Controllo dei robot

Cinematica differenziale e statica

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

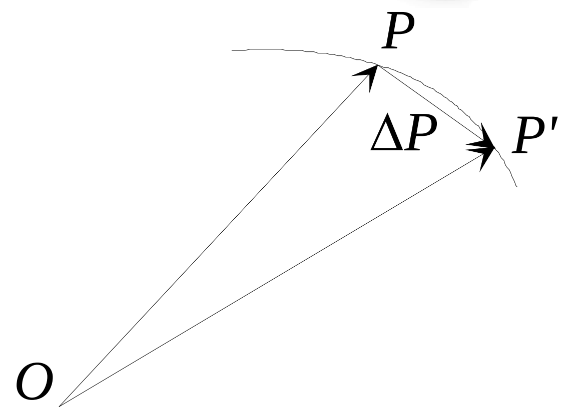
Nota:
Diversi disegni riportati in queste slide sono tratti dal testo:
L.Sciavicco, B.Siciliano
Robotica industriale –
Modellistica e controllo di robot manipolatori
(2a ed.) Mc Graw-Hill, 2000

Parte I

Cinematica differenziale

Velocità di un punto

Consideriamo un punto P in moto rispetto ad un osservatore in O. Siano:



P la posizione all'istante t (ossia il vettore $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{O}$)

P' la posizione all'istante $t+\Delta t$

$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}'-\boldsymbol{P}$ lo spostamento del punto nell'intervallo Δt

Consideriamo il vettore $\Delta\boldsymbol{P}/\Delta t$ e valutiamone il limite per Δt tendente a 0.

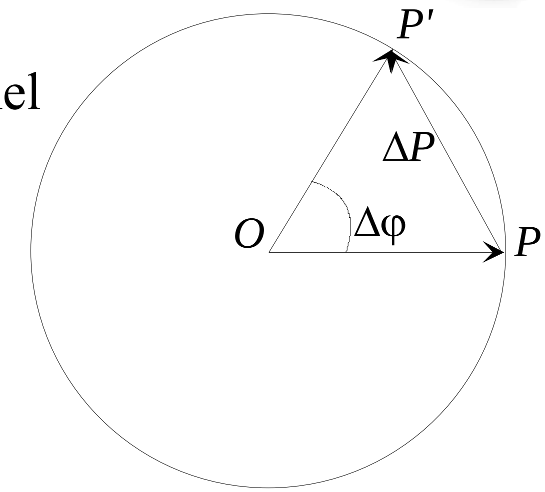
Otteniamo il vettore **velocità del punto:**

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{P}(t)}{dt}$$

Il vettore è diretto come la tangente alla traiettoria nel punto P.

Velocità di un punto in moto rotatorio

Si supponga che il punto P sia in moto lungo una circonferenza. Sia $\Delta\varphi$ l'angolo che ne descrive il moto nel passaggio dal punto P a P'.



Sia $\boldsymbol{r}$ il versore di un asse ortogonale al piano della circonferenza, passante per il centro O ed uscente dal foglio.

Se l'angolo $\Delta\varphi$ è infinitesimo, risulta:

$$\Delta\boldsymbol{P} = \Delta\varphi\boldsymbol{r} \times \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}\right)$$

Dividendo per Δt e prendendo il limite per Δt tendente a 0 si ha la velocità del punto:

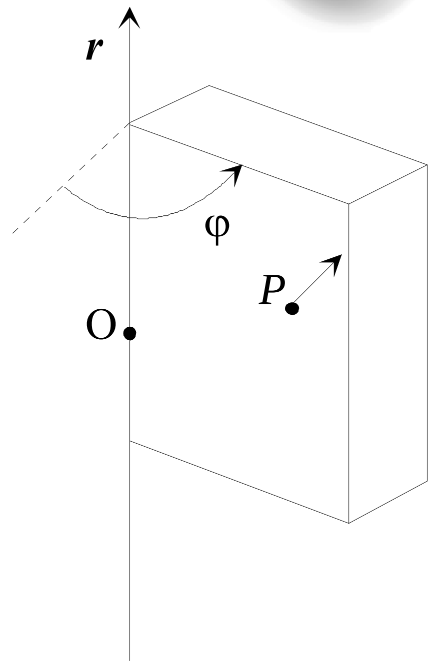
$$\boldsymbol{v} = \dot{\varphi}\boldsymbol{r} \times \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}\right)$$

N.B.: Prodotto vettoriale $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

Direzione: ortogonale al piano di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$
Verso: regola della mano destra
Modulo: $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin(\vartheta)$, ϑ: angolo tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

Moto rotatorio intorno ad asse fisso

Si abbia un corpo rigido in rotazione intorno ad un asse fisso. Sia $\boldsymbol{r}$ il versore dell'asse di rotazione e:



O un punto sull'asse

P un punto solidale con il corpo in moto

φ l'angolo formato rispetto ad un riferimento

La velocità del punto P si ottiene, qualunque sia O, come:

$$\boldsymbol{v} = \omega \times \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}\right)$$

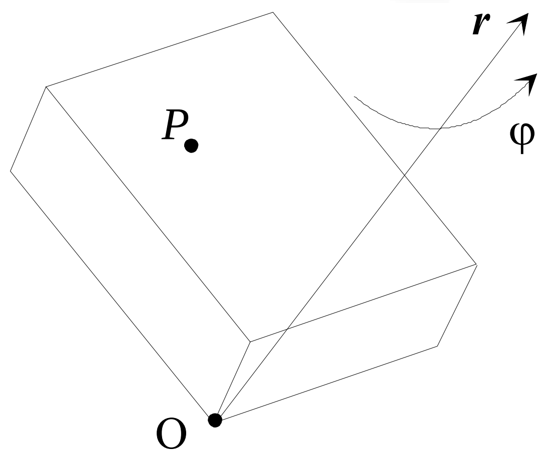
con ω vettore **velocità angolare**, genericamente funzione del tempo.

Risulta inoltre:

$$\omega = \dot{\varphi}\boldsymbol{r}$$

(la direzione ed il verso di ω sono quelli del versore $\boldsymbol{r}$).

Moto rotatorio con punto fisso



Si abbia un corpo rigido in rotazione con un punto O fisso (moto polare).

E' noto che la rotazione di una terna solidale con il corpo rispetto ad una terna fissa con origine in O è sempre rappresentabile con una rotazione di un angolo φ intorno ad un asse $\boldsymbol{r}$ (rappresentazione asse-angolo).

La velocità di un punto P del corpo si ottiene allora come:

$$\boldsymbol{v} = \omega \times (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O})$$

con ω vettore **velocità angolare**, funzione del tempo, ma non del punto P (è la stessa per tutti i punti del corpo).

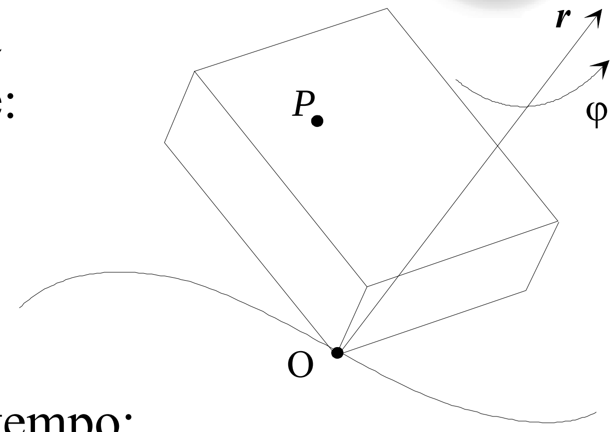
Risulta inoltre:

$$\omega = \dot{\varphi}\boldsymbol{r}$$

La direzione ed il verso di ω sono quelli del versore $\boldsymbol{r}$, e cambiano ad ogni istante ($\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$): asse di *istantanea* rotazione).

