



Controllo dei robot

Cinematica

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Nota:

I disegni riportati in queste slide sono tratti dal testo:

L.Sciavicco, B.Siciliano

Robotica industriale –

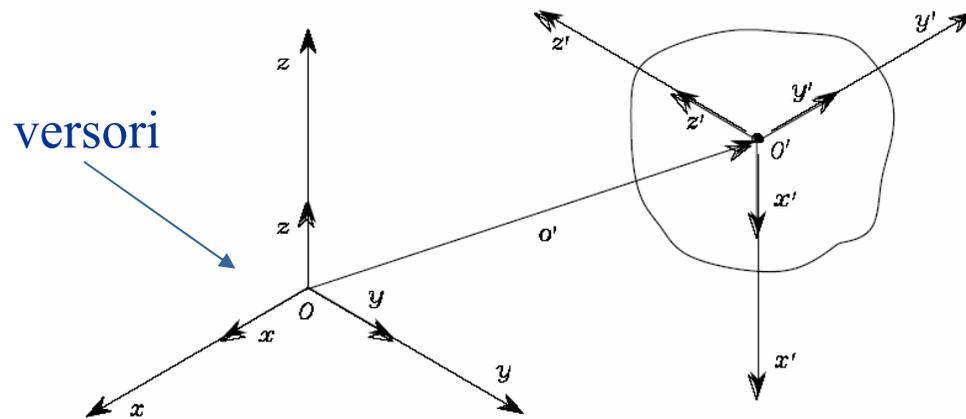
Modellistica e controllo di robot manipolatori

(2a ed.) Mc Graw-Hill, 2000



Posizione e orientamento di un corpo rigido

Consideriamo un corpo rigido nello spazio:



Come si caratterizzano posizione ed orientamento del corpo rigido rispetto alla terna (x, y, z) ?

Posizione dell'origine della terna (x', y', z') :

$$\mathbf{o}' = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{o}' = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}$$

Orientamento della terna (x', y', z') :

$$\mathbf{x}' = x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{y}' = y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z}$$

$$\mathbf{z}' = z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z}$$



Matrice di rotazione

Raccogliamo in una matrice le componenti di \mathbf{x}' , \mathbf{y}' , \mathbf{z}' (*coseni direttori*):

$$\mathbf{R} = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \mathbf{x} & \mathbf{y}'^T \mathbf{x} & \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{y} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y} & \mathbf{z}'^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{z} & \mathbf{y}'^T \mathbf{z} & \mathbf{z}'^T \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

Questa matrice prende il nome di **matrice di rotazione** della terna $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ rispetto alla terna $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Poiché valgono le relazioni:

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = 1, \quad \mathbf{y}'^T \mathbf{y}' = 1, \quad \mathbf{z}'^T \mathbf{z}' = 1$$

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = 0, \quad \mathbf{y}'^T \mathbf{z}' = 0, \quad \mathbf{z}'^T \mathbf{x}' = 0$$

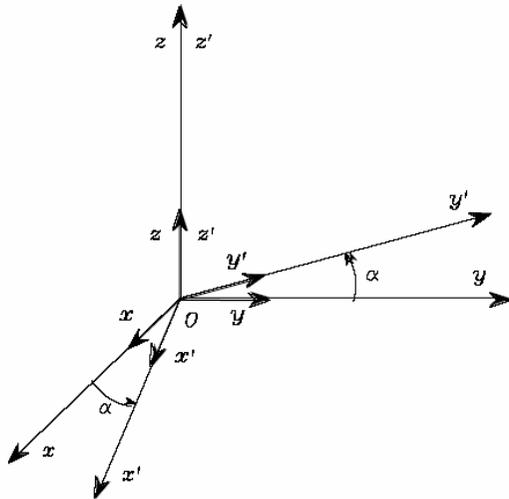
risulta:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \left(\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \right) \quad \text{Matrice ortogonale}$$



Rotazioni elementari

Consideriamo una rotazione di un angolo α intorno all'asse z :



Si ottiene facilmente:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione è pertanto:

$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotazioni elementari



Analogamente a quanto fatto prima si ottengono le altre rotazioni elementari.

- Rotazione di un angolo β intorno a y

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

- Rotazione di un angolo γ intorno a x

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

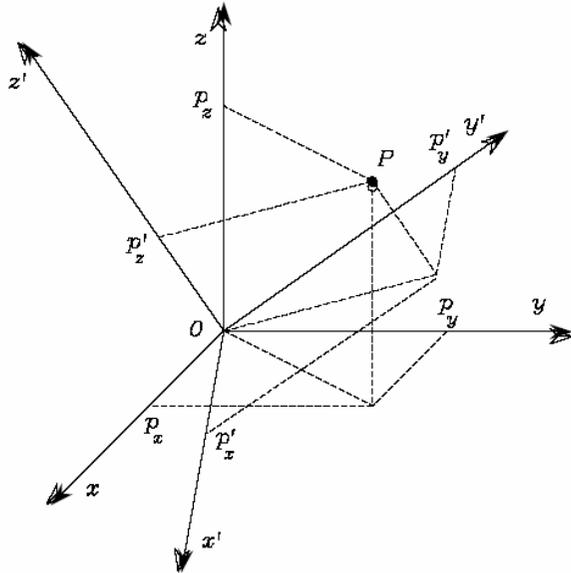
Risulta inoltre:

$$\mathbf{R}_k(-\vartheta) = \mathbf{R}_k^T(\vartheta)$$

Rappresentazione di un vettore



Consideriamo un punto P le cui coordinate sono espresse in due sistemi di riferimento:



Le coordinate del punto nei due sistemi sono:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix}$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} \mathbf{p}' = \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

La matrice di rotazione esprime quindi la trasformazione delle coordinate espresse nella terna $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ nelle coordinate espresse nella terna $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

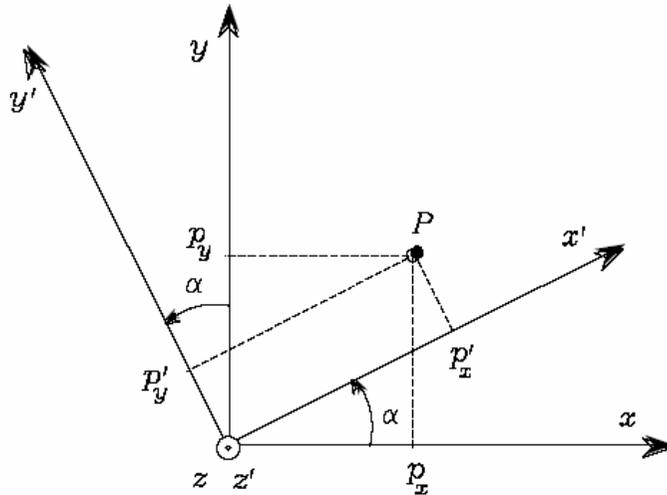
Trasformazione inversa:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$$



Esempio di rappresentazione di un vettore

Consideriamo due terne, ruotate l'una rispetto all'altra di un angolo α attorno all'asse z :



Le coordinate del punto \mathbf{p} sono:

$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha$$

$$p_z = p'_z$$

Risulta quindi:

$$\mathbf{p} = p_{x'} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + p_{y'} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + p_{z'} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p_{x'} \mathbf{x}' + p_{y'} \mathbf{y}' + p_{z'} \mathbf{z}' = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] \mathbf{p}' = \mathbf{R} \mathbf{p}'$$

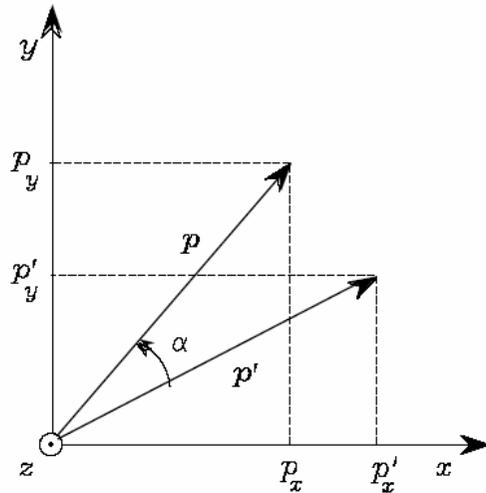
Rotazione di un vettore



La rotazione di un vettore intorno ad un asse si esprime attraverso una matrice di rotazione:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{p}'$$

Esempio (rotazione di un angolo α)



$$\begin{aligned} p_x &= p \cos(\alpha + \beta) = p \cos \beta \cos \alpha - p \sin \beta \sin \alpha = \\ &= p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha \\ p_y &= p \sin(\alpha + \beta) = p \cos \beta \sin \alpha + p \sin \beta \cos \alpha = \\ &= p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \end{aligned}$$

Pertanto:

$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{p}'$$

$$p_z = p'_z$$

Significato della matrice di rotazione



Abbiamo messo in evidenza tre significati della matrice di rotazione:

- fornisce l'orientamento di una terna di coordinate rispetto ad un'altra: i vettori colonna sono i coseni direttori della terna ruotata rispetto a quella di partenza
- rappresenta una trasformazione di coordinate che mette in relazione le coordinate di uno stesso punto in due terne differenti (di origine comune)
- è l'operatore che consente di ruotare un vettore in una stessa terna di coordinate.

