



Controllo dei robot

Controllo del moto

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Controllo del moto



Parte I

Attuatori, riduttori e sensori

Premessa



Cominciamo la discussione sul controllo del moto nei manipolatori robotici con un inquadramento sugli attuatori, gli organi di riduzione del moto e i principali sistemi per la misura di posizione utilizzati nella robotica industriale.

Per quanto riguarda gli attuatori, i principali requisiti che si pongono nell'utilizzo in ambito robotico sono i seguenti:

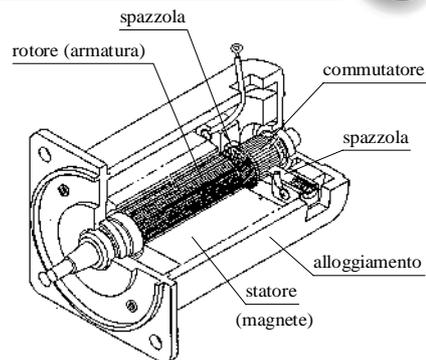
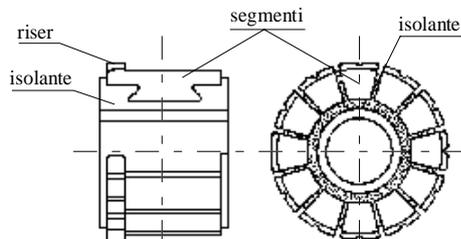
- bassa inerzia ed elevato valore del rapporto potenza/peso
- possibilità di sovraccarico
- capacità di sviluppare elevate accelerazioni
- elevato campo di variazione di velocità
- elevata precisione di posizionamento

La soluzione tecnologica che ottimizza il soddisfacimento di questi requisiti è costituita dai **motori elettrici a magneti permanenti**, a corrente continua (a spazzole e collettore) oppure a commutazione elettronica (brushless).

Motore a corrente continua



È costituito da un cilindro mobile di materiale ferromagnetico (**rotore**) su cui sono disposte le spire a formare un circuito chiuso (**armatura**) e da una parte fissa (**statore**) su cui sono alloggiati i magneti permanenti.



← Commutatore

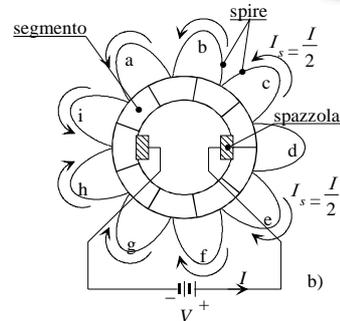
Motore a corrente continua



Le spire sono connesse ad anello l'una all'altra. Quando il circuito di armatura è alimentato, la corrente d'armatura viene ripartita in due circuiti.

Con la rotazione del rotore, cambiano i segmenti del collettore a contatto con le spazzole e quindi cambiano le spire che formano i due circuiti.

Studiando il motore con i principi dell'elettromagnetismo si conclude che:



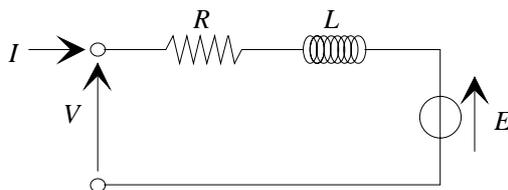
- Su ciascuna spira viene esercitata una forza tangente alla circonferenza esterna del rotore
- Complessivamente queste forze equivalgono ad una **coppia** esercitata sul motore, proporzionale alla corrente circolante nel circuito d'armatura
- Se il rotore è in moto, si induce nel circuito d'armatura una **forza controlettromotrice**, proporzionale alla velocità angolare del rotore.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [5]

Modello dinamico



Nel suo complesso, la dinamica elettrica del motore a corrente continua è riconducibile al seguente circuito:



$$V = RI + L \frac{dI}{dt} + E$$

$$E = K_e \omega$$

$$\tau_m = K_t I$$

V : tensione applicata alle spazzole

R : resistenza del circuito d'armatura

L : induttanza del circuito d'armatura

La velocità angolare ω non è una variabile esogena in quanto dipende dalla coppia τ_m e dalla dinamica meccanica del motore.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [6]

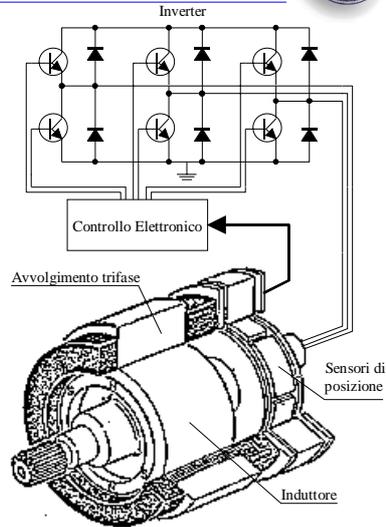
Il motore brushless



È costituito da un rotore su cui sono alloggiati i magneti permanenti e da uno statore su cui sono disposti tre avvolgimenti (per motore trifase).

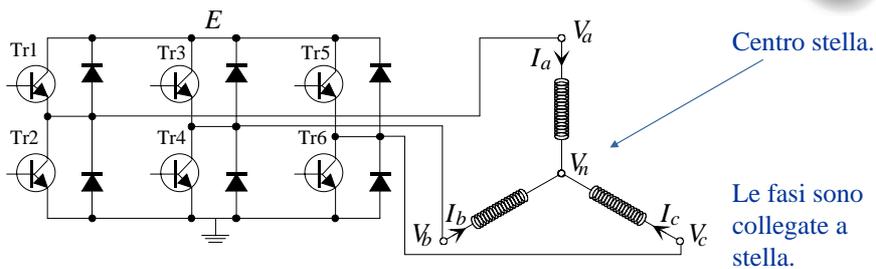
La commutazione meccanica del sistema spazzole-collettore è sostituita dalla **commutazione elettronica** della corrente negli avvolgimenti di statore, affidata ad un *inverter*.

Non entriamo nei dettagli del meccanismo di commutazione, osservando solo che per eseguire la commutazione sulla base della posizione del rotore è necessario un **sensore** di posizione angolare.



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [7]

Dinamica elettrica



$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_n \\ V_n \\ V_n \end{bmatrix}$$

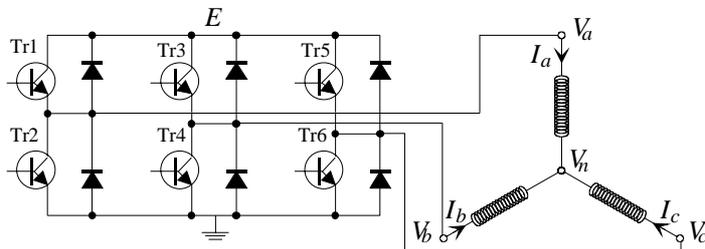
$$I_a + I_b + I_c = 0$$

L: auto induttanze
M: mutue induttanze

Tensione del centro stella.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [8]

Dinamica elettrica: macchina isotropa



$$L_i = \text{cost.}$$

$$M_{ij} = \text{cost.}$$

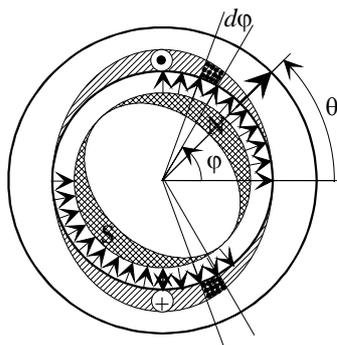
$$L = L_i - M_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_n \\ V_n \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [9]

Motore brushless sinusoidale



La forza controelettrica è legata alla velocità angolare da una **“funzione di forma”** che dipende dall'angolo θ

$$E_i = \omega K_i(\theta)$$

In questo motore, grazie ad un'opportuna configurazione dei magneti permanenti, è possibile fare in modo che la funzione di forma abbia una dipendenza sinusoidale dall'angolo θ :

$$E = \omega K \sin(\theta)$$

(per una coppia di poli).

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [10]

Calcolo della coppia



La potenza meccanica uguaglia la potenza elettrica:

$$P_e = E_a I_a + E_b I_b + E_c I_c$$

$$P_m = \tau_m \omega$$

$$P_e = P_m \quad \Rightarrow \quad \tau_m = \frac{E_a I_a + E_b I_b + E_c I_c}{\omega}$$

Come imporre che la coppia sia indipendente dall'angolo θ (come in un motore a corrente continua)?

Si deve fare in modo che nelle fasi circolino correnti dipendenti in modo opportuno dall'angolo.

Calcolo della coppia



Siano:

p : numero di coppie polari

$\alpha = p\theta$: angolo elettrico

Profili di f.e.m. (imposti con il progetto meccanico-elettrico):

$$K_a(\theta) = pK \sin(p\theta) = pK \sin(\alpha)$$

$$K_b(\theta) = pK \sin(p\theta - 2\pi/3) = pK \sin(\alpha - 2\pi/3)$$

$$K_c(\theta) = pK \sin(p\theta - 4\pi/3) = pK \sin(\alpha - 4\pi/3)$$

Correnti (imposte con l'inverter):

$$I_a = I_a(\theta) = I \sin(\alpha)$$

$$I_b = I_b(\theta) = I \sin(\alpha - 2\pi/3)$$

$$I_c = I_c(\theta) = I \sin(\alpha - 4\pi/3)$$

$$\text{Coppia: } \tau_m = \begin{cases} pKI \sin^2(\alpha) + \\ + pKI \sin^2(\alpha - 2\pi/3) + \\ + pKI \sin^2(\alpha - 4\pi/3) = \\ = \frac{3}{2} pKI = K_t I \end{cases}$$

Ripple di coppia

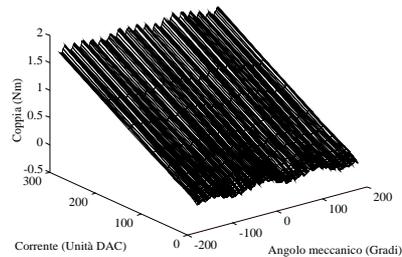


$$\tau_m = K_t I$$

Idealmente la coppia non dipende dall'angolo.