Moto rototraslatorio

Il più generale moto di un corpo rigido è quello in cui la velocità di un generico punto P si possa esprimere come:

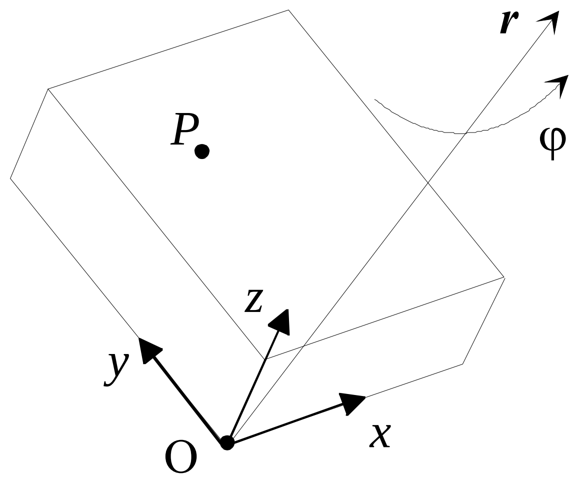


$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_o + \omega \times \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O} \right)$$

O è un punto prefissato solidale al corpo

ω è il vettore **velocità angolare** del corpo funzione del tempo:

non dipende né da P, né da O.



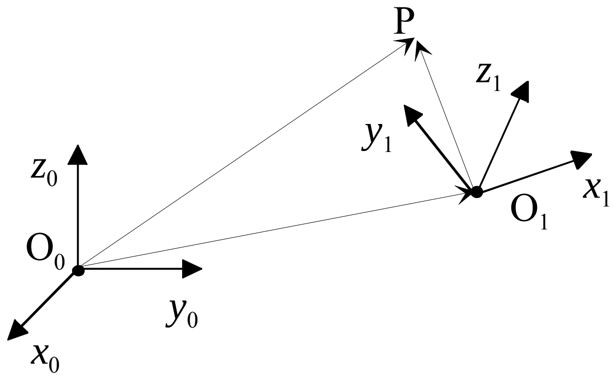
Se poi consideriamo una terna solidale con il corpo:

$\boldsymbol{v}_o$ è la velocità (lineare) dell'origine O della terna rispetto ad un osservatore fisso

ω è definibile come velocità angolare della terna stessa

Cinematica relativa

Consideriamo un osservatore che diciamo “fisso” ed un secondo osservatore in moto rispetto al primo. Sia P un punto mobile: i due osservatori descriveranno il moto di P con leggi diverse.



Associamo a ciascun osservatore una terna. Siano:

V la velocità di P rispetto all’osservatore fisso

v la velocità di P rispetto all’osservatore mobile

Risulta (regola del *parallelogramma* delle velocità):

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}_s$$

con:

$$\boldsymbol{V}_s = \boldsymbol{V}_{o1} + \omega_1 \times \left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}_1\right)$$

velocità di trascinamento (velocità che avrebbe P se si muovesse solidalmente con la terna mobile).

ω_1 è la velocità angolare della terna mobile rispetto alla terna fissa.

Jacobiano geometrico

Consideriamo ora un manipolatore robotico ed in particolare analizziamo il moto della terna utensile (solidale con l'organo terminale).
Come visto, possiamo definire la velocità lineare e la velocità angolare di tale terna: $\dot{\boldsymbol{p}}$ e ω.

Obiettivo della **cinematica differenziale** è di esprimere queste velocità in funzione delle velocità delle variabili di giunto.

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$
$$\omega = \boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \omega \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

La matrice ($6\times n$): $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$

Prende il nome di **Jacobiano geometrico** del manipolatore.

Derivata di una matrice di rotazione

Ci proponiamo di calcolare la derivata rispetto al tempo di una matrice di rotazione. Dall'ortogonalità della matrice:

$$\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{R}^T(t) = \boldsymbol{I} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^T(t) + \boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}^T(t) = \boldsymbol{0}$$

Posto: $\boldsymbol{S}(t) = \dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^T(t)$

si ha: $\boldsymbol{S}(t) + \boldsymbol{S}^T(t) = \boldsymbol{0}$ per cui la matrice $\boldsymbol{S}$ è **antisimmetrica**.

Concludiamo che la derivata della matrice di rotazione è data da:

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \boldsymbol{S}(\omega(\boldsymbol{t}))\boldsymbol{R}(t)$$

con:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice antisimmetrica

Consideriamo un vettore $\boldsymbol{p}'$ costante ed un secondo vettore ottenuto per mezzo di una rotazione funzione del tempo:

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{p}'$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{S}(\omega(t))\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{p}'$$

D'altra parte la velocità del punto descritto dal vettore $\boldsymbol{p}$ si può esprimere anche come:

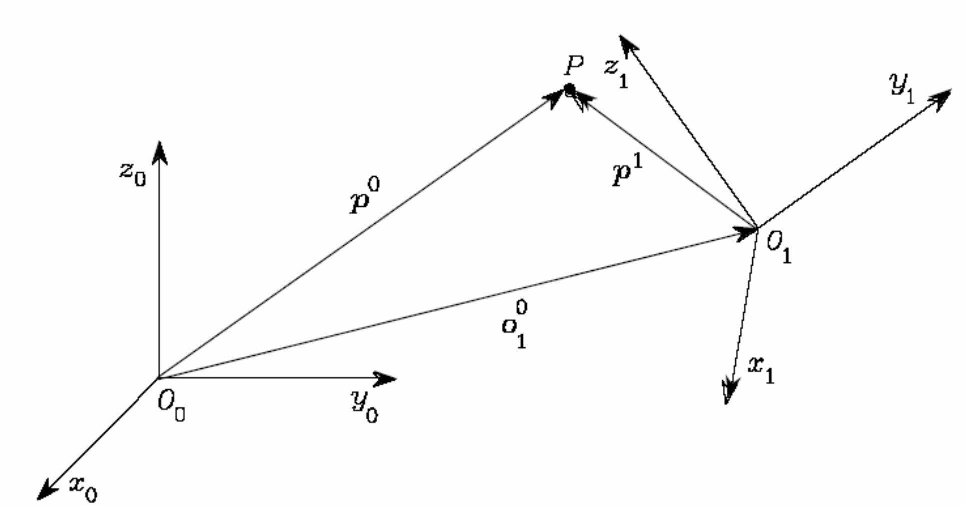
$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \omega(t) \times \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{p}'$$

Pertanto:

- ω è la velocità angolare
- $\boldsymbol{S}$ è interpretabile come operatore che descrive il prodotto vettoriale

Composizione delle velocità

Consideriamo la trasformazione di coordinate di un punto P dalla terna 1 alla terna 0:



$$\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{o}_1^0 + \boldsymbol{R}_1^0 \boldsymbol{p}^1$$

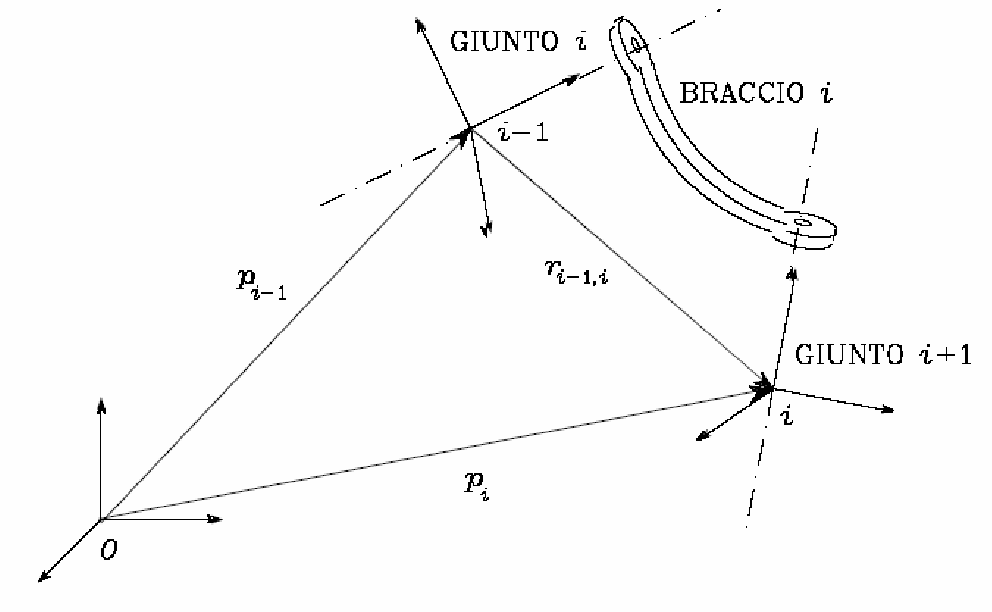
$$\boldsymbol{r}_1^0 = \boldsymbol{R}_1^0 \boldsymbol{p}^1$$