Composizione di matrici di rotazione



Consideriamo tre terne (indicate con 0, 1 e 2) con origine comune.
Indichiamo con:

R_i^j matrice di rotazione della terna i rispetto alla terna j

Risulta quindi:

$$R_i^j = (R_j^i)^{-1} = (R_j^i)^T$$

Le coordinate di uno stesso punto nelle tre terne si possono esprimere in modi differenti:

$$p^1 = R_2^1 p^2 \quad p^0 = R_1^0 p^1 \quad p^0 = R_2^0 p^2$$

Si possono effettuare rotazioni componendo rotazioni parziali.
Occorre distinguere tra rotazioni in terna corrente ed in terna fissa.

Rotazioni in terna corrente ed in terna fissa



Rotazione in terna corrente:

Consideriamo la sequenza di rotazioni:

1. Si ruota la terna 0 fino a sovrapporla con la 1: \mathbf{R}_1^0
2. Si ruota la terna, ora sovrapposta alla 1, fino a sovrapporla alla 2: \mathbf{R}_2^1

Complessivamente:

$$\mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1 \quad (\text{si moltiplicano le matrici da sinistra a destra})$$

Rotazione in terna fissa:

Consideriamo la sequenza di rotazioni:

1. Si ruota la terna 0 fino a sovrapporla con la 1: \mathbf{R}_1^0
2. Si riallinea la terna mobile con la 0: \mathbf{R}_0^1
3. Si effettua la rotazione \mathbf{R}_2^1 rispetto alla terna corrente
4. Si compensa la rotazione del riallineamento, mediante la \mathbf{R}_1^0

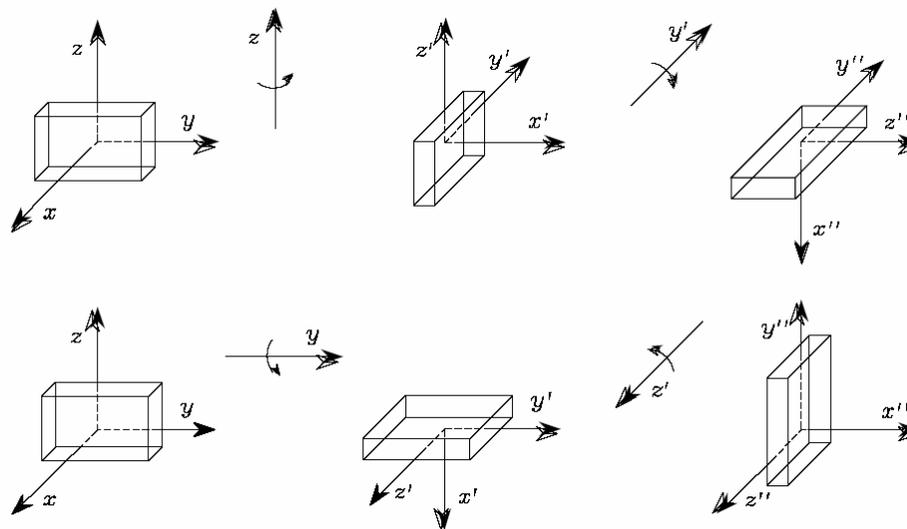
Complessivamente:

$$\overline{\mathbf{R}}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_0^1 \overline{\mathbf{R}}_2^1 \mathbf{R}_1^0 = \overline{\mathbf{R}}_2^1 \mathbf{R}_1^0 \quad (\text{si moltiplicano le matrici da destra a sinistra})$$

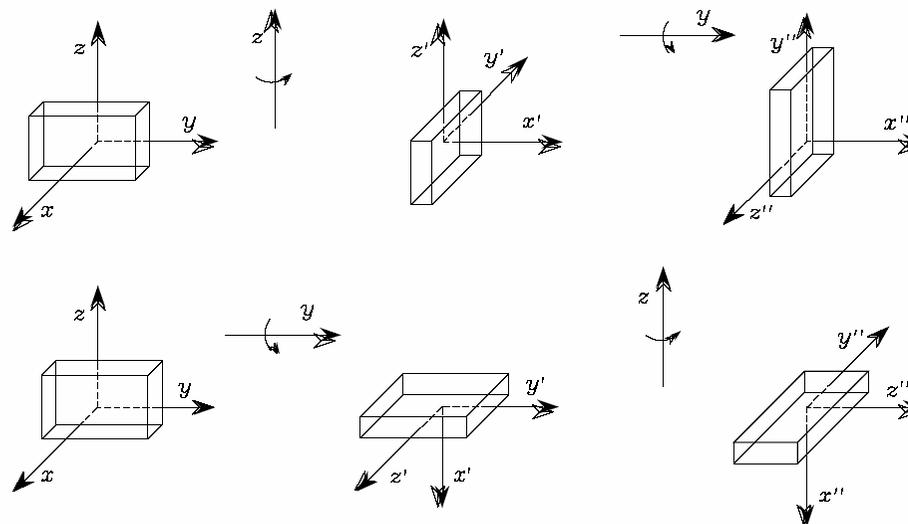
Esempi di composizione di rotazioni



In terna corrente:



In terna fissa:



Rappresentazioni minime dell'orientamento



Una matrice di rotazione rappresenta l'orientamento di una terna rispetto ad un'altra per mezzo di 9 parametri, tra i quali sussistono 6 vincoli.

In una rappresentazione minima l'orientamento è invece descritto per mezzo di 3 parametri indipendenti tra loro.

Si tratta quindi di esprimere la matrice di rotazione come composizione di tre rotazioni elementari, secondo un'opportuna sequenza, in modo che due rotazioni successive non avvengano intorno ad assi paralleli.

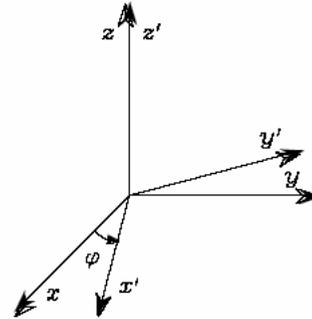
Un modo di procedere consiste nel fare riferimento agli **angoli di Eulero**.



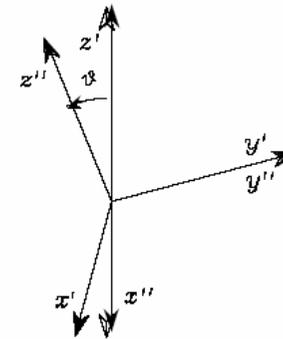
Angoli di Eulero ZYZ

La sequenza è costituita da:

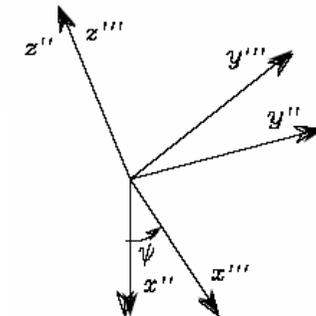
I) Rotazione intorno a Z



II) Rotazione intorno a Y' (terna corrente)
(terna corrente)



III) Rotazione intorno a Z'' (terna corrente)
(terna corrente)



$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_{y'}(\vartheta)\mathbf{R}_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Angoli ZYZ: problema inverso



Assegnata la matrice di rotazione $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

Gli angoli di Eulero ZYZ sono:

$$\begin{aligned} \vartheta \in (0, \pi): \quad \varphi &= \text{Atan} 2(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta &= \text{Atan} 2\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \text{Atan} 2(r_{32}, -r_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta \in (-\pi, 0): \quad \varphi &= \text{Atan} 2(-r_{23}, -r_{13}) \\ \vartheta &= \text{Atan} 2\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \text{Atan} 2(-r_{32}, r_{31}) \end{aligned}$$

La soluzione degenera se $\sin(\vartheta)=0$.