In realtà, a causa di imperfezioni nel progetto del motore e dell'inverter, la coppia ha sovrapposta una ondulazione (**ripple**) dipendente dall'angolo:

Il ripple può eccitare le risonanze del robot.



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [13]

Funzione dell'organo di trasmissione



La funzione di un organo di trasmissione (riduttore) è di rendere compatibili velocità e coppie dei motori e dei carichi movimentati.

Si caratterizza per il **rapporto di trasmissione**:

$$\dot{q}_l = \frac{1}{n} \dot{q}_m$$

La velocità del carico è molto ridotta rispetto a quella del motore

$$\tau_{ll} = n \tau_{lm}$$

La coppia sull'asse del carico è molto maggiore rispetto a quella sull'asse motore

$$|n| \gg 1$$

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [14]

Harmonic Drive

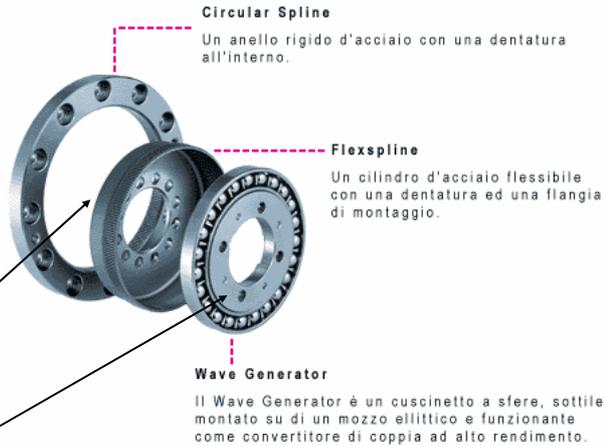


Gli harmonic drive sono riduttori particolari, molto usati per le doti di compattezza e per il gioco ridotto.

Sono composti da tre parti:

solidale al carico

solidale al motore (rotore)



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [15]

HD: principio di funzionamento



La corona flessibile ha due denti in meno della corona circolare. È tenuta in forma ellittica dal generatore di deformazione.

Ruotando il generatore di deformazione, la zona d'ingranamento dei denti si muove insieme all'asse maggiore dell'ellisse. Quando il generatore di deformazione avrà compiuto 180°, la corona flessibile sarà rimasta indietro di un dente rispetto alla corona circolare. Ogni giro completo del generatore di deformazione muove la corona flessibile indietro di due denti rispetto alla corona circolare.

Se d è il numero totale di denti della corona flessibile, il **rapporto di riduzione** vale:

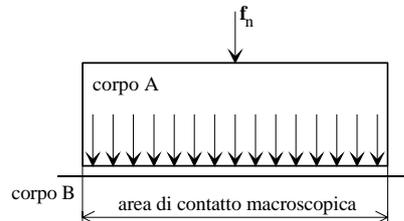
$$n = -\frac{360^\circ}{\frac{2}{d} \cdot 360^\circ} = -\frac{d}{2}$$

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [16]

L'attrito



L'attrito si manifesta alla superficie di contatto tra due corpi, opponendosi al moto relativo:

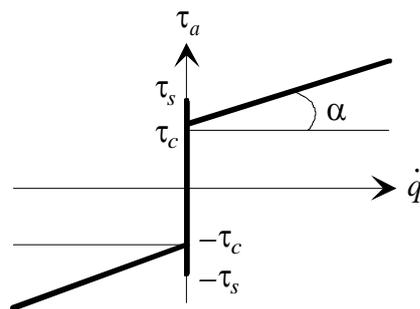


Per studi in cui non è rilevante il comportamento a velocità nulla, si può adottare un modello in cui la forza (o coppia) d'attrito è proporzionale alla velocità.

Il modello classico discontinuo



Il modello classico discontinuo distingue tra le situazioni di velocità nulla (quiete) e velocità diversa da zero:



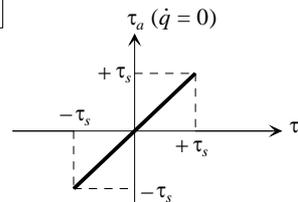
τ_s : coppia di primo distacco

τ_c : coppia di Coulomb

Per $\dot{q} \neq 0$:

$$\tau_a = D_m \dot{q} + \tau_c \text{sign}(\dot{q}) \quad D_m = \tan(\alpha)$$

Per $\dot{q} = 0$:



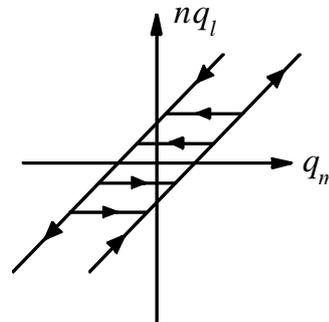
τ' : coppia attiva

Il gioco



Se si inverte il senso di rotazione del motore, per un angolo di rotazione corrispondente al **gioco**, l'angolo del carico non cambia.

Il gioco nasce da imprecisioni di accoppiamento tra gli ingranaggi: può essere ridotto precaricandoli.



In un **Harmonic Drive** il gioco è di 0.15° lato carico ed è dovuto principalmente al cuscinetto.



“Inertia matching”



Come scegliere il rapporto di trasmissione, note le caratteristiche inerziali di motore e carico?

Trascurando gli attriti e l'eventuale coppia esterna sul carico, si ha:

$$\tau_m = J_m \dot{\omega}_m + J_l \frac{\dot{\omega}_l}{n} = nJ_m \dot{\omega}_l + J_l \frac{\dot{\omega}_l}{n}$$

Il rapporto tra accelerazione del carico e coppia motrice è quindi:

$$\frac{\dot{\omega}_l}{\tau_m} = \frac{1}{nJ_m + \frac{J_l}{n}}$$

Questo rapporto assume **valore massimo** quando:

$$n = \sqrt{\frac{J_l}{J_m}} \Rightarrow J_m = \frac{J_l}{n^2}$$

condizione di **“inertia matching”**: il momento di inerzia lato motore e quello del carico riportati all'asse motore sono uguali.

Classificazioni dei sistemi di misura



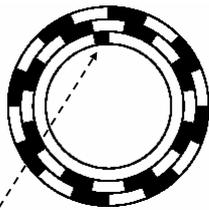
Metodo di misura

- ◆ incrementale
- ◆ assoluto

Principio fisico

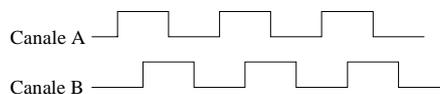
- ◆ fotoelettrico
- ◆ induttivo
- ◆ (magnetico)
- ◆ (interferenziale)

Encoder incrementale



Tacca per la definizione di uno zero meccanico assoluto.

Si basa sul principio fotoelettrico.
È costituito da un disco con due tracce in cui sono disposte alternativamente zone trasparenti ed opache.



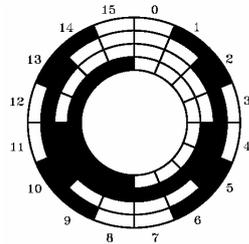
La presenza delle due tracce consente di rilevare anche il verso della rotazione.

N : numero passi (numero di zone chiare/scure per giro). Poiché i due segnali sono sfasati di $1/4$ di passo:

$$\text{Risoluzione: } 360^\circ/(4N)$$



Encoder assoluto



È un disco con aree trasparenti ed opache, disposte su corone circolari concentriche. Per una parola di N bit si hanno N corone circolari.

Risoluzione: $360^\circ/2^N$

Per evitare ambiguità di lettura si utilizzano codici binari a variazione singola (codice Gray).

Per le applicazioni robotiche sono richieste almeno 12 tracce (risoluzione di $360^\circ/4096$).

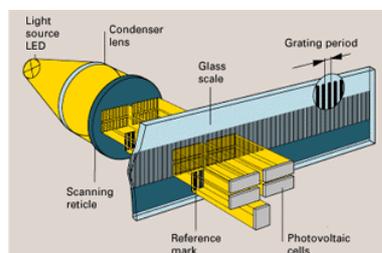
#	Codice	#	Codice
0	0000	8	1100
1	0001	9	1101
2	0011	10	1111
3	0010	11	1110
4	0110	12	1010
5	0111	13	1011
6	0101	14	1001
7	0100	15	1000



Strumenti fotoelettrici avanzati

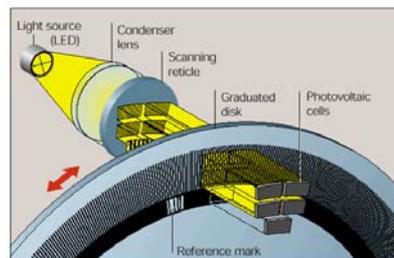
Sistemi per trasmissione della luce, basati sull'**effetto di Moiré**: se si fanno scorrere parallelamente e uno sull'altro due reticoli di divisione, si rilevano oscillazioni periodiche di luminosità, che si possono convertire in segnali elettrici.