Derivando:

$$\dot{\boldsymbol{p}}^0 = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0 + \boldsymbol{R}_1^0 \dot{\boldsymbol{p}}^1 + \dot{\boldsymbol{R}}_1^0 \boldsymbol{p}^1 = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0 + \boldsymbol{R}_1^0 \dot{\boldsymbol{p}}^1 + \boldsymbol{S}\left(\omega_1^0\right) \boldsymbol{R}_1^0 \boldsymbol{p}^1 =$$

$$= \underbrace{\dot{\boldsymbol{o}}_1^0 + \omega_1^0 \times \boldsymbol{r}_1^0}_{\text{velocità di trascinamento}} + \underbrace{\boldsymbol{R}_1^0 \dot{\boldsymbol{p}}^1}_{\text{velocità relativa}}$$

Velocità lineare di un braccio



(si omette l'indicazione esplicita del riferimento alla terna 0)

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_{i-1} + \boldsymbol{R}_{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1,i}^{i-1}$$

origine della terna i rispetto alla terna $i-1$, espressa nella terna $i-1$

Derivando:

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{R}_{i-1}\dot{\boldsymbol{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{R}_{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1,i}^{i-1} =$$

$$= \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}$$

velocità dell'origine della terna i rispetto alla terna $i-1$, espressa in terna base

Velocità angolare di un braccio

Partiamo dalla relazione: $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_{i-1}\boldsymbol{R}_i^{i-1}$

Derivando:

Velocità angolare della terna *i* rispetto alla terna *i*−1, espressa nella terna *i*−1

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}(\omega_i)\boldsymbol{R}_i &= \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{R}_{i-1}\boldsymbol{S}\left(\omega_{i-1,i}^{i-1}\right)\boldsymbol{R}_i^{i-1} = \\
&= \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{R}_{i-1}\boldsymbol{S}\left(\omega_{i-1,i}^{i-1}\right)\boldsymbol{R}_{i-1}^T\boldsymbol{R}_{i-1}\boldsymbol{R}_i^{i-1} = \quad \text{(si può dimostrare)} \\
&= \boldsymbol{S}(\omega_{i-1})\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{R}_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1}\right)\boldsymbol{R}_i
\end{aligned}
$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
\omega_i &= \omega_{i-1} + \boldsymbol{R}_{i-1}\omega_{i-1,i}^{i-1} = \\
&= \omega_{i-1} + \omega_{i-1,i}
\end{aligned}
$$

ovvero le velocità angolari si sommano.

Giunto prismatico e giunto rotoidale

- **Giunto prismatico**

$$\omega_{i-1,i} = 0$$

$$\boldsymbol{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1}$$

Pertanto:

$$\omega_i = \omega_{i-1}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \omega_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}$$

- **Giunto rotoidale**

$$\omega_{i-1,i} = \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1}$$

$$\boldsymbol{v}_{i-1,i} = \omega_{i-1,i} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}$$

Pertanto:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \omega_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}$$

Calcolo dello Jacobiano

Partizioniamo lo Jacobiano in n colonne, ciascuna delle quali, a sua volta, partizionata in due:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{j}_{P1} & & \boldsymbol{j}_{Pn} \\ & \cdots & \\ \boldsymbol{j}_{O1} & & \boldsymbol{j}_{On} \end{bmatrix}$$

$\dot{q}_i \boldsymbol{j}_{Pi}$: contributo del giunto i alla velocità lineare

$\dot{q}_i \boldsymbol{j}_{Oi}$: contributo del giunto i alla velocità angolare

- **Velocità angolare**

Giunto i prismatico:

$$\dot{q}_i \boldsymbol{j}_{Oi} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{j}_{Oi} = \boldsymbol{0}$$

Giunto i rotoidale:

$$\dot{q}_i \boldsymbol{j}_{Oi} = \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{j}_{Oi} = \boldsymbol{z}_{i-1}$$

Calcolo dello Jacobiano

• **Velocità lineare**

Giunto i prismatico:

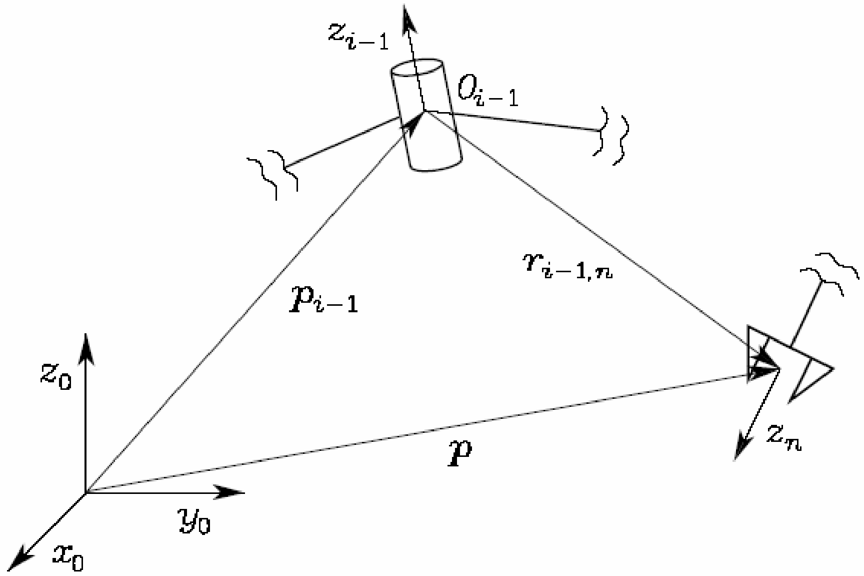
$$\dot{q}_i \boldsymbol{j}_{Pi} = \dot{d}_i \boldsymbol{z}_{i-1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{j}_{Pi} = \boldsymbol{z}_{i-1}$$

Giunto i rotoidale:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i \boldsymbol{j}_{Pi} &= \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \boldsymbol{r}_{i-1,n} = \\ &= \dot{\vartheta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1}) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{j}_{Pi} = \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1})$$



Calcolo dello Jacobiano

Possiamo calcolare lo Jacobiano geometrico per colonne:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{j}_{Pi} \\ \boldsymbol{j}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{giunto prismatico} \\ \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \times \left(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_{i-1} \right) \\ \boldsymbol{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

Gli elementi per il calcolo di queste colonne si ricavano da relazioni cinematiche dirette:

$$\boldsymbol{z}_{i-1} = \boldsymbol{R}_1^0(q_1)\ldots\boldsymbol{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\boldsymbol{z}_0$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{A}_1^0(q_1)\ldots\boldsymbol{A}_n^{n-1}(q_n)\tilde{\boldsymbol{p}}_0$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_{i-1} = \boldsymbol{A}_1^0(q_1)\ldots\boldsymbol{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\tilde{\boldsymbol{p}}_0$$

dove:

$$\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{p}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(coordinate omogenee)

Rappresentazione in una terna differente

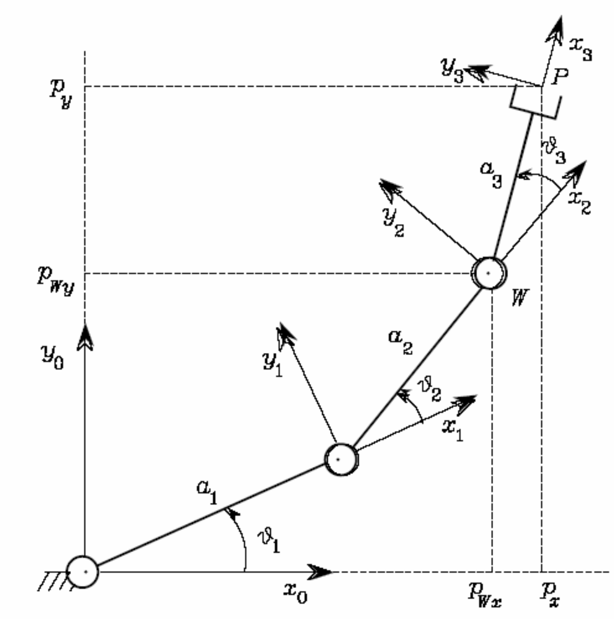
L'espressione dello Jacobiano dipende dalla terna rispetto alla quale si esprime la velocità dell'organo terminale. Supponiamo di esprimere tale velocità in una nuova terna *t*:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}^t \\ \omega^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^t & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^t & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}^t \end{bmatrix} \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}$$