Angoli RPY (Roll Pitch Yaw)

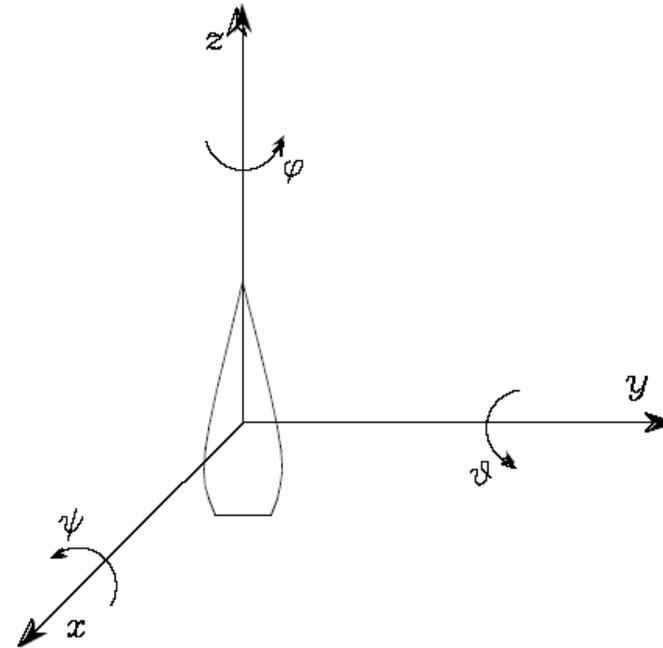


La sequenza è costituita da tre rotazioni rispetto agli assi della terna fissa

I) Rotazione intorno a X (yaw)

II) Rotazione intorno a Y (pitch)

III) Rotazione intorno a Z (roll)



$$\mathbf{R}(\phi) = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\vartheta)\mathbf{R}_x(\psi) = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

Angoli RPY: problema inverso



Assegnata la matrice di rotazione $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

Gli angoli RPY sono:

$$\begin{aligned} \vartheta \in (-\pi/2, \pi/2): \quad \varphi &= \text{Atan } 2(r_{21}, r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan } 2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \psi &= \text{Atan } 2(r_{32}, r_{33}) \end{aligned}$$

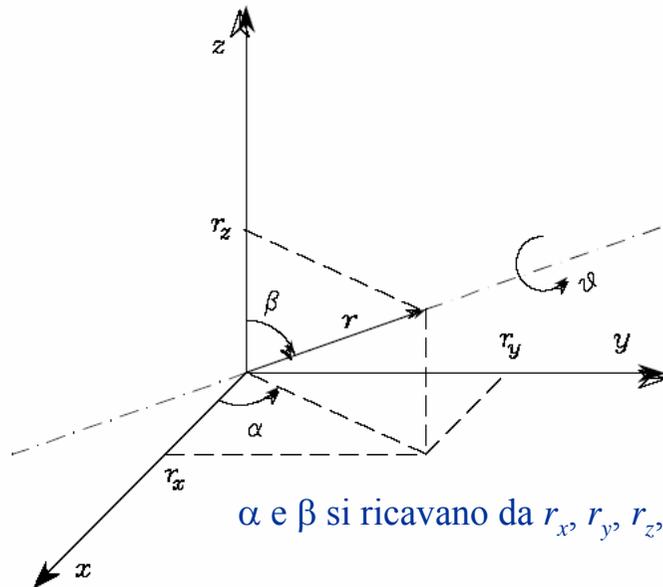
$$\begin{aligned} \vartheta \in (\pi/2, 3\pi/2): \quad \varphi &= \text{Atan } 2(-r_{21}, -r_{11}) \\ \vartheta &= \text{Atan } 2\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \psi &= \text{Atan } 2(-r_{32}, -r_{33}) \end{aligned}$$

La soluzione degenera se $\cos(\vartheta)=0$.

Rappresentazione asse/angolo



Si tratta di una rappresentazione non minima dell'orientamento, a 4 parametri.
Consiste in una rotazione di un angolo ϑ intorno ad un asse r .



rotazione di ϑ intorno a z

$$R(\vartheta, r) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\vartheta) R_y(-\beta) R_z(-\alpha)$$

ripristino
orientamento r

sovrapposizione r su z

$$R(\vartheta, r) = \begin{bmatrix} r_x^2(1-c_\vartheta) + c_\vartheta & r_x r_y(1-c_\vartheta) - r_z s_\vartheta & r_x r_z(1-c_\vartheta) + r_y s_\vartheta \\ r_x r_y(1-c_\vartheta) + r_z s_\vartheta & r_y^2(1-c_\vartheta) + c_\vartheta & r_y r_z(1-c_\vartheta) - r_x s_\vartheta \\ r_x r_z(1-c_\vartheta) - r_y s_\vartheta & r_y r_z(1-c_\vartheta) + r_x s_\vartheta & r_z^2(1-c_\vartheta) + c_\vartheta \end{bmatrix}$$

$$R(\vartheta, r) = R(-\vartheta, -r)$$

Asse/angolo: problema inverso



Assegnata la matrice di rotazione

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

L'angolo e l'asse di rotazione sono (per $\sin \vartheta \neq 0$):

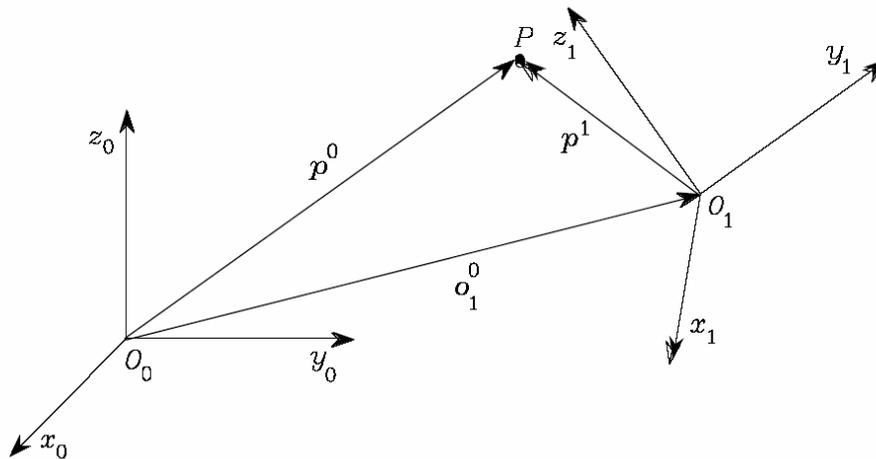
$$\vartheta = \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

con

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

Rappresentazione omogenea



Come esprimere le coordinate del punto P nel sistema 0, sulla base delle sue coordinate nel sistema 1?

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

N.B.: Matrice di rotazione della terna 1 rispetto alla 0

$$\mathbf{p}^1 = -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}^0$$

Per rappresentare in forma compatta queste trasformazioni, è opportuno introdurre un vettore di 4 componenti:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} w\mathbf{p} \\ w \end{bmatrix} \quad \text{Rappresentazione **omogenea**.$$

w è un fattore di scala che in robotica viene sempre posto uguale a 1 (è utilizzato invece nella computer graphics)

Trasformazioni omogenee



Introduciamo la matrice di trasformazione omogenea (di dimensioni 4×4):

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

La relazione:

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

si può esprimere, in termini di coordinate omogenee, come:

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1$$

\mathbf{A}_1^0 lega quindi la descrizione di un punto in terna 1 con quella del punto in terna 0.

La trasformazione inversa è:

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0 \quad \mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad \text{N.B. } \mathbf{A} \text{ non è ortogonale}$$

Componendo più trasformazioni si ha:

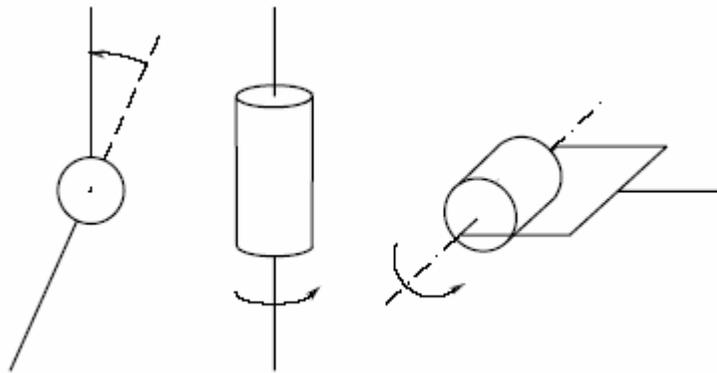
$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}^n$$

I giunti

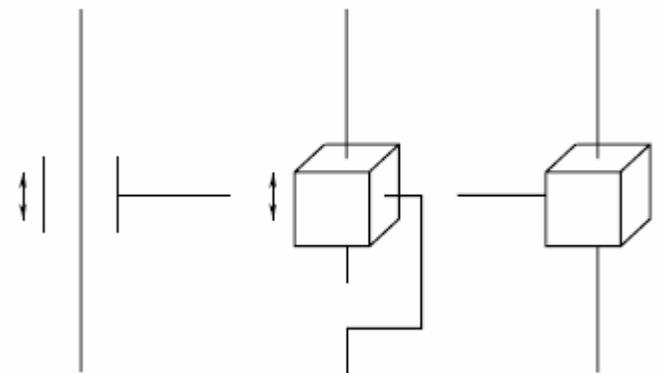


Il manipolatore è costituito da un insieme di bracci connessi tramite **giunti**.
Ciascun giunto consente uno (e uno solo) *grado di mobilità* tra due bracci.
Chiamiamo variabile di giunto la coordinata associata a questo grado di mobilità.