Riga ottica



Disegni tratti da: <http://www.heidenhain.com>

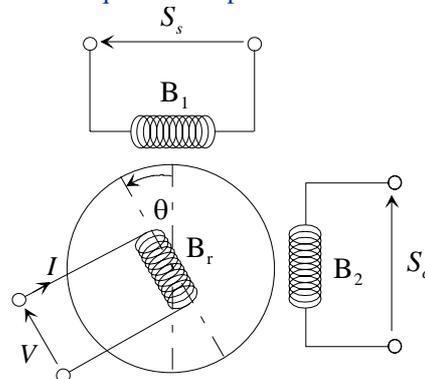
Encoder rotativo



Sistemi induttivi assoluti: il resolver



Su un rotore è disposto l'avvolgimento di eccitazione, sullo statore sono disposti due avvolgimenti in quadratura spaziale



Gli avvolgimenti sono realizzati in modo da ottenere le seguenti mutue induttanze:

$$M_s(\theta) = M \sin \theta$$

$$M_c(\theta) = M \cos \theta$$

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [25]

Sistemi induttivi assoluti: il resolver



Si eccita il resolver con una tensione alternata, che induce le seguenti tensioni sugli avvolgimenti di statore:

$$V(t) = \bar{V} \cos \omega t \Rightarrow \begin{aligned} S_s(\theta, \dot{\theta}, t) &= \frac{d(M_s(\theta)I)}{dt} \\ S_c(\theta, \dot{\theta}, t) &= \frac{d(M_c(\theta)I)}{dt} \end{aligned}$$

Supponendo nulla la resistenza del circuito d'eccitazione ($V=L di/dt$):

$$\begin{aligned} S_s(\theta, \dot{\theta}, t) &= A \sin \theta \cos \omega t + \left(\dot{\theta} / \omega\right) A \cos \theta \sin \omega t \\ S_c(\theta, \dot{\theta}, t) &= A \cos \theta \cos \omega t - \left(\dot{\theta} / \omega\right) A \sin \theta \sin \omega t \end{aligned}$$

con $A = \bar{V}M/L$. Scegliendo ω elevato: $\dot{\theta}/\omega \cong 0$.

Rilevando le tensioni S_s e S_c , con un opportuno circuito è possibile estrarre segnali rappresentativi del seno e del coseno di θ e quindi ricavare la misura dell'angolo stesso.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [26]

Controllo del moto



Parte II

Controllo decentralizzato

Modello decentralizzato



Riprendiamo il modello dinamico del manipolatore:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

Supponiamo che su ciascun giunto del manipolatore agisca un motore, il cui modello meccanico è dato dall'equazione:

$$J_{mi}\ddot{q}_{mi} + D_{mi}\dot{q}_{mi} = \tau_{mi} - \tau_{lmi} \quad i = 1, \dots, n$$

dove J_{mi} e D_{mi} sono momento d'inerzia e coefficiente d'attrito viscoso del motore, mentre τ_{lmi} è la coppia di carico per il motore i , pari a:

$$\tau_{lmi} = \tau_i / n_i$$

Nell'ipotesi di rigidità degli organi di trasmissione si ha anche:

$$q_{mi} = n_i q_i$$

Modello decentralizzato



Scomponiamo la matrice di inerzia nella somma di un termine **diagonale e costante** (inerzie “medie”) e un termine residuo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{B}} + \Delta\mathbf{B}(\mathbf{q})$$

Posto:

$$\mathbf{J}_m = \text{diag}\{J_{mi}\}, \quad \mathbf{D}_m = \text{diag}\{D_{mi}\}, \quad \mathbf{N} = \text{diag}\{n_i\}, \quad \bar{\mathbf{B}}_r = \mathbf{N}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{N}^{-1}$$

riorganizzando le equazioni si trova:

$$(\mathbf{J}_m + \bar{\mathbf{B}}_r)\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{D}_m\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{d} = \boldsymbol{\tau}_m$$

con:

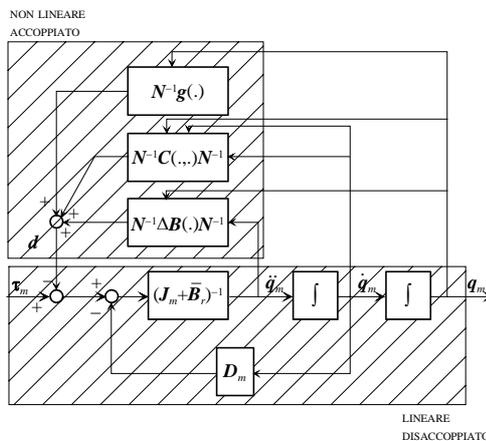
$$\mathbf{d} = \mathbf{N}^{-1}\Delta\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{N}^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{N}^{-1}\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q})$$

↑
inerzie medie scalate per il quadrato dei rapporti di trasmissione

Modello decentralizzato



Le equazioni prima ricavate si lasciano interpretare come le equazioni di un sistema lineare completamente disaccoppiato, soggetto ad un “disturbo” derivante dai termini non lineari ed accoppiati del modello dinamico del robot:



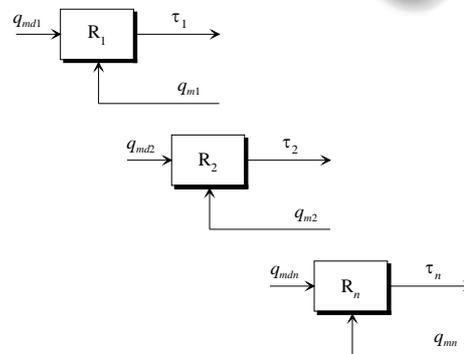
Più elevati sono i rapporti di trasmissione, minore è la rilevanza del termine di disturbo.

Controllo indipendente dei giunti



Il modello decentralizzato della dinamica del robot è alla base del **controllo indipendente dei giunti**, soluzione largamente adottata nei controllori robotici industriali.

Lo schema prevede che ciascuna coordinata di giunto venga controllata in un **anello di controllo monovariabile**, ignorando gli effetti di accoppiamento dinamico indotti dalla meccanica del robot, che vengono trattati come disturbi.

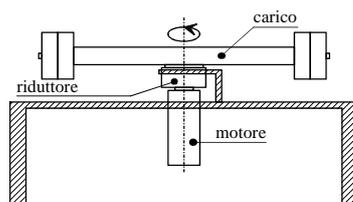


I singoli problemi di controllo sono assimilabili a quelli del **controllo di servomeccanismi**.

Il metodo si affida pesantemente all'**effetto disaccoppiante degli alti rapporti di riduzione delle trasmissioni** adottate nella robotica. Senza questo effetto, trascurare la variabilità dell'inerzia del carico e gli effetti di accoppiamento meccanico con gli altri giunti sarebbe poco giustificato

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [31]

Il servomeccanismo



Come è noto, nei suoi tratti essenziali un servomeccanismo di posizione è costituito da un motore, un riduttore ed un carico.



Il problema di controllo si pone nei termini di governare il moto del carico, modulando opportunamente la coppia erogata dal motore.

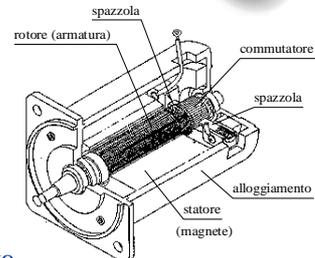
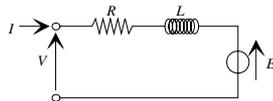
Possono presentarsi diversi scenari per quanto riguarda la **sensorizzazione** del sistema: si può infatti disporre, per la soluzione del problema di controllo, di misure di posizione o velocità del motore e/o di misure della posizione del carico.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [32]

La dinamica elettrica



Supponiamo di adottare un motore a corrente continua, il cui circuito elettrico è, come già osservato, il seguente:



Il motore, caratterizzato meccanicamente da un momento d'inerzia J_m , eroga una coppia τ_m proporzionale alla corrente I nel circuito d'armatura, conseguente all'imposizione di una tensione V . Su questo circuito, avente resistenza R ed induttanza L , agisce anche la forza controelettromotrice E , proporzionale alla velocità angolare ω_m del motore.

N.B. Le considerazioni che faremo saranno in realtà valide anche per un motore brushless a magneti permanenti, il cui modello elettrico è assimilabile, per mezzo di opportune trasformazioni di variabili, a quello del motore a corrente continua.

La dinamica elettrica



Il sistema è retto dalle seguenti equazioni:

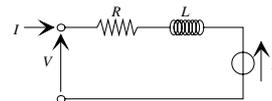
$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + E(t)$$

$$E(t) = K\omega_m(t)$$

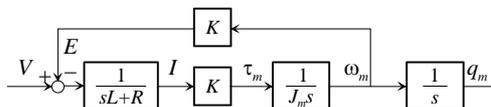
$$\tau(t) = KI(t)$$

$$\tau(t) = J_m\dot{\omega}_m(t)$$

$$\dot{q}_m(t) = \omega_m(t)$$



Traducibili nello schema a blocchi:

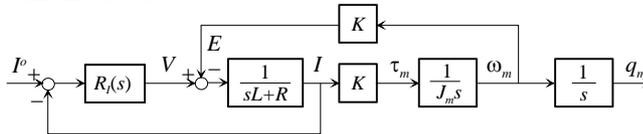


Si osservi che la forza controelettromotrice accoppia la dinamica elettrica con la dinamica meccanica.

