 + m_2) g = f_1$$

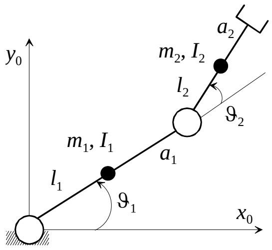
$$m_2 \ddot{d}_2 = f_2$$

In termini vettoriali:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$

Manipolatore planare a due bracci



Consideriamo un manipolatore planare a due bracci, caratterizzati dalle masse m_1 e m_2 e dalle lunghezze a_1 e a_2.
Il vettore delle coordinate generalizzate risulta:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$$

I baricentri dei due bracci hanno posizioni e velocità date in terna base da:

$$\boldsymbol{p}_{c1} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{c2} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{c1} = \begin{bmatrix} -\dot\vartheta_1 l_1 s_1 \\ \dot\vartheta_1 l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{p}}_{c2} = \begin{bmatrix} -\dot\vartheta_1 a_1 s_1 - l_2\left(\dot\vartheta_1 + \dot\vartheta_2\right) s_{12} \\ \dot\vartheta_1 a_1 c_1 + l_2\left(\dot\vartheta_1 + \dot\vartheta_2\right) c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

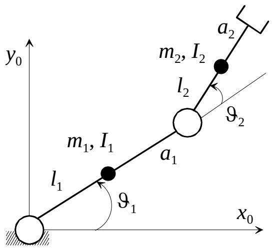
dove:

$$l_1 = \frac{a_1}{2}, \quad l_2 = \frac{a_2}{2}$$

Il vettore dell'accele-razione di gravità è:

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a due bracci



Per calcolare l'energia cinetica, introduciamo i momenti di inerzia delle due aste rispetto ad assi passanti per i rispettivi baricentri e paralleli a $\boldsymbol{z}_0$:

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 a_1^2, \quad I_2 = \frac{1}{12} m_2 a_2^2$$

Utilizzando per entrambe le aste il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{p}}_{c1}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{c1} + \frac{1}{2} I_1 \omega_{z1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{p}}_{c2}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{c2} + \frac{1}{2} I_2 \omega_{z2}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\vartheta_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot\vartheta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot\vartheta_1^2 a_1^2 + \left(\dot\vartheta_1 + \dot\vartheta_2\right)^2 l_2^2 + 2\dot\vartheta_1\left(\dot\vartheta_1 + \dot\vartheta_2\right) a_1 l_2 c_2 \right] + \frac{1}{2} I_2 \left(\dot\vartheta_1 + \dot\vartheta_2\right)^2$$

Per quanto riguarda invece l'energia potenziale gravitazionale, definita a meno di una costante, si ha:

$$U = -m_1 \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{c1} - m_2 \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{p}_{c2} = m_1 g l_1 s_1 + m_2 g \left(a_1 s_1 + l_2 s_{12}\right)$$

Manipolatore planare a due bracci

Le equazioni di Lagrange sono le seguenti:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_i} = \tau_i, \quad i = 1{,}2 \qquad \tau_i : \text{coppie agenti lungo le coordinate generalizzate}$$

Prima equazione:

$$\left(m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 a_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 a_1 l_2 c_2 + I_2\right)\ddot{\vartheta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 + I_2\right)\ddot{\vartheta}_2 +$$
$$- 2 m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_2^2 +$$
$$+ m_1 g l_1 c_1 + m_2 g a_1 c_1 + m_2 g l_2 c_{12} = \tau_1$$

Seconda equazione:

$$\left(m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 + I_2\right)\ddot{\vartheta}_1 + \left(m_2 l_2^2 + I_2\right)\ddot{\vartheta}_2 +$$
$$+ m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1^{\,2} +$$
$$+ m_2 g l_2 c_{12} = \tau_2$$

Manipolatore planare a due bracci

Le equazioni in forma vettoriale si scrivono:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + I_1 + m_2 a_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 a_1 l_2 c_2 + I_2 & m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 + I_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 c_2 + I_2 & m_2 l_2^2 + I_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})} \begin{bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_2 & -m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_2 \\ m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 a_1) g c_1 + m_2 g l_2 c_{12} \\ m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Si osservi che l'espressione della matrice $\boldsymbol{C}$ non è univoca. Si potrebbe anche prendere, ad esempio:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_2 & -m_2 a_1 l_2 s_2 \left(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2\right) \\ m_2 a_1 l_2 s_2 \dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$