Schematizzazione dei giunti:



GIUNTI ROTOIDALI



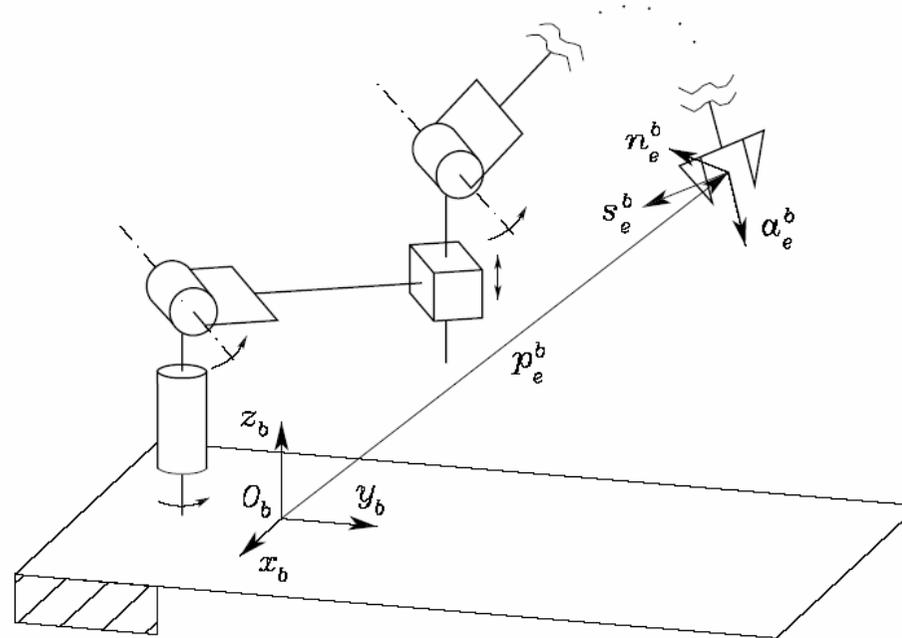
GIUNTI PRISMATICI

Terna base e terna utensile



Definiamo una terna di base ed una terna solidale con l'utensile.

La terna utensile è definita per mezzo di 3 versori:



a_e (avvicinamento): direzione di avvicinamento al pezzo;

s_e (scivolamento): ortogonale ad a_e nel piano di scorrimento della presa;

n_e (normale): ortogonale agli altri due.

p_e punta all'origine della terna utensile (punto centrale dell'organo di presa).

Cinematica diretta

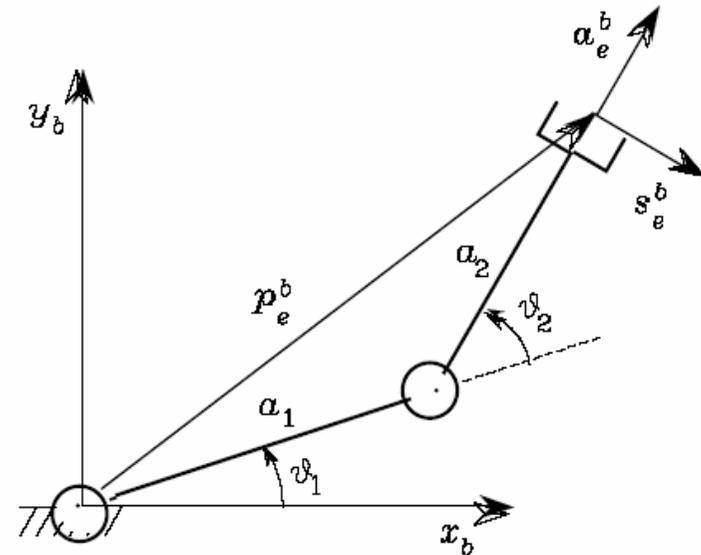


L'equazione cinematica diretta determina posizione ed orientamento della terna utensile rispetto alla terna base, in funzione delle variabili di giunto.

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio: manipolatore planare a due bracci

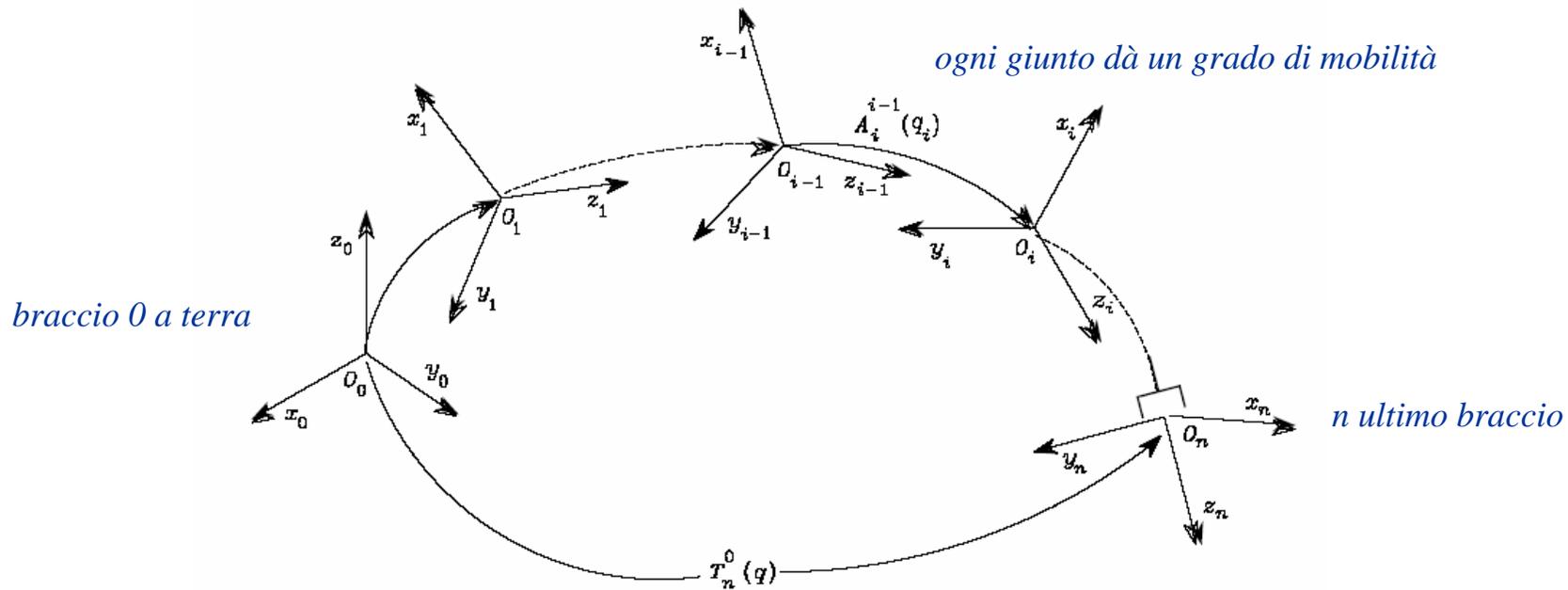
$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinematica diretta



Per procedere in modo sistematico nella determinazione della cinematica diretta, occorre definire una terna solidale con ciascun braccio:



Procedendo iterativamente:

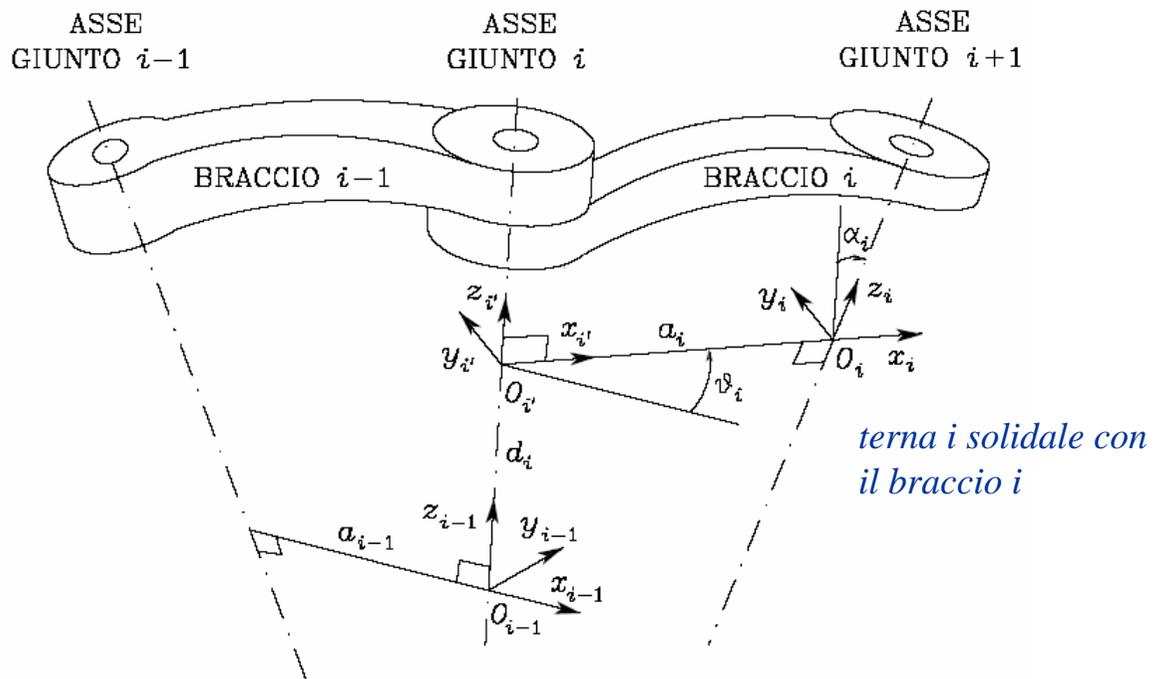
$$T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)\dots A_n^{n-1}(q_n)$$

$$T_e^b(\mathbf{q}) = T_0^b T_n^0(\mathbf{q}) T_e^n$$

Convenzione di Denavit-Hartenberg



È una convenzione per la scelta delle terne solidali ai bracci:



- z_i giace lungo l'asse del giunto $i+1$
- O_i è all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_i e z_{i-1} ; si indica con O_i' l'intersezione della normale comune con z_{i-1}
- x_i è diretto lungo la normale comune agli assi z_i e z_{i-1} , con verso positivo dal giunto i al giunto $i+1$
- y_i completa una terna destra

Definizione non univoca della terna



Vi sono alcuni casi in cui la terna non è univocamente definita:

- Nella terna 0 solo la direzione di z_0 è specificata: si possono scegliere arbitrariamente origine ed asse x_0
- Nella terna n è specificato solo l'asse x_n che deve essere normale a z_{n-1}
- Quando due assi consecutivi sono paralleli non è univocamente definita la normale comune
- Quando due assi consecutivi si intersecano, non è definito il verso di x_i
- Quando il giunto i è prismatico solo la direzione di z_{i-1} è determinata

L'indeterminazione può essere usata per semplificare la procedura.