Il controllo di corrente



Disponendo della misura di corrente, si può chiudere un anello di controllo sulla corrente stessa:



Vista la dinamica veloce legata ai transistori elettrici si potrà progettare $R_f(s)$ per ottenere una banda passante molto ampia, dell'ordine delle migliaia di rad/s .

Nel progetto del regolatore di corrente si potrà inoltre assumere la forza contro elettromotrice come un disturbo di bassa frequenza.

Una volta chiuso l'anello di controllo della corrente, questo potrà ritenersi praticamente istantaneo ai fini del progetto del controllore di posizione esterno:

$$\tau_m(t) = KI(t) \approx KI^o(t)$$

Potremo quindi assumere come **variabile di controllo** per il controllo posizione/velocità direttamente la **coppia motrice** τ_m

L'approssimazione rigida (1/2)

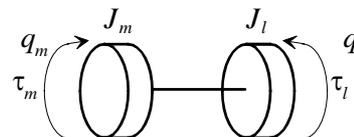


Un primo modo di affrontare il problema di controllo del moto consiste nell'assumere l'insieme motore, riduttore e carico come un sistema complessivamente **rigido**. In questo caso le equazioni del sistema sono le seguenti:

motore $J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm}$

carico $J_l \ddot{q}_l = n\tau_{lm} - \tau_l$

trasmissione $q_m = nq_l$



(D_m : coefficiente di attrito viscoso motore, J_l : momento di inerzia carico, n : rapporto di trasmissione, τ_{lm} : coppia trasmessa lato motore, τ_l : coppia esterna lato carico).

Possiamo eliminare q_l e τ_{lm} dalle equazioni, ottenendo:

$$(J_m + J_{lr}) \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lr}$$

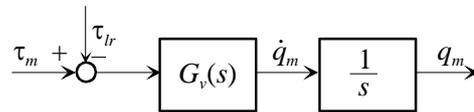
con:

$$J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad \tau_{lr} = \frac{\tau_l}{n}$$

L'approssimazione rigida (2/2)



Il sistema rigido si può quindi descrivere in termini di funzione di trasferimento:



con:

$$G_v(s) = \frac{1}{D_m + s(J_m + J_{lr})}$$

Se il coefficiente di attrito D_m è trascurabile (caso più sfavorevole, perché l'attrito dà un contributo stabilizzante), si ha:

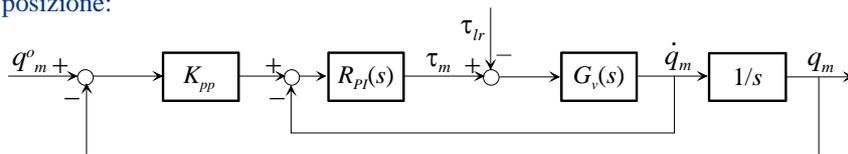
$$G_v(s) = \frac{\mu}{s}$$

$$\mu = \frac{1}{J_m + J_{lr}}$$

Il controllo P/PI



Chiediamo un controllore PI sulla velocità, ed un controllore proporzionale sulla posizione:

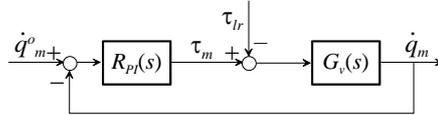


Lo schema prevede di disporre di due misure, di posizione e velocità, indipendenti. Tipicamente la misura di velocità è fornita da una dinamo tachimetrica.

Si tratta di uno schema di **controllo in cascata**: si progetta dapprima l'anello interno di velocità su banda ampia, in modo da fornire anche una buona reiezione dei disturbi.

L'anello esterno, di posizione, si progetta su una banda più ristretta.

Progetto del regolatore PI di velocità

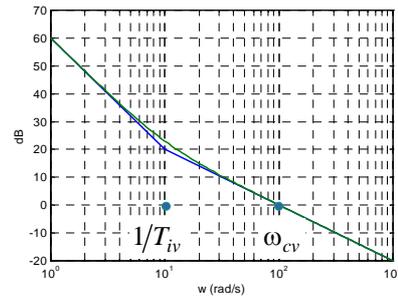


$$R_{PI}(s) = K_{pv} \left(1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Funzione d'anello:

$$L_v(s) = R_{PI}(s)G_v(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

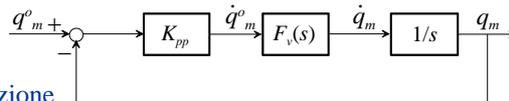
Se T_{iv} è sufficientemente grande, ossia se lo zero del PI è sufficientemente in bassa frequenza, la pulsazione critica è ben approssimata prendendo l'approssimazione di alta frequenza di L :



$$L_v(s) \approx \frac{\omega_{cv}}{s}, \quad \omega_{cv} = K_{pv}\mu$$

$$\frac{1}{T_{iv}} = (0.1 \div 0.3)\omega_{cv} \leftarrow \text{Posizionamento dello zero del PI.}$$

Progetto del regolatore P di posizione

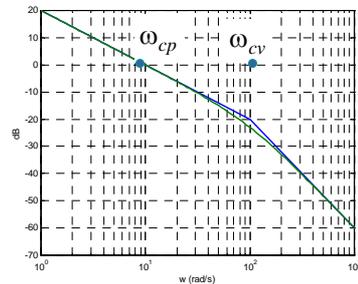


Il regolatore dell'anello di posizione "vede" l'anello chiuso di velocità, di funzione di trasferimento:

$$F_v(s) \approx \frac{1}{1 + s/\omega_{cv}}$$

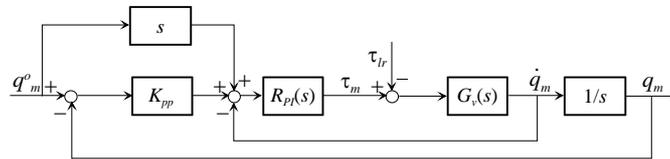
La funzione d'anello è quindi:

$$L_p(s) = K_{pp}F_v(s)\frac{1}{s} = \frac{K_{pp}}{s(1 + s/\omega_{cv})}$$



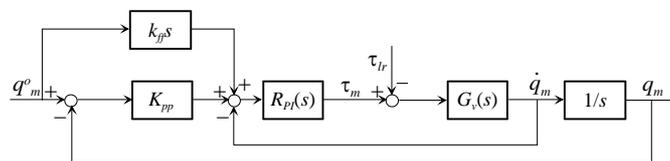
È sufficiente prendere $K_{pp} \ll \omega_{cv}$ per garantire una banda sull'anello di posizione $\omega_{cp} \approx K_{pp}$. L'integratore tra velocità e posizione assicura inoltre la precisione statica a fronte di riferimenti costanti a regime.

Anticipo di velocità



Per rendere la risposta al riferimento di posizione più pronta, è possibile inserire un contributo di feedforward, noto come “anticipo di velocità”: si deriva il riferimento e si somma questo contributo nel nodo sommatore dell’anello di velocità.

Spesso il contributo di feedforward viene pesato da un coefficiente k_{ff} compreso tra 0 e 1:

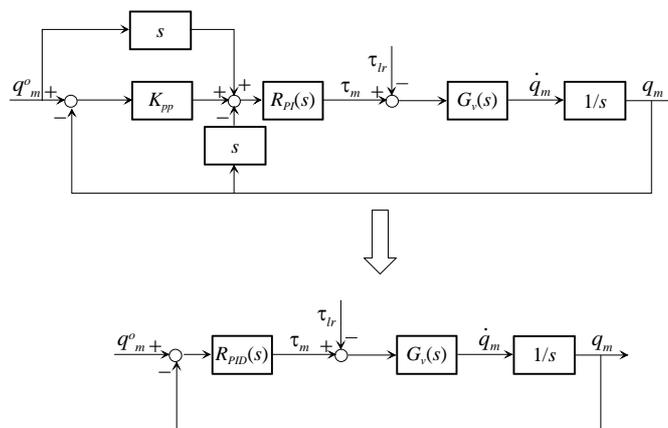


Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [41]

Anticipo di velocità e PID

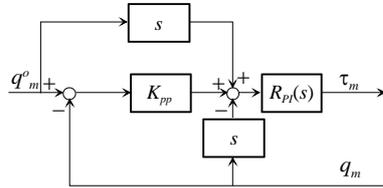


Se si usa un solo sensore sulla posizione motore e la velocità si ottiene differenziando la misura di posizione, si ottiene uno schema di controllo del tutto equivalente ad un regolatore PID:



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [42]

Anticipo di velocità e PID



Risulta:
$$\tau_m(s) = R_{PI}(s)(sq_m^o(s) - sq_m(s) + K_{pp}(q_m^o(s) - q_m(s))) =$$

$$= K_{pv} \left(1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) (s + K_{pp})(q_m^o(s) - q_m(s)) = R_{PID}(s)(q_m^o(s) - q_m(s))$$

$$R_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_p = K_{pv} \left(K_{pp} + \frac{1}{T_{iv}} \right) \\ T_D = \frac{K_{pv}}{K_p} \\ T_I = \frac{K_p T_{iv}}{K_{pp} K_{pv}} \end{array} \right. \quad \text{(formule per il passaggio dal P/PI al PID)}$$

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [43]

Limitazioni del modello rigido



Il modello rigido non mette in evidenza nessun significativo limite di banda. In linea di principio si potrebbe quindi rendere il sistema in anello chiuso arbitrariamente veloce.