Pertanto lo Jacobiano riferito alla nuova terna *t* è legato allo Jacobiano originario dalla relazione:

$$\boldsymbol{J}^t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^t & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}^t \end{bmatrix} \boldsymbol{J}$$

Manipolatore planare a tre bracci



$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) & \boldsymbol{z}_2 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2) \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

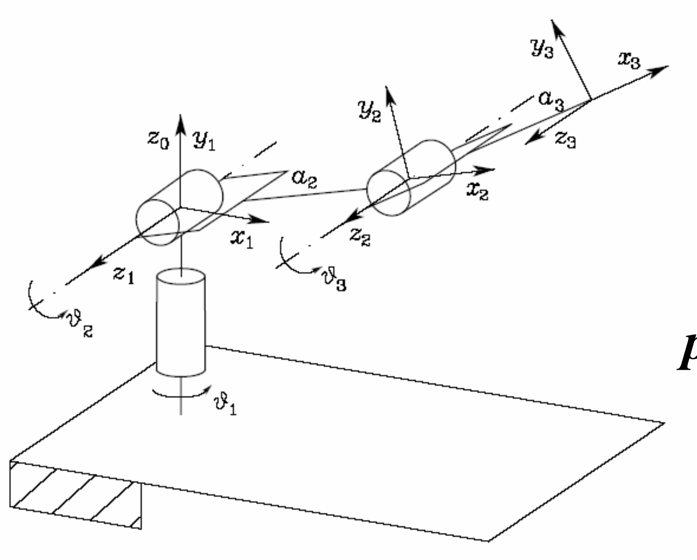
$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \left[\begin{array}{ccc} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

N.B.:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo



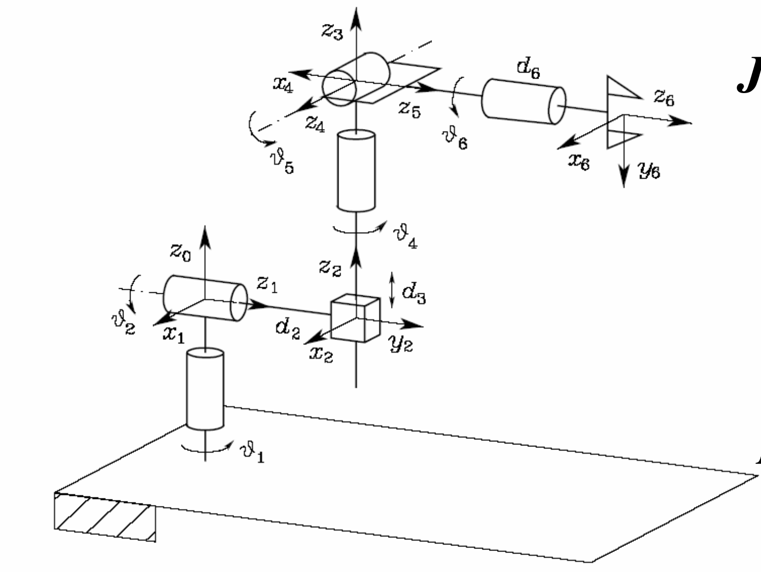
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) & \boldsymbol{z}_2 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2) \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \left[\begin{array}{ccc} -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ \hdashline 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Manipolatore di Stanford



$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 & z_3 \times (p - p_3) & z_4 \times (p - p_4) & z_5 \times (p - p_5) \\ z_0 & z_1 & \mathbf{0} & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_3 = p_4 = p_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2) \\ c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5) \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = z_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad z_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix} \quad z_5 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5 \\ c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2 \\ c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5 \end{bmatrix}$$

Jacobiano analitico

Consideriamo l'equazione cinematica diretta di un manipolatore:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) \\ \phi(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

dove ϕ costituisce una rappresentazione minima dell'orientamento. Derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{k}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

D'altra parte:

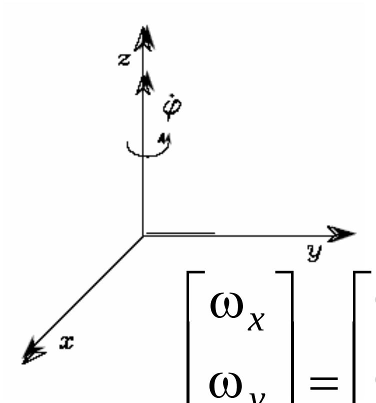
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\ (\partial \phi(\boldsymbol{q})/\partial \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

La matrice: $$\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_\phi(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

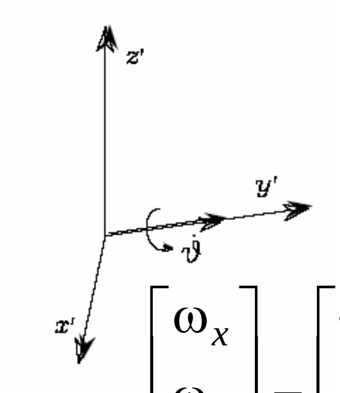
Prende il nome di **Jacobiano analitico** del manipolatore.

Legame tra ω e $\dot{\phi}$

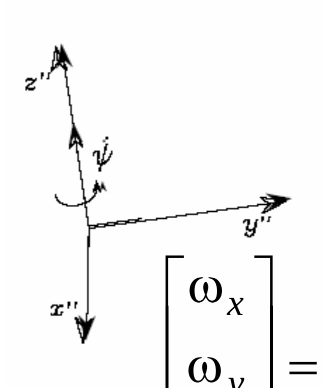
Esprimiamo l'orientamento con gli angoli di Eulero ZYZ, e consideriamo il vettore velocità angolare derivante da ciascuna rotazione elementare:



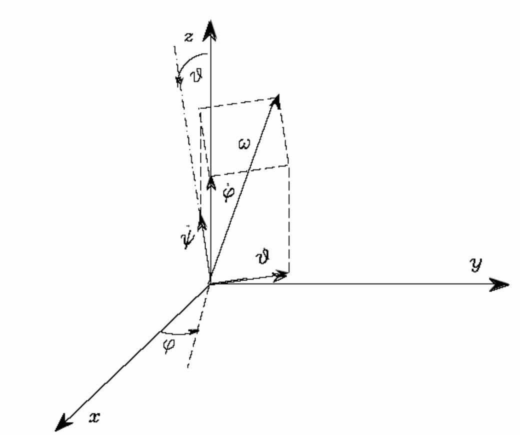
$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}$$



$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\varphi \\ c_\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\vartheta}$$



$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi s_\vartheta \\ c_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\psi}$$



Componendo le rotazioni elementari:

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta \\ 1 & 0 & c_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\phi} = \boldsymbol{T}(\phi)\dot{\phi}$$

Jacobiano analitico e Jacobiano geometrico

Esprimiamo la velocità (lineare ed angolare) della terna utensile in termini delle derivate di $\boldsymbol{p}$ e ϕ:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}(\phi) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}_A(\phi)\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}_A(\phi)\boldsymbol{J}_A\dot{\boldsymbol{q}}$$

Ne consegue:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}_A(\phi)\boldsymbol{J}_A$$

Esprimendo l'orientamento con gli angoli di Eulero ZYZ:

$$\det\left(\boldsymbol{T}_A(\phi)\right) = \det\left(\boldsymbol{T}(\phi)\right) = -s_\vartheta$$

Per $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi$, la matrice è singolare: si parla in questo caso di singolarità di rappresentazione.

Singolarità cinematiche

Riprendiamo la relazione che definisce lo Jacobiano geometrico:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

I valori di $\boldsymbol{q}$ per cui la matrice $\boldsymbol{J}$ diminuisce di rango prendono il nome di **singolarità cinematiche**. In presenza di singolarità cinematiche si ha:

1. Perdita di mobilità (non è possibile imporre leggi di moto arbitrarie)
2. Possibilità di infinite soluzioni al problema cinematico inverso
3. Velocità elevate nello spazio dei giunti (nell'intorno di singolarità)

Le singolarità possono essere:

1. **Ai confini** dello spazio di lavoro raggiungibile
2. **All'interno** dello spazio di lavoro raggiungibile

Queste ultime sono più problematiche, perché ci si può incorrere con traiettorie pianificate nello spazio operativo.