Parametri di Denavit-Hartenberg

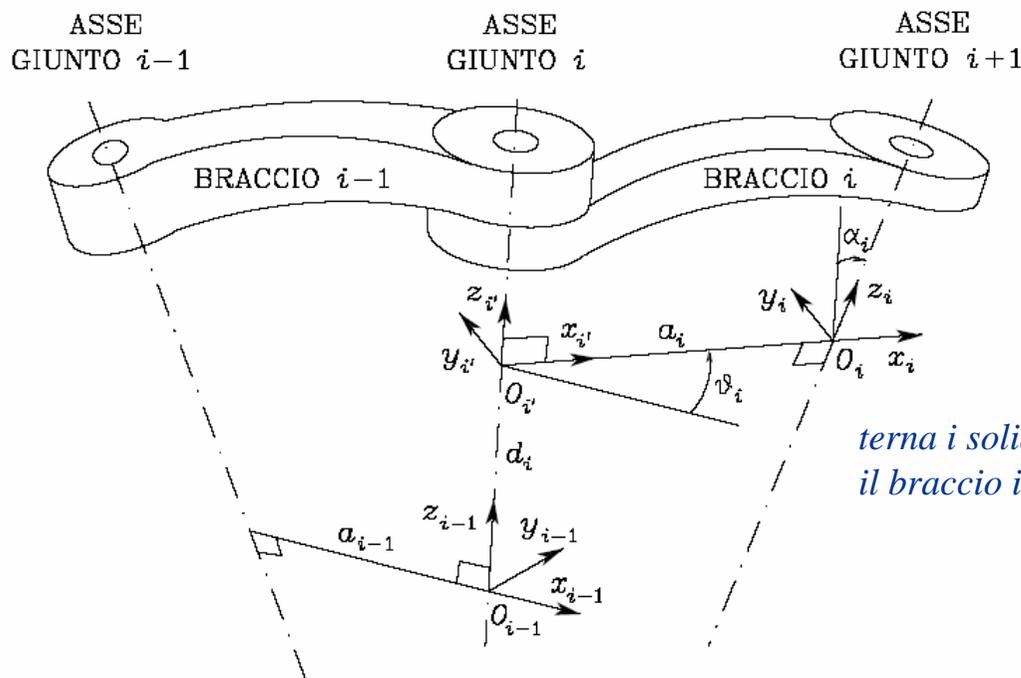


Per definire una terna rispetto alla precedente sono sufficienti 4 parametri:

- a_i distanza di O_i da O_i'
- d_i coordinata su z_{i-1} di O_i
- α_i angolo intorno all'asse x_i tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i valutato positivo in senso antiorario
- ϑ_i angolo intorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i valutato positivo in senso antiorario

a_i e α_i sono sempre costanti

ϑ_i o d_i è variabile



terna i solidale con il braccio i

Matrice di trasformazione omogenea



Costruzione della matrice di trasformazione dalla terna $i-1$ alla terna i :

I) Per sovrapporre la terna $i-1$ alla terna i' si trasla la terna lungo l'asse z_{i-1} di una lunghezza d_i ruotandola di un angolo ϑ_i intorno a z_{i-1} :

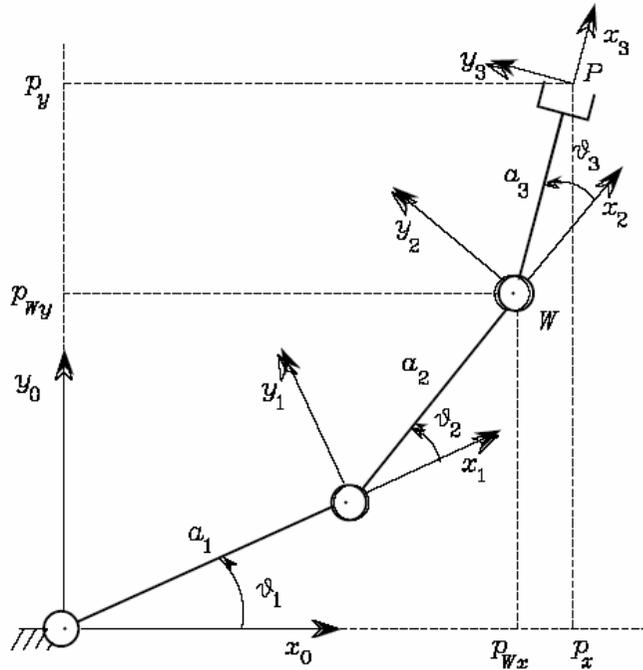
$$\mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II) Per sovrapporre la terna i' alla terna i si trasla la terna lungo l'asse x_i' per una lunghezza a_i , ruotandola di un angolo α_i intorno a x_i' :

$$\mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a tre bracci



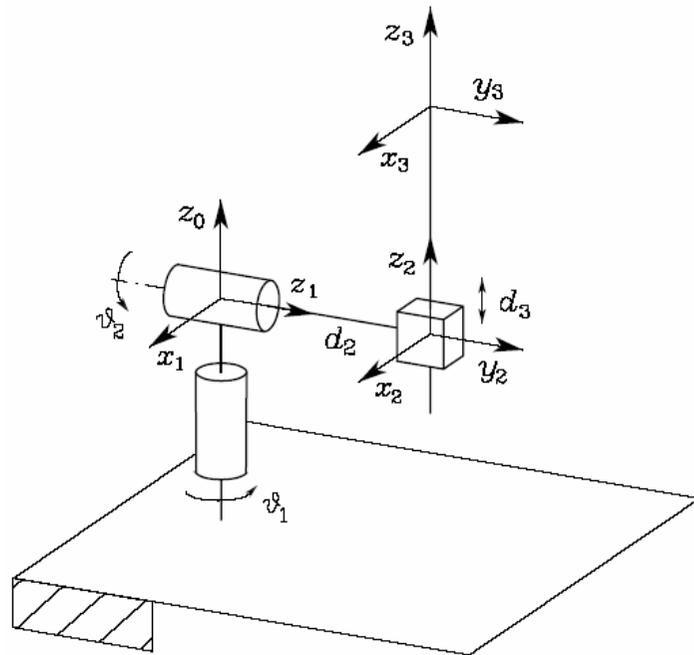
	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile non coincide con la terna 3



Manipolatore sferico

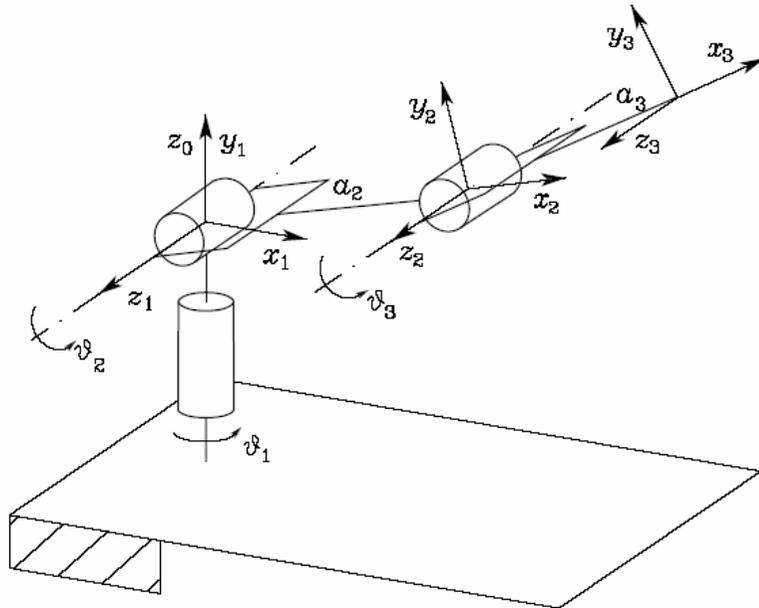


	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile coincide con la terna 3

Manipolatore antropomorfo

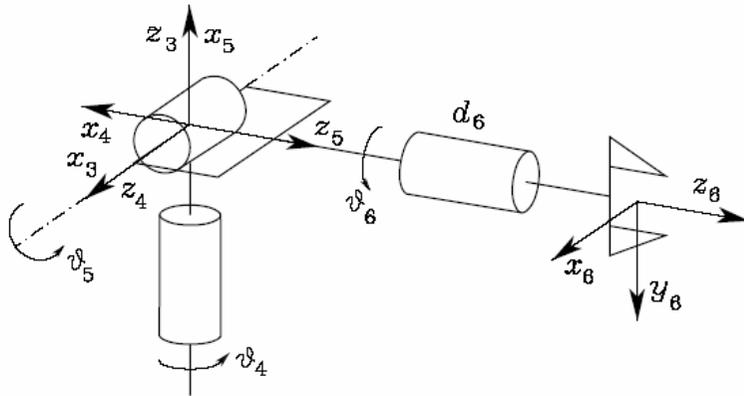


	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile
non coincide con
la terna 3