All'atto pratico tuttavia emergono chiaramente limitazioni, sotto forma di vibrazioni, rumore, saturazioni, ecc..

Evidentemente il modello rigido non è in grado di spiegare bene come si comporta un servomeccanismo.

Occorre complicare il modello....

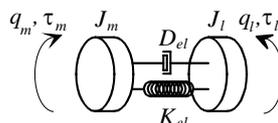
Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [44]

L'approssimazione a due masse

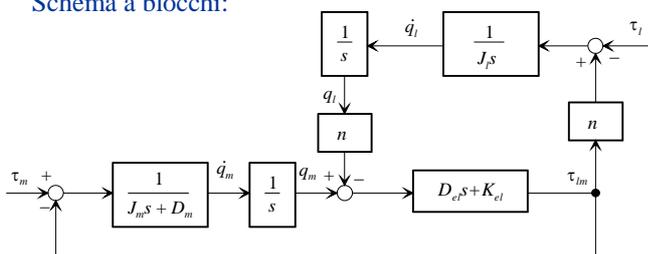


Un secondo modo di affrontare il problema di controllo consiste nell'assumere l'insieme motore, riduttore e carico come un accoppiamento elastico tra due corpi rigidi. In questo caso le equazioni del sistema sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \text{motore} \quad & J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm} \\ \text{carico} \quad & J_l \ddot{q}_l = n \tau_{lm} - \tau_l \\ \text{trasmissione} \quad & \tau_{lm} = K_{el}(q_m - nq_l) + D_{el}(\dot{q}_m - n\dot{q}_l) \end{aligned}$$



Schema a blocchi:

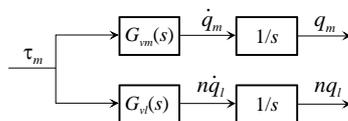


È un sistema di ordine 4 (ci sono 4 variabili di stato)

Un sistema "SITO"



Concentriamoci sulla risposta del sistema al comando di coppia τ_m (poniamo $\tau_l = 0$). Il sistema è interpretabile come sistema ad un ingresso e due uscite (SITO: Single Input Two Outputs).



i numeratori sono diversi

Risolvendo lo schema a blocchi si ottiene:

$$G_{vm}(s) = \frac{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}}{J_{lr}J_ms^3 + (JD_{el} + J_{lr}D_m)s^2 + (JK_{el} + D_mD_{el})s + D_mK_{el}}$$

$$G_{vl}(s) = \frac{D_{el}s + K_{el}}{J_{lr}J_ms^3 + (JD_{el} + J_{lr}D_m)s^2 + (JK_{el} + D_mD_{el})s + D_mK_{el}}$$

$$\left[J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad J = J_{lr} + J_m \right]$$

Parametri notevoli



Poniamo $D_m=0$ ed introduciamo i seguenti parametri:

$$\rho = \frac{J_{lr}}{J_m} \quad (\text{rapporto di inerzia})$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}, \quad \zeta_z = \frac{D_{el}}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{lr} K_{el}}} \quad (\text{puls. naturale e smorzamento degli zeri})$$

$$\omega_p = \sqrt{1+\rho} \omega_z, \quad \zeta_p = \sqrt{1+\rho} \zeta_z \quad (\text{puls. naturale e smorzamento dei poli})$$

Si ottiene:

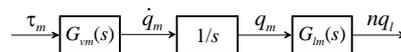
$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}} \quad G_{vl}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

$\left[\mu = \frac{1}{J} \right]$

Natural frequency and locked frequency



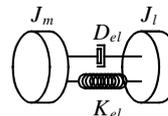
Si può anche rappresentare sinteticamente il sistema con il seguente schema a blocchi:



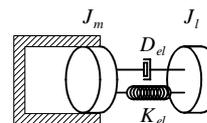
dove:

$$G_{lm}(s) = \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}$$

Il sistema libero oscilla alla pulsazione dei poli di G_{vm} , ossia ω_p ; questa pulsazione è detta **natural frequency**.



Se invece si blocca meccanicamente il motore, il sistema oscilla alla pulsazione dei poli di G_{lm} , ossia ω_z ; questa pulsazione è detta **locked frequency**.

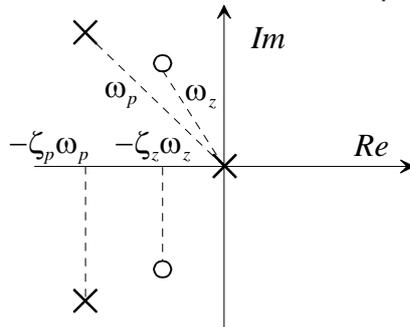


Disposizione di poli e zeri



Come sono messi nel piano complesso poli e zeri di G_{vm} ?

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$



$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{\zeta_p}{\zeta_z} = \sqrt{1 + \rho} > 1$$

↓
I poli sono a
più alta
frequenza e più
smorzati

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [49]

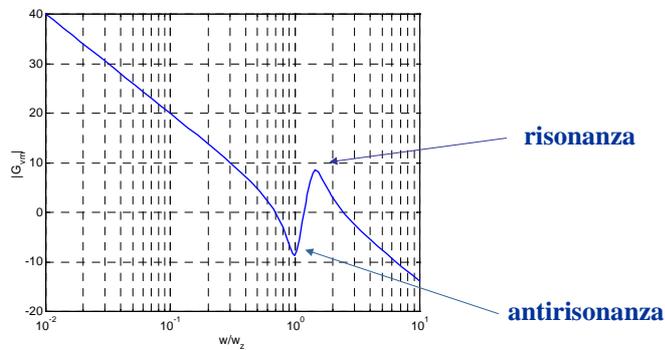
Risposta in frequenza



Cha aspetto assume la risposta in frequenza di G_{vm} ?

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

$\rho=1$
 $\zeta_z=0.1$

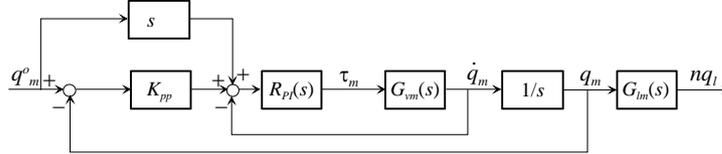


Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [50]

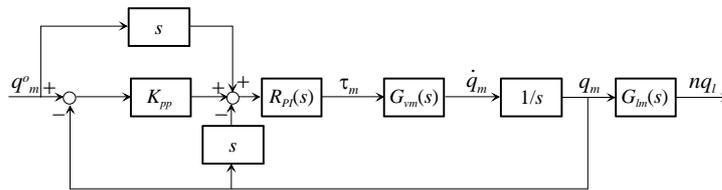
Controllo P/PI sul motore



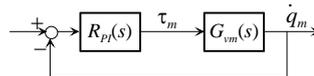
Nella robotica industriale i sensori sono di norma disposti solo dal lato motore. Concentrandoci sulla risposta al riferimento ($\tau_r=0$) si ha:



Nel caso di velocità ottenuta per derivazione della posizione:



Controllo PI di velocità motore



$$R_{PI}(s) = K_{pv} \left(1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Funzione d'anello:

$$L_v(s) = R_{PI}(s)G_{vm}(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}} \frac{1 + 2\frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2\frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

Introduciamo il seguente parametro di progetto adimensionale:

$$\tilde{\omega}_{cv} = \frac{K_{pv}\mu}{\omega_z}$$

È la **pulsazione critica di progetto**, valutata sul modello rigido ($K_{pv}\mu$), **normalizzata** alla pulsazione ω_z .

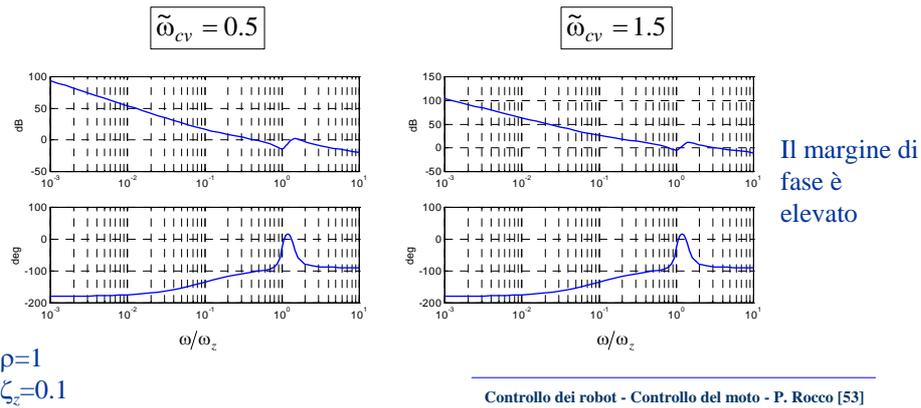
Criterio di Bode



Posizioniamo lo zero del PI una decade prima della pulsazione ω_z .
Introduciamo un altro parametro adimensionale:

$$T_{iv} = \tau_{iv} / \omega_z, \quad \tau_{iv} = 10 \text{ [adim.]}$$

Tracciamo il diagramma di Bode della f.d.t. d'anello:

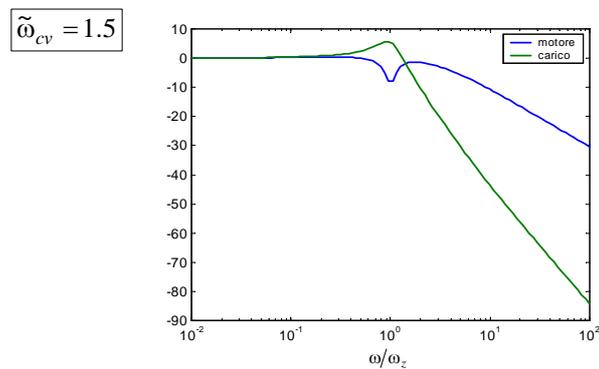


Criterio di Bode



Dal criterio di Bode risulta sempre margine di fase molto elevato. Non emergono limiti significativi...