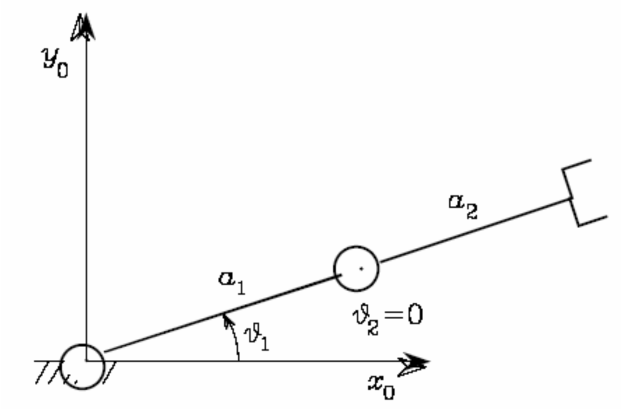
Singolarità cinematiche: esempio

Consideriamo un manipolatore planare a due bracci:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Determiniamone le singolarità:

$$\det(\boldsymbol{J}) = a_1 a_2 s_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

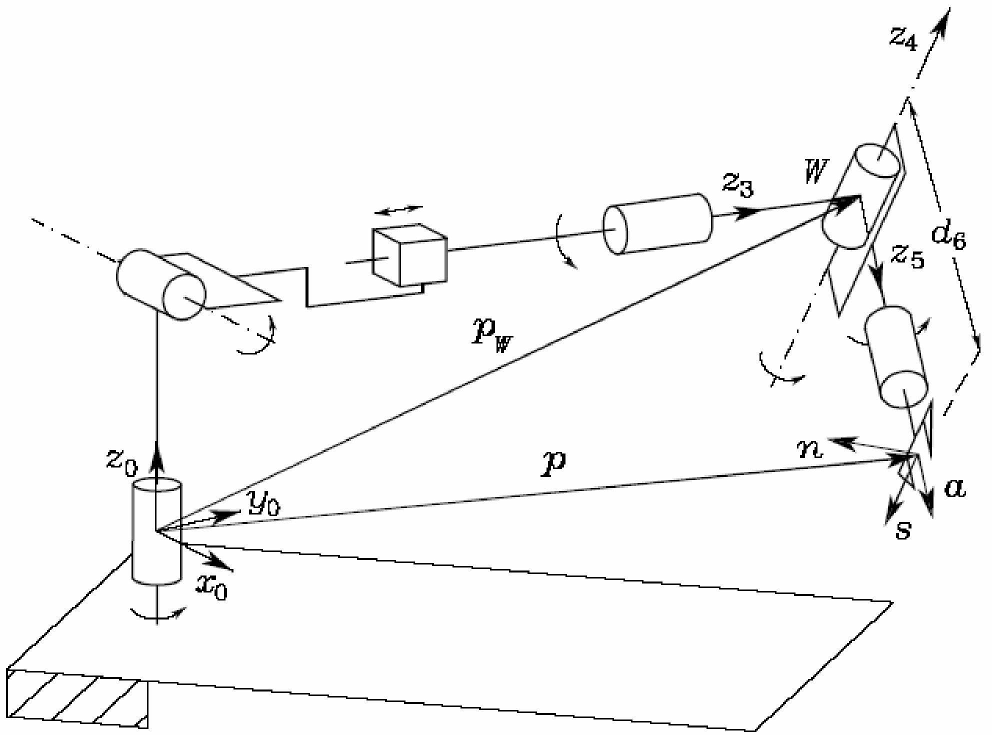


Si tratta di singolarità ai confini dello spazio di lavoro.

In queste configurazioni, le due colonne dello Jacobiano non sono indipendenti.

Disaccoppiamento di singolarità

Consideriamo un manipolatore con polso sferico:



Articoliamo la ricerca delle singolarità in due sottoproblemi:

1. Calcolo delle singolarità della **struttura portante**
2. Calcolo delle singolarità del **polso**

Disaccoppiamento di singolarità

Consideriamo per semplicità il caso n = 6 e partizioniamo lo Jacobiano:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}$$

Poiché gli ultimi tre giunti sono tutti di rotazione:

$$\boldsymbol{J}_{12} = \left[\boldsymbol{z}_3 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_3) \quad \boldsymbol{z}_4 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_4) \quad \boldsymbol{z}_5 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_5) \right]$$
$$\boldsymbol{J}_{22} = \left[\boldsymbol{z}_3 \quad \boldsymbol{z}_4 \quad \boldsymbol{z}_5 \right]$$

D'altra parte le singolarità sono caratteristiche della struttura meccanica (e non delle terne). Possiamo pertanto scegliere l'origine della terna che descrive l'orientamento nel centro polso ($\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_W$). In questo modo $\boldsymbol{p}_W - \boldsymbol{p}_i$ sono paralleli a $\boldsymbol{z}_i$ per i = 3,4,5, e quindi:

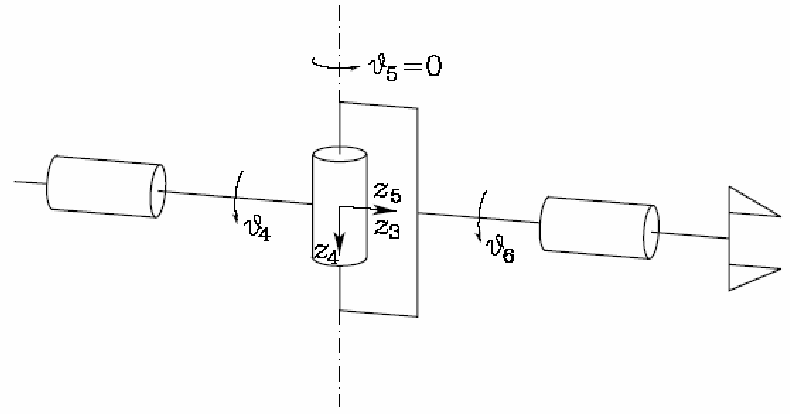
$$\boldsymbol{J}_{12} = \left[\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \right]$$

$$\det(\boldsymbol{J}) = \det(\boldsymbol{J}_{11})\det(\boldsymbol{J}_{22}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \det(\boldsymbol{J}_{11}) = 0 & \text{singolarità di struttura portante} \\ \det(\boldsymbol{J}_{22}) = 0 & \text{singolarità di polso} \end{cases}$$

Singolarità di polso

$$J_{22} = [z_3 \quad z_4 \quad z_5]$$

Lo Jacobiano è singolare se z_3 è parallelo a z_5 (ϑ_5=0, ϑ_5=π):



Rotazioni uguali e opposte di ϑ_4 e ϑ_6 non producono alcuna rotazione dell'organo terminale. Inoltre il polso non è in grado di effettuare rotazioni attorno all'asse ortogonale a z_3 e z_4.

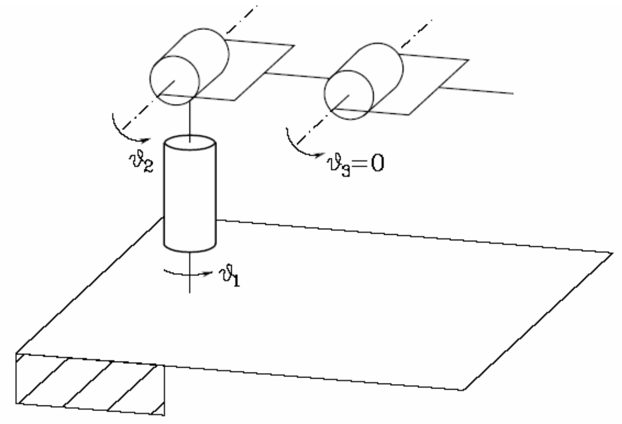
È una singolarità difficile da individuare in una pianificazione del moto nello spazio operativo.