Polso sferico



	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

$\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$ sono gli angoli di Eulero ZYZ della terna 6 rispetto alla 3

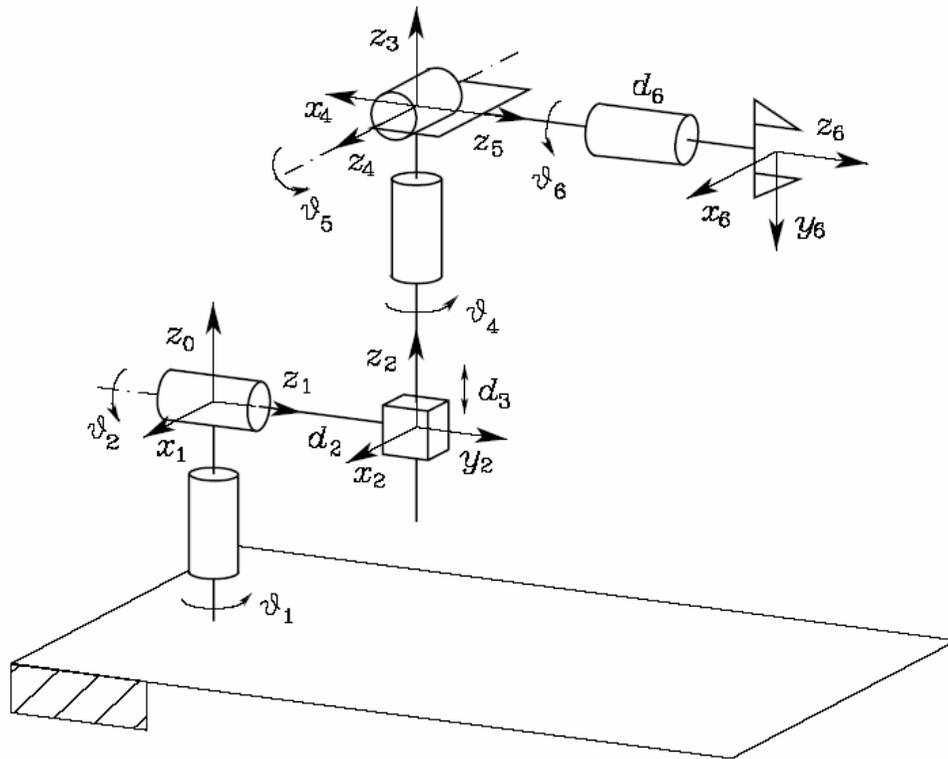
$$\mathbf{T}_6^3 = \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile coincide con la terna 6

Manipolatore di Stanford



Il manipolatore di Stanford è un manipolatore sferico con polso sferico



	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3$$

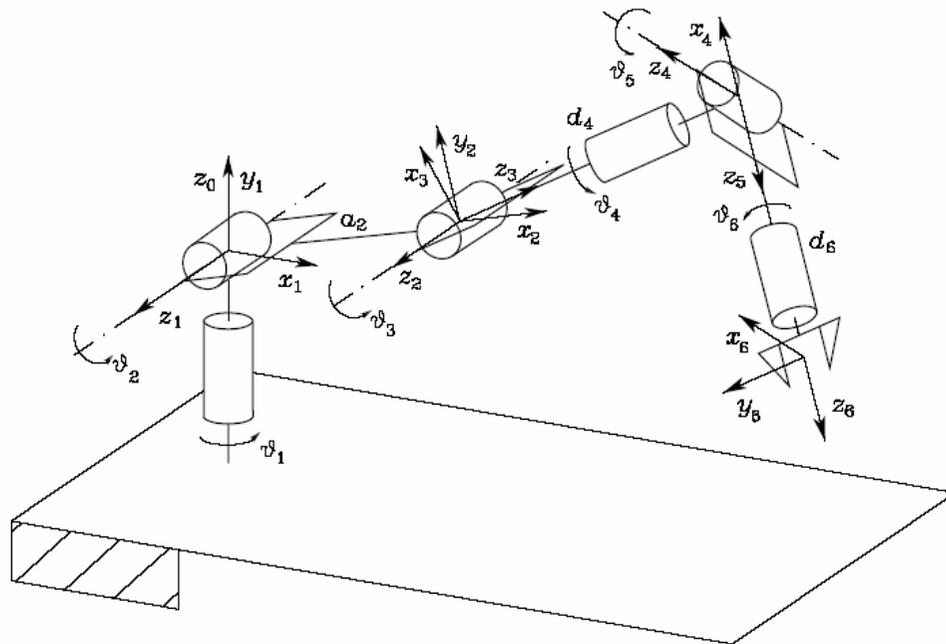
Già calcolata per il polso sferico

Già calcolata per il manipolatore sferico

Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Montiamo un polso sferico sul manipolatore antropomorfo



	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	0	$\pi/2$	0	ϑ_3
4	0	$-\pi/2$	d_4	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

La terna 3 del manipolatore antropomorfo non era orientata correttamente per il successivo polso sferico, per cui per calcolare la cinematica diretta occorre rifare i conti (non basta semplicemente moltiplicare le due matrici di trasformazione parziali)

Spazio dei giunti e spazio operativo



Lo **spazio dei giunti** è definito dal vettore delle variabili di giunto:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_i = \vartheta_i \text{ (giunto rotoidale)} \\ q_i = d_i \text{ (giunto prismatico)} \end{array}$$

Lo **spazio operativo** è lo spazio in cui è specificata l'operazione che il manipolatore deve compiere. È definito dalla postura \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p} \text{ (posizione)} \\ \phi \text{ (rappresentazione minima dell'orientamento)} \end{array}$$

m componenti

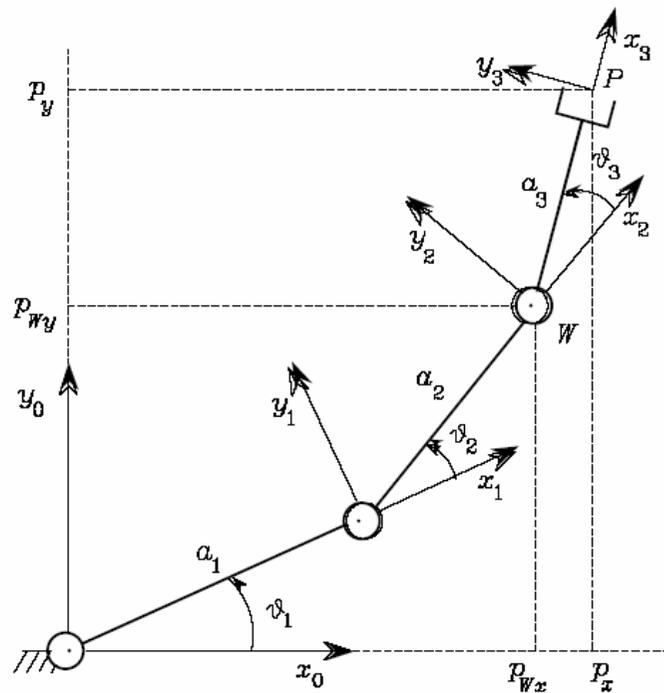
Equazione cinematica diretta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

Esempio



Manipolatore planare a tre gradi di mobilità:



Definiamo l'orientamento con l'angolo ϕ formato dall'organo terminale (versore x_3) con l'asse x_0