Guardiamo però la risposta in frequenza *in anello chiuso* lato motore e carico:

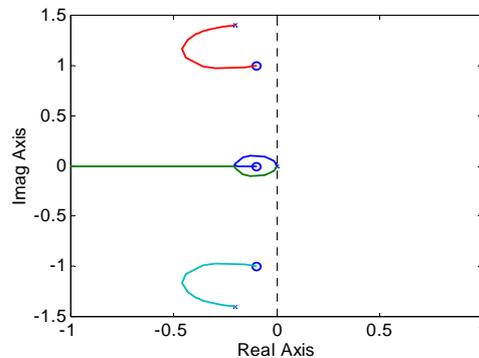


C'è una risonanza lato carico che il criterio di Bode non coglie.

Anello di velocità: luogo delle radici



Tracciamo il luogo delle radici al variare di $\tilde{\omega}_{cv}$:



Ci sono dei poli complessi il cui smorzamento prima aumenta e poi diminuisce.

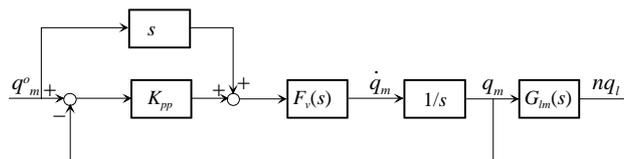
Lo smorzamento massimo si ottiene per:

$$\tilde{\omega}_{cv} \approx 0.7$$

$$(\omega_{cv} \approx 0.7\omega_z)$$

N.B. In questo e nei successivi luoghi, per maggiore generalità, gli assi sono normalizzati rispetto a ω_z

Controllo P di posizione



$$F_v(s) = \frac{L_v(s)}{1 + L_v(s)} \quad \text{Anello chiuso di velocità}$$

La funzione d'anello per il controllo di posizione è: $L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s}$

Introduciamo anche in questo caso un parametro di progetto normalizzato:

$$\gamma_{pp} = \frac{K_{pp}}{\omega_z} \quad \text{È la pulsazione critica di progetto, valutata sul modello rigido } (K_{pp}), \text{ normalizzata alla pulsazione } \omega_z.$$

Anello di posizione: luogo delle radici



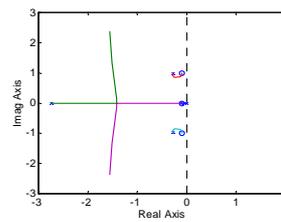
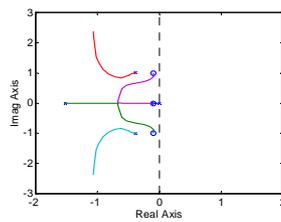
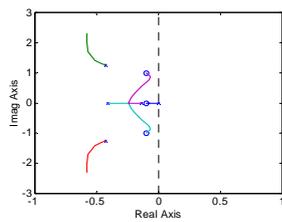
$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s}$$

Tracciamo il luogo delle radici al variare di γ_{pp} , per diversi valori di $\tilde{\omega}_{cv}$:

$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1$$

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

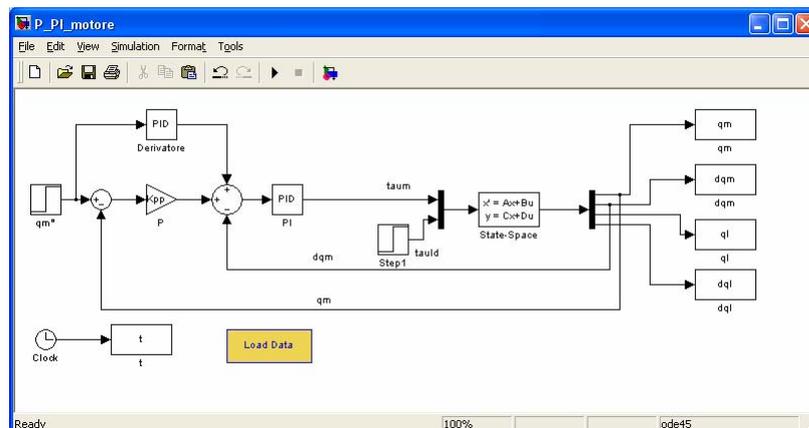


All'aumentare della banda dell'anello di velocità si generano dei poli in anello chiuso poco smorzati.

Simulazioni



Simuliamo in Simulink il sistema completo:

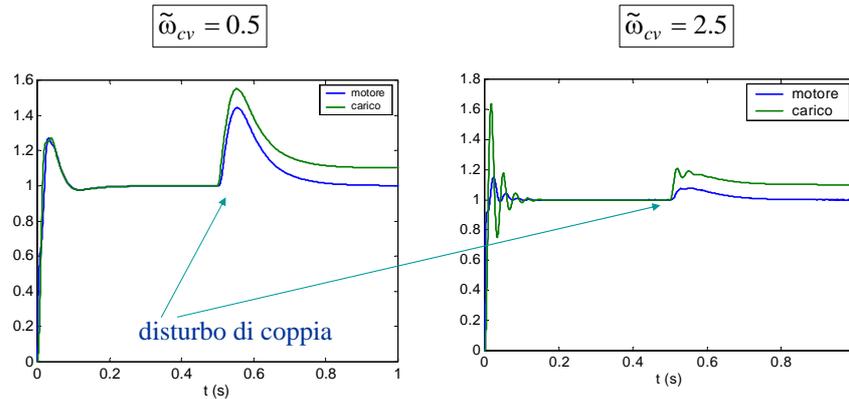


Simulazioni



Sistema: $\omega_z=200, \rho=1, \zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.1$

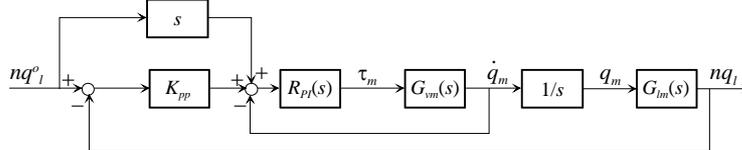


Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [59]

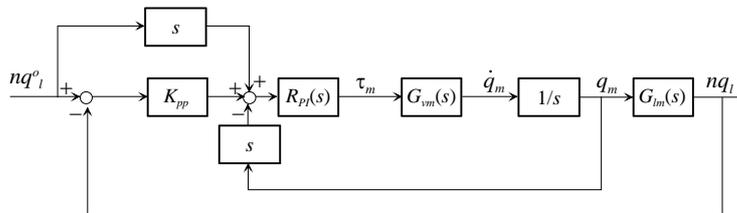
Controllo P sul carico e PI sul motore



In molte altre applicazioni, come nelle macchine utensili, l'anello di posizione è chiuso lato carico:

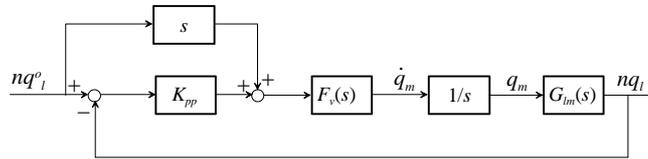


Nel caso di velocità motore ottenuta per derivazione della posizione:



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [60]

Controllo P di posizione



$$F_v(s) = \frac{L_v(s)}{1 + L_v(s)} \quad \text{Anello chiuso di velocità: nulla cambia nel suo progetto}$$

La funzione d'anello per il controllo di posizione è ora:

$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s} G_{lm}(s)$$

$$G_{lm}(s) = \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}$$

Luogo delle radici



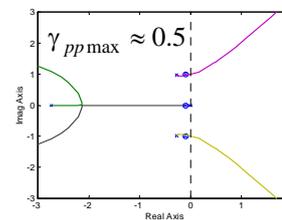
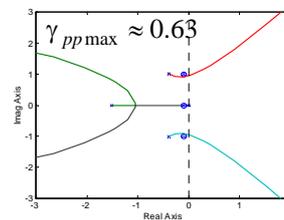
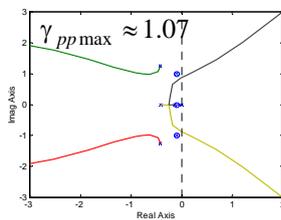
$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s} G_{lm}(s)$$

Tracciamo il luogo delle radici al variare di γ_{pp} , per diversi valori di $\tilde{\omega}_{cv}$:

$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1$$

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

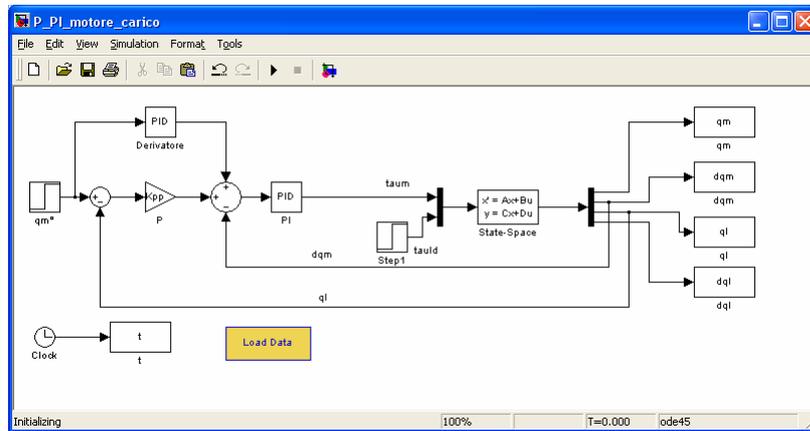


All'aumentare della banda dell'anello di velocità si complica il progetto dell'anello di posizione. Anche per piccoli valori di K_{pp} il sistema può diventare **instabile**

Simulazioni



Simuliamo in Simulink il sistema completo:



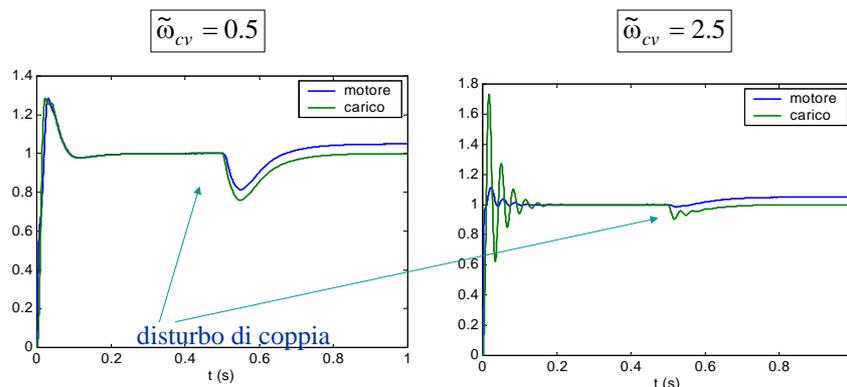
Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [63]

Simulazioni



Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.1$



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [64]

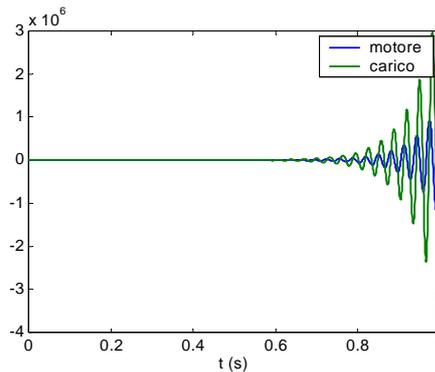
Simulazioni



Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.7$

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$



Il sistema è
instabile

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [65]

Oltre il PID



Anche se il nucleo di un controllore in anello chiuso per il controllo del moto è sempre costituito da un regolatore PID (o P/PI), vi sono altri schemi di controllo che possono completare o sostituire lo schema base.

Alcuni di questi schemi trovano corrente applicazione nei controllori commerciali, altri l'avranno forse in futuro.



Una lista parziale:

- **Filtro notch**
- **Osservatore del disturbo di coppia**
- **Controllo nello spazio di stato**
- **Compensazione del ripple di coppia**
- **Input shaping**

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [66]

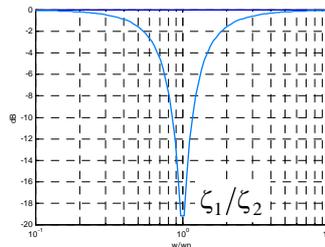
Filtro notch



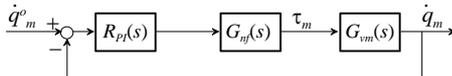
Un filtro notch è un sistema dinamico progettato per cancellare una coppia di poli complessi e coniugati, tipicamente a basso smorzamento, presenti nel sistema sotto controllo. E' quindi caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$G_{nf}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove ω_n è la pulsazione dei poli complessi da cancellare, ζ_1 e ζ_2 sono smorzamenti, il primo piccolo, il secondo grande.



In un sistema di controllo del moto, il filtro notch viene di norma inserito nell'anello di velocità, in serie al regolatore PI:



Filtro notch: problemi



Sebbene il filtro notch possa essere utile per migliorare la risposta al riferimento, ci sono **alcuni problemi** connessi al suo utilizzo:

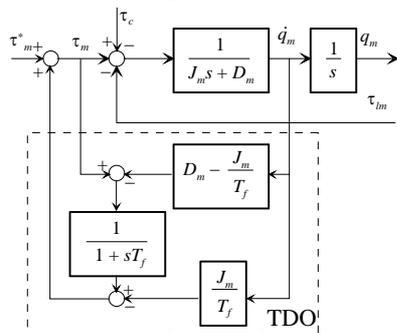
- La frequenza di risonanza sulla quale sintonizzare gli zeri del filtro deve essere conosciuta con buona approssimazione
- I poli poco smorzati del processo cancellati dal filtro rimangono autovalori del sistema in anello chiuso e riemergono come poli di altre funzioni di trasferimento, tipicamente quella dal disturbo di carico all'uscita.
- I metodi di discretizzazione dei regolatori producono una certa distorsione della risposta in frequenza che potrebbe non far coincidere la frequenza effettiva degli zeri del filtro digitale con la frequenza di progetto. Vi sono metodi per ovviare a questo problema (frequency pre-warping)

Osservatore del disturbo di coppia



L'osservatore del disturbo di coppia (TDO: Torque Disturbance Observer) è uno schema molto utilizzato in alcune applicazioni di controllo del moto.

Il metodo stima la coppia di disturbo in ingresso al motore, compensandola con una retroazione positiva sul comando.



La coppia di disturbo è costituita da una coppia esogena τ_c e dalla coppia trasmessa dal carico τ_{lm} .

T_f è una piccola costante di tempo che evita la nascita di anelli algebrici.

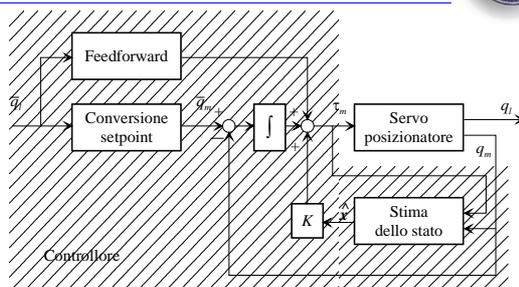
Elaborando lo schema a blocchi si ottiene che il **disturbo di coppia viene attenuato** molto efficacemente, in particolare in bassa frequenza.

Emergono però problemi nel caso di accoppiamento elastico con il carico.

Controllo nello spazio di stato



Assegnamento degli autovalori con stima dello stato.



Da progettare:

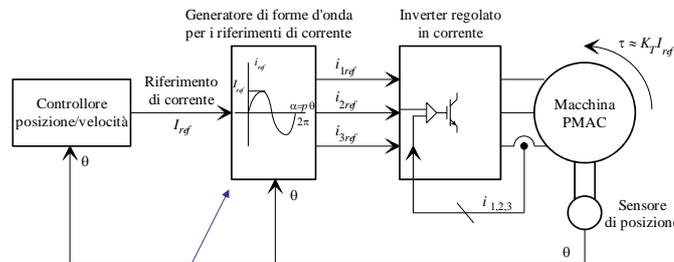
- Azione integrale
- Legge di controllo ($u = k\hat{x}$)
- Stima dello stato
- Azioni in anello aperto

Potenzialmente è il metodo più efficace, ma ci sono problemi di carico computazionale e di robustezza.

Compensazione del ripple di coppia



La coppia generata da un motore brushless è affetta da un ripple



Si modificano le forme d'onda dei riferimenti di corrente per ridurre l'effetto di armoniche di ordine superiore nei profili di forza controelettrica (nominalmente sinusoidali), che generano ripple.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [71]

Input shaping



Tutti i metodi di controllo visti finora prevedono una retroazione della variabile controllata: sono infatti metodi **in anello chiuso**.

L'input shaping è invece un metodo **in anello aperto** (feedforward): consiste nel **modificare l'ingresso al sistema** sotto controllo in modo tale da annullare l'effetto di una o più risonanze presenti nel sistema stesso. Richiede la conoscenza della pulsazione naturale e dello smorzamento dei poli complessi e coniugati.

Può essere utilizzato con un certo successo nel controllo di strutture flessibili, quali per esempio bracci robotici per applicazioni spaziali.



RALF, Georgia Tech (Atlanta)

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [72]

Controllo del moto



Parte III

Controllo centralizzato

Controllo centralizzato



Si parla di controllo centralizzato ogniqualvolta il controllore, nel determinare la coppia che deve essere applicata a ciascun giunto, prende in considerazione misure e/o modelli di pertinenza anche degli altri giunti del manipolatore.