Singolarità di struttura portante

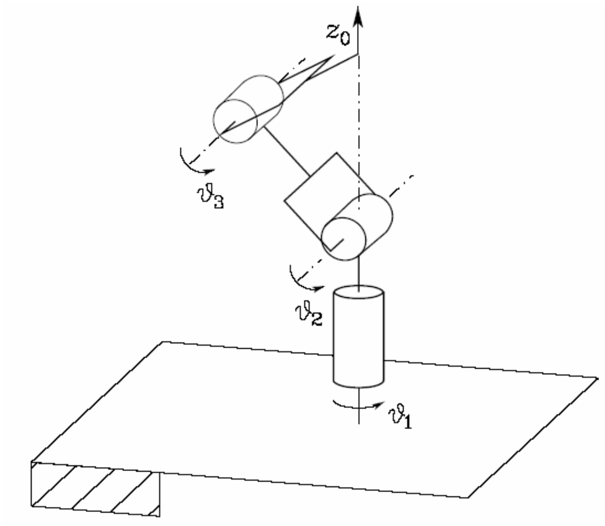
Consideriamo un manipolatore antropomorfo:

$$\det(\boldsymbol{J}_P) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vartheta_3 = 0,\ \vartheta_3 = \pi & \text{singolarità di gomito} \\ a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0 & \text{singolarità di spalla} \end{cases}$$

Singolarità di gomito



Singolarità di spalla



Sono singolarità che si caratterizzano facilmente nello spazio operativo.

Dalla cinematica diretta:
$$p_x = c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0$$
$$p_y = s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0$$

Inversione della cinematica differenziale

L'equazione cinematica differenziale è **lineare** per un dato valore di $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

Data la velocità $\boldsymbol{v}$ nello spazio operativo e una condizione iniziale su $\boldsymbol{q}$ possiamo allora pensare di risolvere il problema della cinematica inversa invertendo la cinematica differenziale ed integrando. Se lo Jacobiano è quadrato ($n = r$, numero di coordinate dello spazio operativo necessarie per descrivere il compito):

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{q}(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{q}}(\sigma)d\sigma + \boldsymbol{q}(0)$$

Discretizzando con una formula di integrazione numerica:

$$\boldsymbol{q}(t_{k+1}) = \boldsymbol{q}(t_k) + \dot{\boldsymbol{q}}(t_k)\Delta t$$

Nell'intorno di singolarità cinematiche si possono usare inverse ai minimi quadrati smorzate.

Algoritmi per l'inversione cinematica

$$\boldsymbol{q}(t_{k+1}) = \boldsymbol{q}(t_k) + \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}(t_k))\boldsymbol{v}(t_k)\Delta t$$

Utilizzando direttamente questa formula si incorre in **derive** della soluzione.

Introduciamo allora l'errore, nello spazio operativo, commesso dall'algoritmo di inversione cinematica:

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}$$

e la sua derivata:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

Ci proponiamo di individuare una dipendenza di $\dot{\boldsymbol{q}}$ da $\boldsymbol{e}$ che assicuri la convergenza a zero dell'errore nello spazio operativo.

Inversa dello Jacobiano

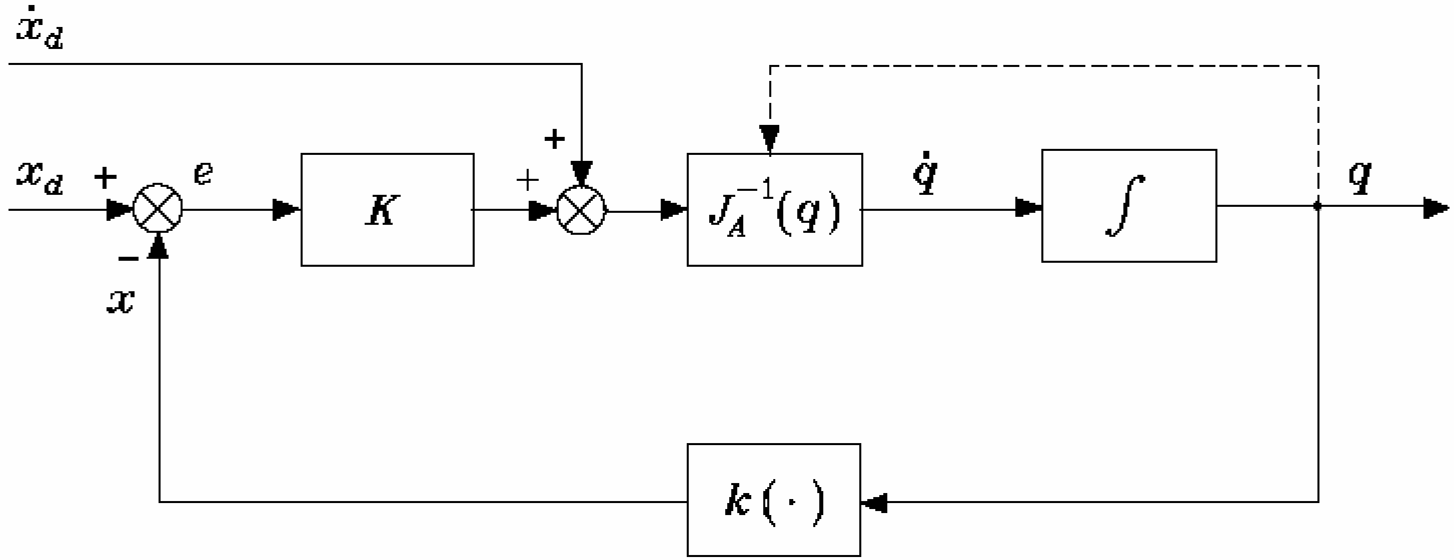
Se adottiamo la seguente legge di dipendenza:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A^{-1}(\boldsymbol{q})(\dot{\boldsymbol{x}}_d + \boldsymbol{K}\boldsymbol{e})$$

otteniamo:

$$\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$

e lo schema:



Se $\boldsymbol{K}$ è una matrice definita positiva il sistema è asintoticamente stabile e l'errore decade a zero. La velocità di convergenza dipende dagli autovalori di $\boldsymbol{K}$.

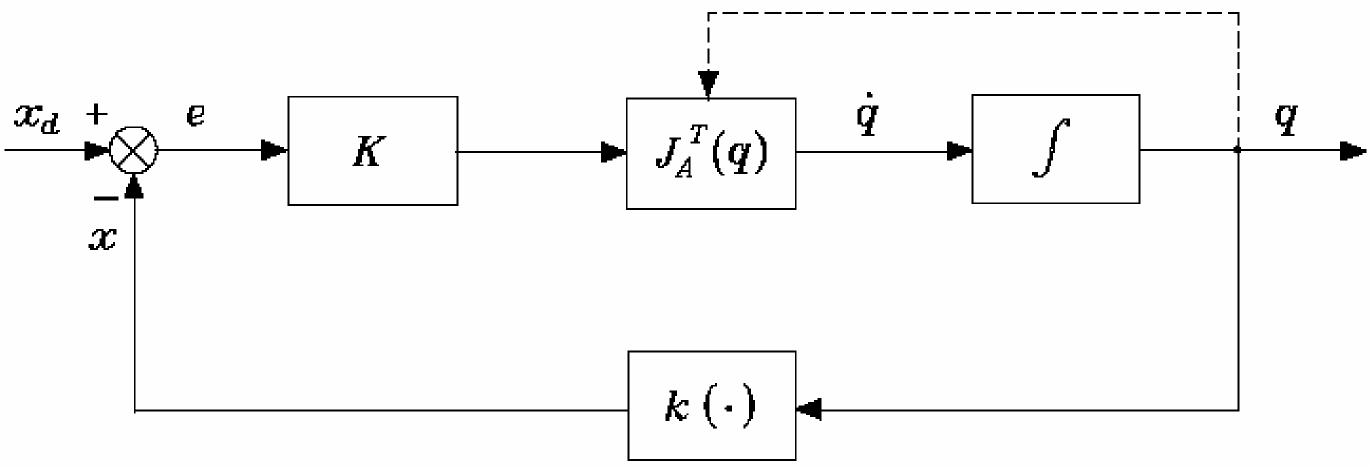
Se $\dot{\boldsymbol{x}}_d = 0$ il metodo corrisponde al metodo di Newton per la soluzione di sistemi non lineari.