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$



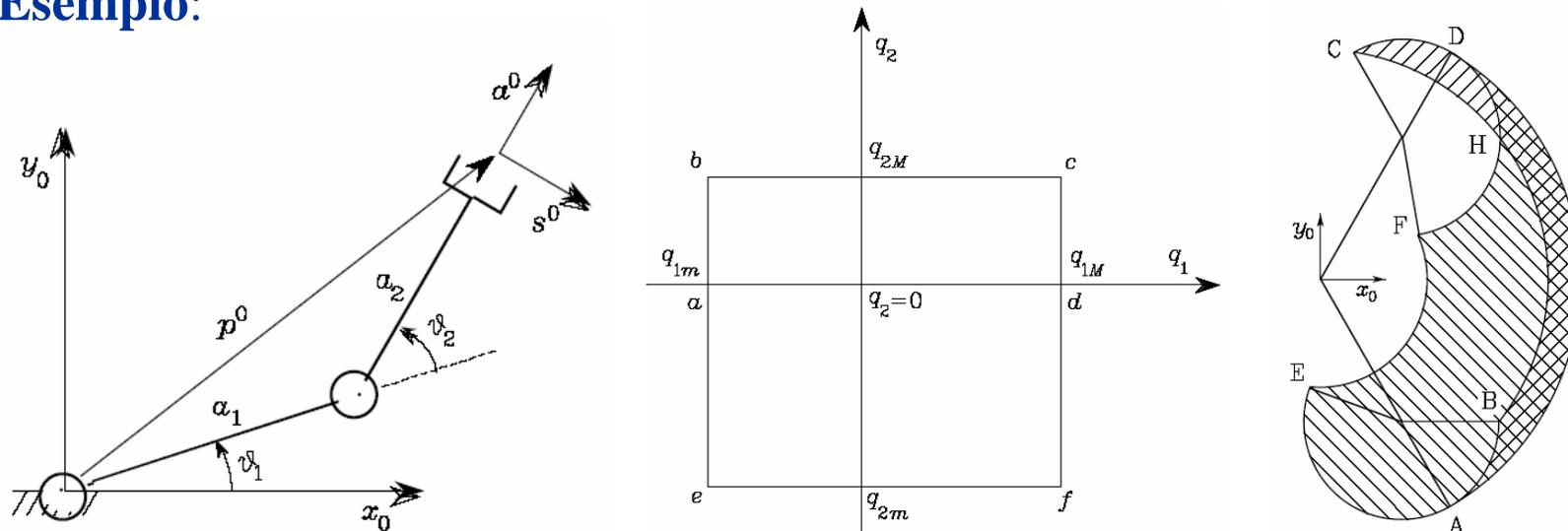
Spazio di lavoro

Spazio di lavoro **raggiungibile** : regione descritta dall'origine della terna utensile quando i giunti eseguono tutti i moti possibili

$$p = p(q) \quad q_{im} \leq q_i \leq q_{iM}, \quad i = 1, \dots, n$$

Spazio di lavoro **destro**: sottoinsieme dello spazio di lavoro raggiungibile, costituito dai punti raggiungibili con orientamenti diversi della terna utensile.

Esempio:



Spazio di lavoro

Accuratezza, ripetibilità, ridondanza

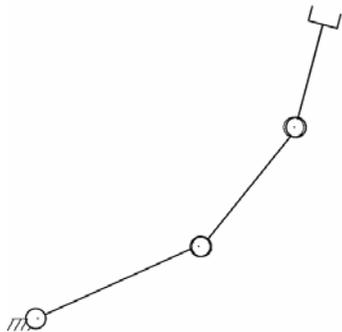


Accuratezza: scostamento tra la posizione attuale e la posizione calcolata tramite la cinematica diretta. Varia con la posizione dell'organo terminale.

Ripetibilità: capacità del manipolatore di tornare in una posizione precedentemente raggiunta. Dipende anche dai trasduttori e dal sistema di controllo. Valori tipici tra 0.02 mm e 0.2 mm.

Ridondanza (intrinseca): $m < n$ (dimensione dello spazio dei giunti superiore alla dimensione dello spazio operativo).

Ridondanza (funzionale): $r < m = n$ (dimensione dello spazio dei giunti superiore al numero r di componenti dello spazio operativo di interesse per il compito).



Il manipolatore planare a 3 gradi di mobilità è *funzionalmente ridondante* se il compito è specificato tramite la sola posizione dell'organo terminale ($r=2$).

Problema cinematico inverso

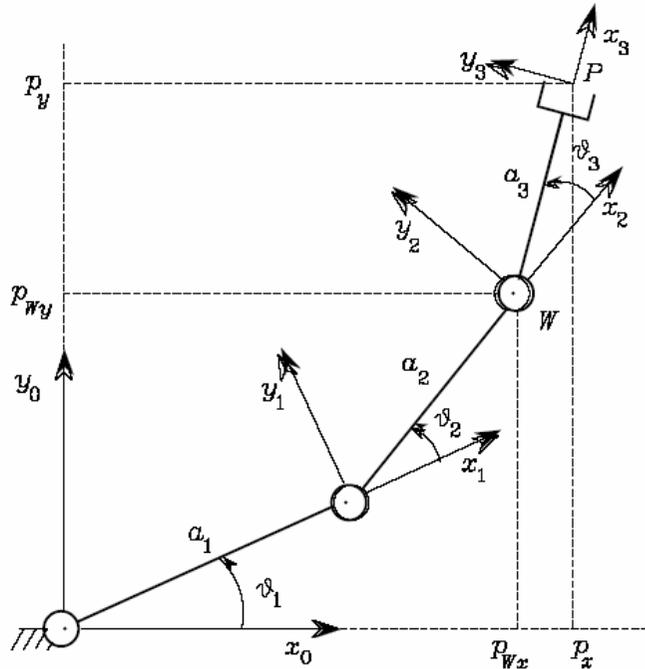


$T \Rightarrow q$ Assegnati posizione ed orientamento della terna utensile,
 $x \Rightarrow q$ trovare le corrispondenti variabili di giunto.

- Il problema può non ammettere soluzione (se posizione ed orientamento non appartengono allo spazio di lavoro destro)
- La soluzione analitica (in forma chiusa) può non esistere, nel qual caso si ricorre a tecniche numeriche
- Possono esserci soluzioni multiple
- Possono esserci infinite soluzioni

In generale la soluzione si ricava senza un procedimento sistematico, ma sulla base di intuizione nella manipolazione delle equazioni.

Manipolatore planare a tre bracci



Dati: p_x, p_y, ϕ
 Incognite: $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$

Poniamo:

$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

Quadrando e sommando:

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2} \Rightarrow \vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

2 soluzioni

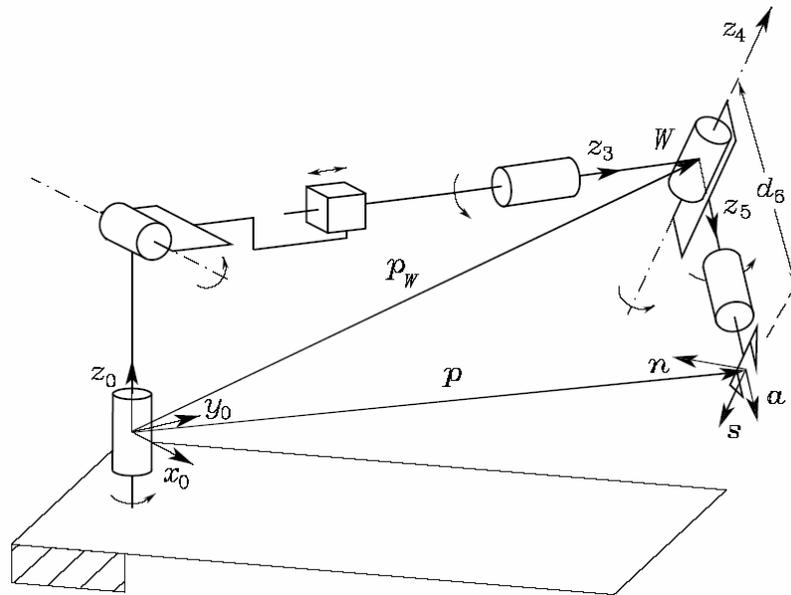
Infine:

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wx} + a_2 s_2 p_{Wy}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) p_{Wy} - a_2 s_2 p_{Wx}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$$

$$\Rightarrow \vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1) \quad \vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

Manipolatore con polso sferico



Se il manipolatore ha polso sferico, si può disaccoppiare la soluzione del problema cinematico inverso per la posizione da quella per l'orientamento

Posizione del centro polso:

$$\mathbf{p}_W = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$$

Procedura operativa

- si calcola la posizione del centro polso \mathbf{p}_W
- si risolve la cinematica inversa per (q_1, q_2, q_3)
- si calcola la matrice $\mathbf{R}_3^0(q_1, q_2, q_3)$
- si calcola $\mathbf{R}_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = \mathbf{R}_3^{0T} \mathbf{R}$
- si risolve la cinematica inversa per l'orientamento, ricavando $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$

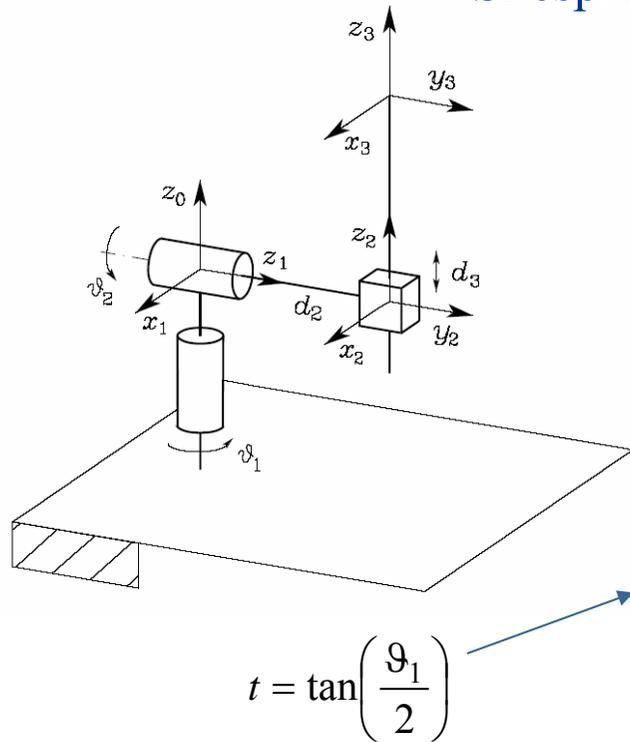


Manipolatore sferico

Si esprime p_W rispetto alla terna 1: $(A_1^0)^{-1} T_3^0 = A_2^1 A_3^2$

⇓

$$p_W^1 = \begin{bmatrix} p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1 \\ -p_{Wz} \\ -p_{Wx}s_1 + p_{Wy}c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3s_2 \\ -d_3c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$