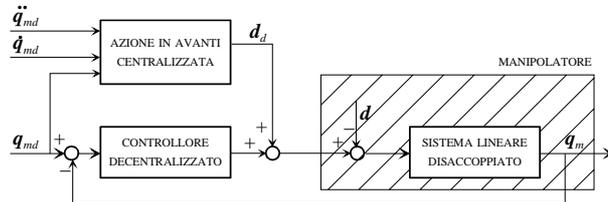
In generale un controllo centralizzato richiede la conoscenza, almeno parziale, del **modello matematico** del robot.

In assenza dell'effetto disaccoppiante indotto da rapporti di riduzione elevati (come per esempio nel caso di adozione di motori a presa diretta), l'uso di una strategia di controllo centralizzato può rivelarsi necessaria.

Compensazione in avanti a coppia precalcolata



In questo schema, il controllore decentralizzato in anello chiuso viene affiancato da un controllore che opera in anello aperto, calcolando le coppie di disturbo sulla base del riferimento di posizione, velocità ed accelerazione:



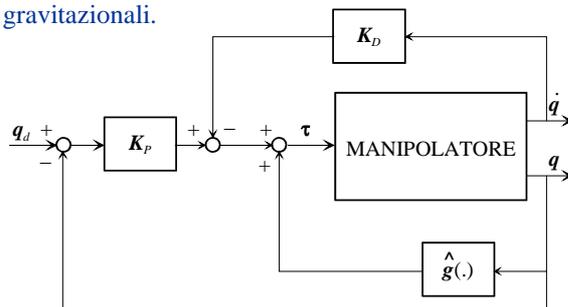
$$d_d = N^{-1} \Delta B(q_d) N^{-1} \ddot{q}_{md} + N^{-1} C(q_d, \dot{q}_d) N^{-1} \dot{q}_{md} + N^{-1} g(q_d)$$

- La compensazione delle non linearità può essere solo parziale (per esempio solo i termini gravitazionali ed i termini diagonali della matrice di inerzia)
- I termini di compensazione possono essere calcolati anche fuori linea, nel caso di traiettorie ripetute più volte.

PD con compensazione di gravità



L'azione integrale del regolatore PID può dare problemi di stabilità in anello chiuso. Un'alternativa al controllo di tipo PID consiste nell'utilizzare un controllo PD decentralizzato corredato da un termine centralizzato che compensa gli effetti gravitazionali.



K_p e K_D diagonali

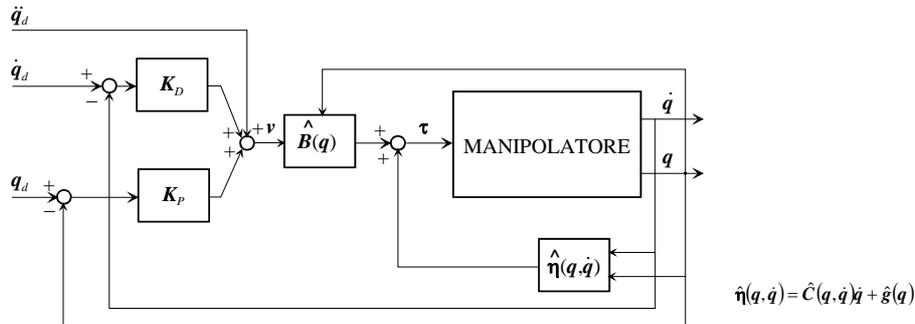
q_d costante

Si può dimostrare che con questo schema di controllo applicato ad un manipolatore rigido, se la stima del termine gravitazionale è perfetta, si ottiene un sistema in anello chiuso il cui punto di equilibrio (caratterizzato da errore nullo) è globalmente asintoticamente stabile.

Controllo a dinamica inversa



Si può utilizzare il modello dinamico del manipolatore in uno schema di controllo centralizzato che idealmente compensa tutti gli effetti di accoppiamento meccanico tra i giunti:



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [77]

Controllo a dinamica inversa



Le equazioni del sistema controllato sono:

$$\mathbf{B}(q)\ddot{q} + \boldsymbol{\eta}(q, \dot{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{B}}(q)\mathbf{v} + \hat{\boldsymbol{\eta}}(q, \dot{q})$$

$$\mathbf{v} = \ddot{q}_d + \mathbf{K}_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + \mathbf{K}_P(q_d - q)$$

Se la conoscenza del modello matematico è perfetta ($\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{B}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}=\boldsymbol{\eta}$), si ha:

$$\ddot{q} = \mathbf{v}$$

e quindi, detto $\mathbf{e}=\mathbf{q}_d-\mathbf{q}$,

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Il controllore PD “vede” un sistema completamente disaccoppiato costituito da doppi integratori, per i quali si può assegnare arbitrariamente la dinamica in anello chiuso.

Ci sono varianti del metodo intese a conferirgli **robustezza** a fronte di incertezze sul modello o a renderlo **adattativo** rispetto alla stima dei parametri del modello.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [78]

Controllo nello spazio operativo



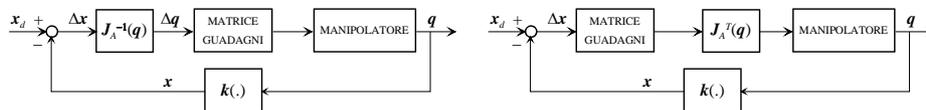
Per controllo nello spazio operativo si intende una strategia di controllo in cui l'errore viene formato **direttamente sulle coordinate dello spazio operativo**.

La traiettoria, generata nello spazio operativo, non è quindi soggetta all'inversione cinematica. D'altra parte le "misure" delle variabili nello spazio operativo sono in realtà di norma il risultato del calcolo della cinematica diretta sulle uniche misure disponibili, ovvero sulle misure delle coordinate di giunto.

Schemi di principio:

controllo con *inversa* dello Jacobiano

controllo con *trasposta* dello Jacobiano

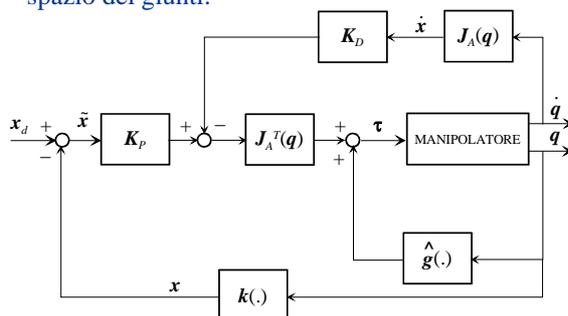


Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [79]

PD con compensazione di gravità



In questo schema un controllo PD decentralizzato nello spazio operativo è corredato da un termine centralizzato che compensa gli effetti gravitazionali nello spazio dei giunti:



K_p e K_D diagonali

x_d costante

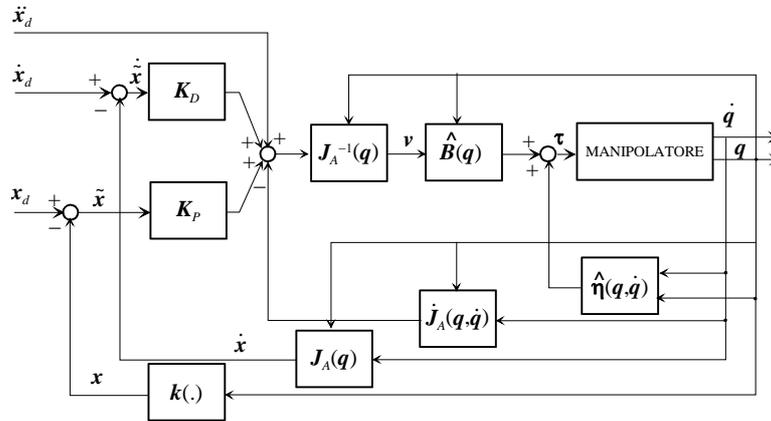
Come nell'analogo schema nello spazio dei giunti, anche in questo caso si può dimostrare che, se la stima del termine gravitazionale è perfetta, si ottiene un sistema in anello chiuso il cui punto di equilibrio (caratterizzato da errore nullo) è globalmente asintoticamente stabile.

Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [80]

Controllo a dinamica inversa



Si può estendere il controllo a dinamica inversa anche allo spazio operativo:



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [81]

Controllo a dinamica inversa



Le equazioni del sistema controllato sono (senza errori di modello):

$$B(q)\ddot{q} + \eta(q, \dot{q}) = \tau$$

$$\tau = B(q)v + \eta(q, \dot{q})$$

$$v = J_A^{-1}(q)(\ddot{x}_d + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} - \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q})$$

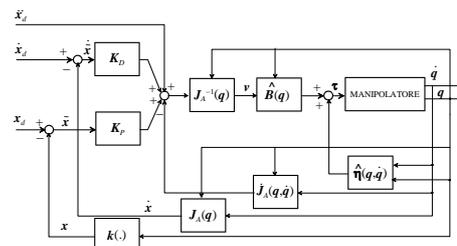
Poiché:

$$J_A(q)\ddot{q} + \dot{J}_A(q, \dot{q})\dot{q} = \frac{d}{dt}(J_A(q, \dot{q})\dot{q}) = \frac{d}{dt}\dot{x} = \ddot{x}$$

si ottiene:

$$\ddot{\tilde{x}} + K_D\dot{\tilde{x}} + K_P\tilde{x} = \mathbf{0}, \quad \tilde{x} = x_d - x$$

ovvero lo stesso risultato, nello spazio operativo, del controllo a dinamica inversa nello spazio dei giunti.



Controllo dei robot - Controllo del moto - P. Rocco [82]