Trasposta dello Jacobiano

Se adottiamo la seguente legge di dipendenza:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}$$

otteniamo
lo schema:



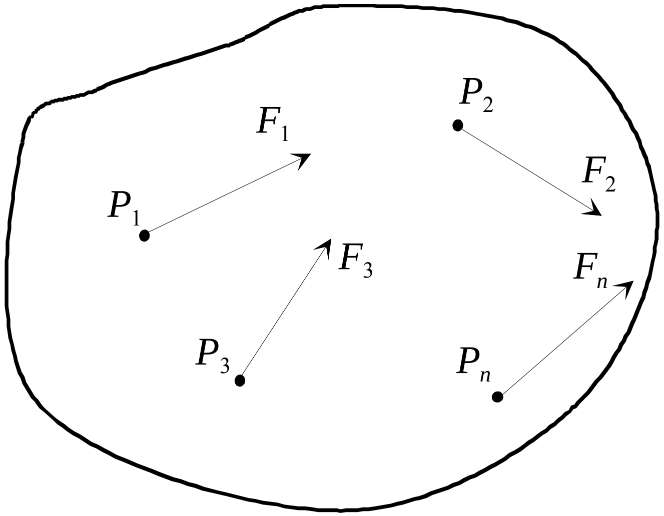
Utilizzando il metodo di Lyapunov si può dimostrare che l'errore $\boldsymbol{e}$ è limitato e decade a zero.
Il vantaggio è che si usano solo funzioni cinematiche dirette

Se $\dot{\boldsymbol{x}}_d = 0$ il metodo corrisponde al metodo del gradiente per la soluzione di sistemi non lineari.

Parte II

Statica

Sistemi di forze



Consideriamo un sistema di forze agenti su un corpo rigido.
Ciascuna forza è rappresentabile da un vettore applicato in un punto.

Come si riduce questo sistema di forze? C'è un modo per ridurlo ad un sistema di forze più semplice?

Siamo interessati in particolare alla **statica del corpo** ovvero alle condizioni in base alle quali il sistema di forze, applicato al corpo rigido, lo lascia nella stessa condizione di quiete che aveva prima dell'applicazione delle forze (si dice in questo caso che il corpo è in *equilibrio*).

Postulati fondamentali

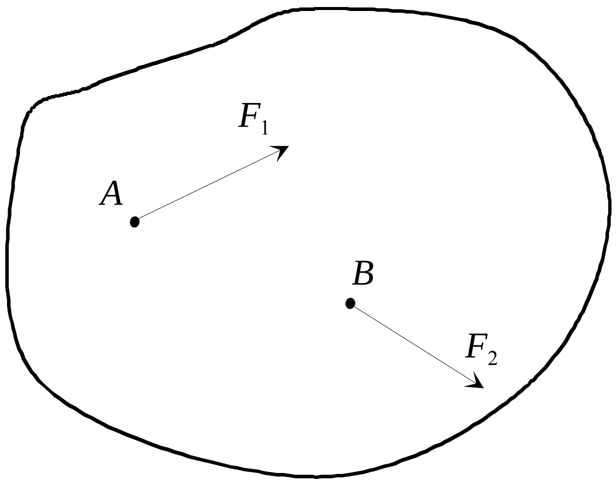
1. Non si altera l'equilibrio di un corpo sostituendo ad un insieme di forze applicate in un punto il **risultante** (cioè la forza rappresentata dal vettore somma vettoriale delle singole forze) applicato allo stesso punto, oppure se si sostituisce ad una forza applicata in un punto altre forze aventi per somma vettoriale la prima ed applicate nel punto.
2. Non si altera l'equilibrio di un corpo rigido se si trasporta il punto di applicazione di una forza lungo la sua **retta di applicazione** (postulato valido solo per i corpi rigidi).

Due sistemi di forze applicate al corpo rigido ottenuti passando dall'uno all'altro eseguendo, anche in sequenza, le suddette operazioni, si dicono **equipollenti**: il passaggio da un sistema all'altro non altera lo stato di equilibrio del corpo.

Riduzione dei sistemi di forze

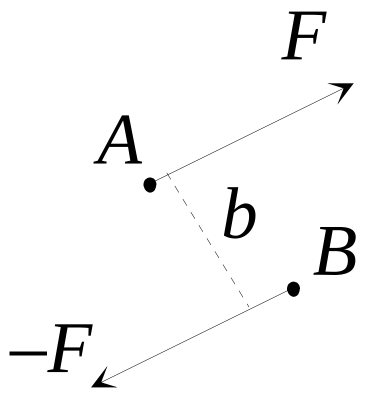
Con semplici ragionamenti si conclude che:
• un sistema di forze le cui rette di applicazione concorrono in un punto
• un sistema di forze parallele a risultante non nullo
• un sistema di forze piane a risultante non nullo
sono tutti equipollenti ad un'unica forza.

Con un ragionamento un po' più complesso, si dimostra che un sistema generale di forze può sempre ridursi a **due forze**, una delle quali applicate in un punto prefissato.



Coppia

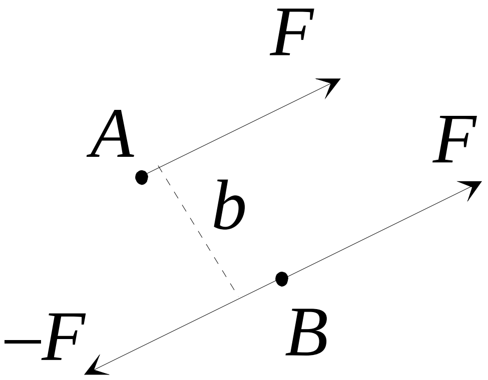
Consideriamo ora un sistema di forze a risultante nullo. Esso è equipollente a due forze opposte $\boldsymbol{F}$ e $-\boldsymbol{F}$, applicate in due punti A e B. Se le due forze hanno la stessa retta di applicazione, possono sopprimersi, altrimenti, se le rette di applicazione sono parallele, costituiscono una **coppia**.



Sono facilmente definibili il *piano* della coppia (piano cui appartengono le due rette d'applicazione), il *braccio b* (distanza tra le due rette) ed il *verso*.

Riduzione ad una forza e una coppia

Aggiungendo una coppia, è possibile spostare una forza da un punto di applicazione ad un altro.



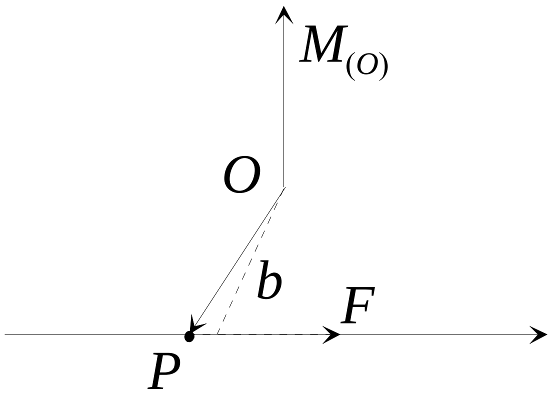
Si abbia la forza $\boldsymbol{F}$ applicata nel punto A. Aggiungiamo le due forze opposte $\boldsymbol{F}$ e $-\boldsymbol{F}$, applicate nel punto B. Si ottiene la forza $\boldsymbol{F}$ applicata nel punto B, e la coppia di forze $\boldsymbol{F}$ e $-\boldsymbol{F}$, applicate in A e B.

Per quanto detto finora, si conclude che un generico sistema di forze agenti su un corpo rigido, è equipollente ad **una forza**, applicata in un punto prefissato, e ad **una coppia**.

Momento di una forza rispetto ad un polo

Sia $\boldsymbol{F}$ una forza applicata in un punto P. Il momento della forza rispetto al polo O è definito dal prodotto vettoriale:

$$\boldsymbol{M}_{(O)} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{F}$$



Il modulo del vettore momento è dato dal prodotto del modulo di $\boldsymbol{F}$ per la distanza b del polo dalla retta di applicazione della forza.

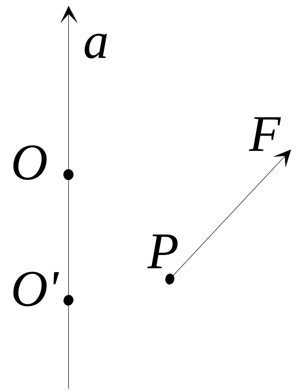
Di fatto il momento non dipende dalla scelta di P sulla retta di applicazione della forza $\boldsymbol{F}$.