Dalla terza equazione:

$$c_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow (d_2 + p_{Wy})t^2 + 2p_{Wx}t + d_2 - p_{Wz} = 0$$

$$s_1 = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \vartheta_1 = 2 \operatorname{Atan} 2 \left(-p_{Wx} \pm \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - d_2^2}, d_2 + p_{Wy} \right)$$

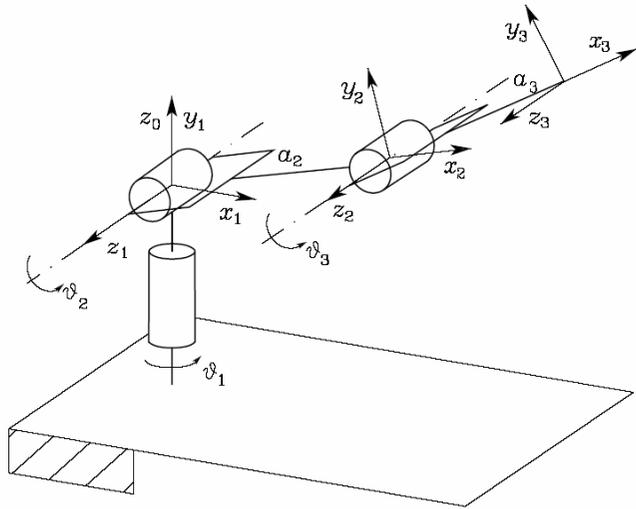
Dalle prime due equazioni:

$$\frac{p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1}{-p_{Wz}} = \frac{d_3s_2}{-d_3c_2} \Rightarrow \vartheta_2 = \operatorname{Atan} 2(p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1, p_{Wz})$$

Quadrando e sommando le prime due:

$$d_3 = \sqrt{(p_{Wx}c_1 + p_{Wy}s_1)^2 + p_{Wz}^2}$$

Manipolatore antropomorfo



Proiettando sul piano (x_0, y_0) si ottiene:

$$\vartheta_1 = \text{Atan } 2(p_{Wy}, p_{Wx})$$

oppure:

$$\vartheta_1 = \pi + \text{Atan } 2(p_{Wy}, p_{Wx})$$

Determinato ϑ_1 la struttura è planare, per cui:

$$c_3 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \Rightarrow \vartheta_3 = \text{Atan } 2(s_3, c_3)$$

$$s_3 = \pm \sqrt{1 - c_3^2}$$

altre 2 soluzioni

$$c_2 = \frac{(a_2 + a_3c_3)\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3s_3p_{Wz}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2}$$

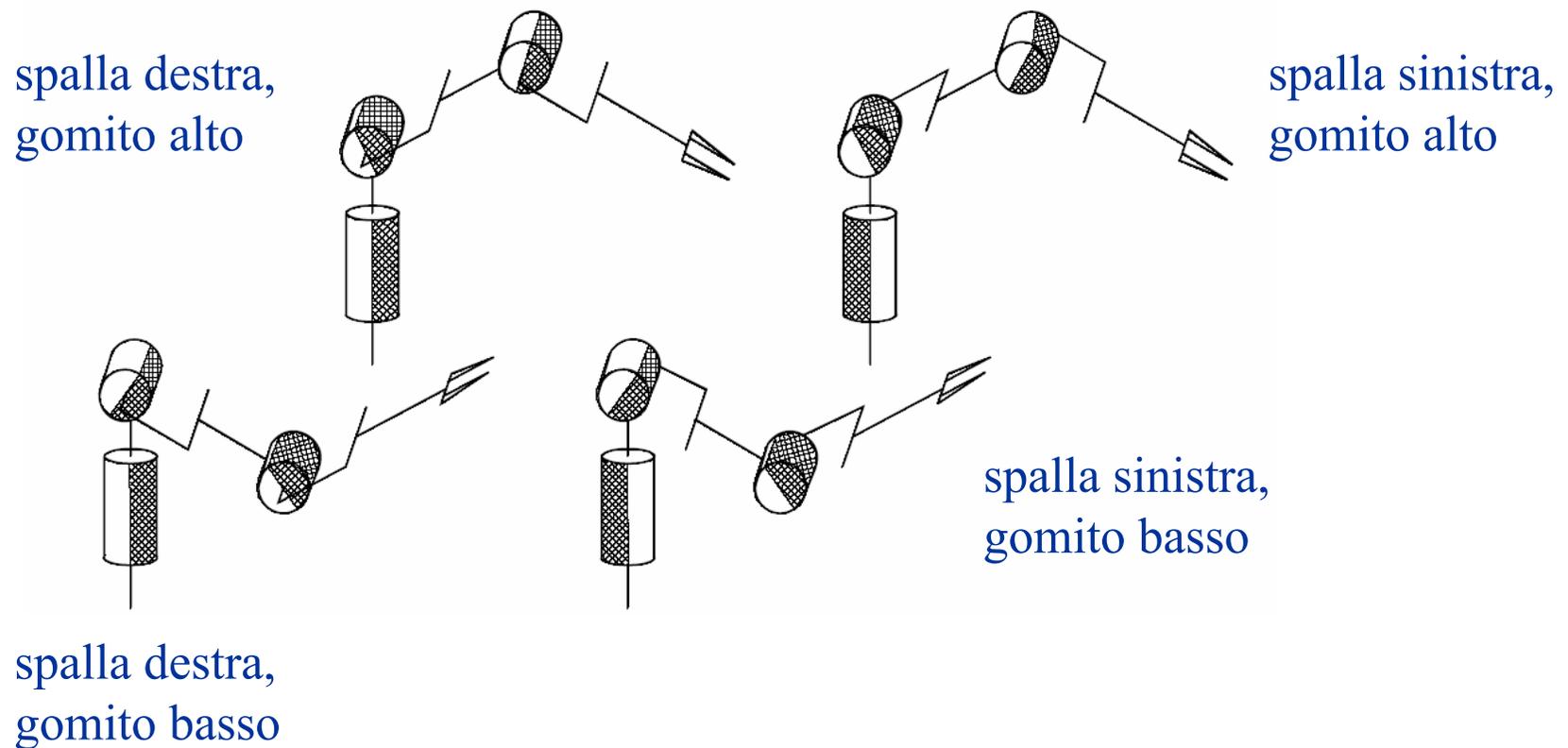
$$\Rightarrow \vartheta_2 = \text{Atan } 2(s_2, c_2)$$

$$s_2 = \frac{(a_2 + a_3c_3)p_{Wz} - a_3s_3\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2}$$

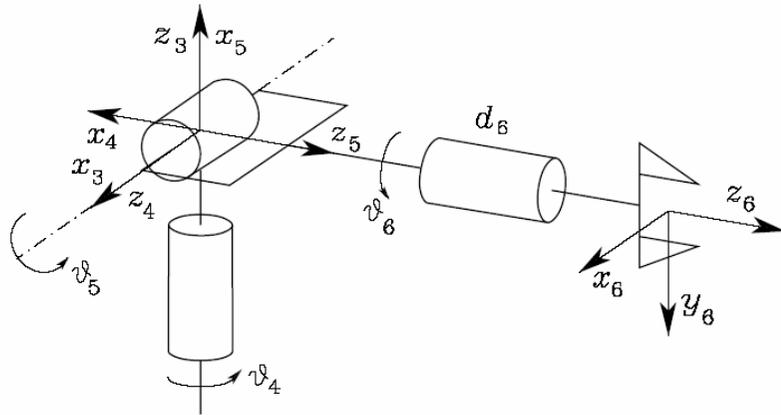
Manipolatore antropomorfo



Esistono quattro configurazioni ammissibili:



Polso sferico



Il dato del problema è la matrice:

$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix}$$

Per la soluzione, si utilizzano le formule note per gli angoli di Eulero ZYZ:

$$\begin{aligned} \vartheta_5 \in (0, \pi): \quad \vartheta_4 &= \text{Atan 2}(a_y^3, a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \text{Atan 2}\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan 2}(s_z^3, -n_z^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_5 \in (-\pi, 0): \quad \vartheta_4 &= \text{Atan 2}(-a_y^3, -a_x^3) \\ \vartheta_5 &= \text{Atan 2}\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan 2}(-s_z^3, n_z^3) \end{aligned}$$