Se invece del polo O si considera il polo O', si ottiene:

$$\boldsymbol{M}_{(O')} = \boldsymbol{M}_{(O)} + (\boldsymbol{O} - \boldsymbol{O}') \times \boldsymbol{F}$$

Momento di una forza rispetto ad un asse

Sia $\boldsymbol{F}$ una forza applicata in un punto P e consideriamo un asse caratterizzato dal versore $\boldsymbol{a}$. Siano O e O' due punti sull'asse. Valutiamo la componente sull'asse del vettore momento, rispetto ai due poli:



$$\boldsymbol{M}_{(O')} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}_{(O)} \cdot \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{O} - \boldsymbol{O}') \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}$$

Poiché O–O' e $\boldsymbol{a}$ sono paralleli, risulta:

$$\boldsymbol{M}_{(O')} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{M}_{(O)} \cdot \boldsymbol{a}$$

Pertanto la **componente secondo un asse** del momento di una forza rispetto ad un polo costituito da un punto dell'asse è indipendente dalla posizione del punto stesso sull'asse.
Questo giustifica il nome di **momento della forza rispetto all'asse** dato allo *scalare*:

$$M_a = \boldsymbol{M}_{(O)} \cdot \boldsymbol{a}$$

Momento di un sistema di forze

Consideriamo ora un sistema di forze $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, … $\boldsymbol{F}_n$, applicate rispettivamente nei punti P_1, P_2, … P_n. Dato un polo O, il momento del sistema di forze rispetto al polo è dato da:

$$\boldsymbol{M}_{(O)} = \boldsymbol{M}_{1(O)} + \boldsymbol{M}_{2(O)} + \cdots + \boldsymbol{M}_{n(O)} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{F}_i$$

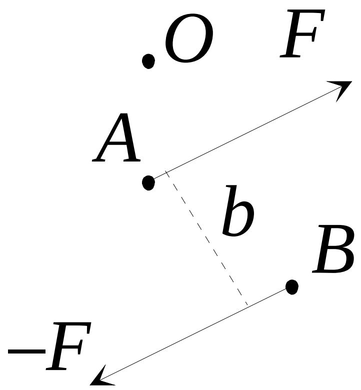
Se in particolare tutte le forze sono applicate nel medesimo punto P:

$$\boldsymbol{M}_{(O)} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{O}) \times \boldsymbol{R}$$

essendo $\boldsymbol{R}$ il risultante delle forze (teorema di Varignon).
Il momento del sistema di forze è quindi uguale al momento del risultante.

Momento di una coppia

Se il sistema di forze è costituito da una **coppia** si ha:



$$\boldsymbol{M}_{(O)} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{O})\times \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{O})\times(-\boldsymbol{F})$$
$$= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\times \boldsymbol{F}$$

Il momento della coppia è quindi indipendente dal polo.

Potremo allora rappresentare una **coppia** con il suo **vettore momento** che avrà:

- direzione ortogonale al piano della coppia
- modulo pari al prodotto Fb, essendo b il braccio della coppia
- verso congruente con il verso della coppia

In particolare quando si parla di coppia τ agente su un elemento in rotazione (per esempio un giunto) su cui sia stato fissato un asse, si intende lo scalare ottenuto proiettando il momento della coppia sull'asse.

Massima riduzione di un sistema di forze

Teorema fondamentale: CNS perché due sistemi di forze applicate ad un corpo rigido siano equipollenti è che abbiano lo stesso risultante e lo stesso momento rispetto ad un polo.

Sappiamo che nel caso più generale possiamo ridurre un sistema qualsiasi di forze ad una forza applicata in un punto (il risultante) e ad una coppia. Ne consegue che potremo sempre rappresentare un sistema di forze con due vettori:

- Un **vettore forza** applicata in un punto *O* (di fatto il risultante)
- Un **vettore momento** (di fatto il momento della coppia, ovvero il momento del sistema originario di forze rispetto al polo *O*)

Condizioni di equilibrio

Corpo rigido **libero**
CNS perché un corpo rigido libero sia in equilibrio è che sia nullo il risultante delle forze esterne e nullo il momento del sistema costituito da tali forze, rispetto a qualunque polo:

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \boldsymbol{M} = 0$$

Corpo rigido **vincolato**
CNS perché un corpo rigido vincolato sia in equilibrio è che sia nullo il risultante delle forze esterne (sia quelle attive che quelle di reazione vincolare) e nullo il momento del sistema costituito da tali forze, rispetto a qualunque polo:

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}' = 0, \quad \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}' = 0$$

$\boldsymbol{R}'$ e $\boldsymbol{M}'$: risultante e momento delle forze di reazione vincolare.

Sistemi di corpi

Si consideri un sistema di r corpi rigidi (quali, per esempio, i bracci di un robot). Se tutti i corpi sono liberi di muoversi nello spazio, il moto del sistema è ad ogni istante descrivibile per mezzo di $6r$ coordinate $\boldsymbol{x}$.
Supponiamo ora che che esistano delle limitazioni al moto dei corpi che costituiscono il sistema (quali quelle indotte dalla connessione di un braccio con il successivo tramite un giunto, che elimina cinque su sei gradi di mobilità relativi tra i due bracci).
Diciamo che sul moto dei corpi esiste un **vincolo**, che esprimeremo con la relazione:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0$$

Un vincolo rappresentato da un'equazione di questo tipo si dice **olonomo** (perché dipende solo dalle coordinate di posizione e non dalle velocità) e **stazionario** (perché non dipende dal tempo).

Coordinate libere

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0$$

Se il vincolo $\boldsymbol{h}$ è costituito da s componenti scalari e tutte sono continue e differenziabili con continuità, è possibile, per mezzo del vincolo, eliminare s coordinate dalle equazioni del sistema.

Le rimanenti $n=6r-s$ coordinate prendono il nome di **coordinate libere**, o **lagrangiane**, o **generalizzate**, e n è il numero di **gradi di libertà** del sistema meccanico.

Per esempio, in un robot a 6 giunti, delle 36 coordinate originarie, se ne eliminano 30 in virtù dei vincoli imposti dai 6 giunti e ne rimangono 6 che costituiscono le coordinate lagrangiane: tipicamente si scelgono le coordinate di giunto (l'angolo ϑ o la distanza d, rispettivamente per giunto rotazionale o prismatico).

Spostamento virtuale

Definiamo **lavoro elementare** compiuto da un sistema di forze agenti su un corpo rigido e aventi risultante $\boldsymbol{f}$ e momento μ_Q rispetto ad un qualsiasi punto Q del corpo, la quantità:

$$dW = \boldsymbol{f}^T d\boldsymbol{p}_Q + \mu_Q^T \omega dt$$

dove ω è la velocità angolare del corpo.

Consideriamo ora un sistema di corpi rigidi soggetto a vincoli di mobilità, per il quale si possano esprimere le coordinate $\boldsymbol{x}$ in termini di un vettore λ di coordinate generalizzate: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\lambda)$.
Definiamo **spostamento virtuale** la quantità:

$$\delta \boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \lambda} \delta\lambda$$

ovvero uno spostamento elementare conforme ai vincoli.

Principio dei lavori virtuali

In corrispondenza di uno spostamento virtuale, possiamo definire il **lavoro virtuale**, ovvero il lavoro elementare compiuto dalle forze agenti sul sistema di corpi per lo spostamento virtuale.
Poiché le forze di reazione vincolare non producono lavoro, essendo ortogonali ai vincoli, e ipotizzando vincoli privi si attrito, il lavoro virtuale si riduce al lavoro δW_a delle forze attive.
Si può dimostrare che condizione per **l'equilibrio del sistema di corpi rigidi** è che il lavoro virtuale delle forze attive sia nullo per qualunque spostamento virtuale:

$$\delta W_a = \boldsymbol{\zeta}^T \delta\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

dove $\boldsymbol{\zeta}$ è un vettore di forze generalizzate.

Statica del manipolatore

Consideriamo ora un manipolatore soggetto ad un insieme di forze all'organo terminale avente risultante $\boldsymbol{f}$ e momento, rispetto all'origine della terna utensile, $\boldsymbol{\mu}$. Definiamo il vettore:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}$$

Chiamiamo $\boldsymbol{\tau}$ il vettore delle forze o coppie applicate ai singoli giunti.

Il lavoro virtuale delle forze/coppie ai giunti è:

$$\delta W_\tau = \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{q}$$

Il lavoro virtuale delle forze all'organo terminale è:

$$\delta W_\gamma = \boldsymbol{f}^T \delta \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} dt = \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q}) \delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{q}) \delta \boldsymbol{q} = \gamma^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \delta \boldsymbol{q}$$

Per il principio dei lavori virtuali il manipolatore è in equilibrio statico se e solo se:

$\delta W_\tau = \delta W_\gamma$ e quindi: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\gamma$