Soluzioni

1.1

Lo stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}}$ si dice asintoticamente stabile se, $\forall\varepsilon>0$, esiste in corrispondenza un valore $\delta_\varepsilon>0$, tale che $\forall\ \boldsymbol{x}_{0p}$ che soddisfi la condizione:

$$\left\|\boldsymbol{x}_{0p}-\bar{\boldsymbol{x}}\right\|\le\delta_\varepsilon,$$

risulti:

$$\left\|\boldsymbol{x}_p(t)-\bar{\boldsymbol{x}}\right\|\le\varepsilon,\quad\forall t\ge 0$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}_p(t)-\bar{\boldsymbol{x}}\right\|=0,$$

dove $\boldsymbol{x}_p(t)$ è il movimento perturbato che origina da $\boldsymbol{x}_{0p}$, con lo stesso ingresso $\bar{\boldsymbol{u}}$.

1.2

La regione di attrazione è la regione nello spazio di stato $\Re^n$ in cui può essere scelto lo stato iniziale perturbato perché il movimento perturbato converga allo stato di equilibrio.

1.3

Risulta:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix},$$

Il polinomio caratteristico è quindi:

$$\left|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{bmatrix}s+1 & -1 & 0\\ 1 & s & 1\\ -1 & 0 & s+3\end{bmatrix}=(s+1)s(s+3)+(s+3+1)=s^3+4s^2+4s+4$$

Componiamo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{ccc}1 & 4 & 0\\ 4 & 4 & 0\\ (16-4)/4 & 0 & \\ 4 & & \end{array}$$

Tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, per cui il sistema è asintoticamente stabile.

1.4

Poiché il sistema è lineare ed asintoticamente stabile, tutti gli stati di equilibrio sono asintoticamente stabili ed hanno regione di attrazione che si estende a tutto $\Re^n$, perché qualunque sia lo stato iniziale perturbato, il moto libero decade a zero.

Esercizio 2

2.1

La condizione per l'assegnamento degli autovalori è che il sistema sia completamente raggiungibile. Il posizionamento degli autovalori ha interesse per la stabilizzazione di un sistema ed in ogni caso per l'assegnamento dei transitori del moto libero per il sistema in anello chiuso.

2.2

Il sistema è in forma canonica di controllo, per cui è senz'altro completamente raggiungibile.

Il polinomio caratteristico della matrica $\boldsymbol{A}$ si legge direttamente dall'ultima riga della matrice:

$\chi_A(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = s^4 + 2s^2 + 1$.

Il polinomio caratteristico desiderato è:

$\chi^o(s) = (s+1)^4 = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1$

La matrice $\boldsymbol{K}$ è quindi data da $\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$, con:

$k_1 = 1 - 1 = 0, \quad k_2 = 0 - 1 = -4, \quad k_3 = 2 - 6 = -4, \quad k_4 = 0 - 4 = -4$.

2.3

Il sistema deve essere completamente osservabile. Calcoliamone la matrice di osservabilità:

$$\boldsymbol{K}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^{T^2}\boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^{T^3}\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$\det(\boldsymbol{K}_0) = 1 \neq 0$.

Il sistema è quindi completamente osservabile e se ne possono allocare gli autovalori con retroazione dell'uscita.

2.4

Il sistema, raggiungibile e osservabile e privo di autovalori nulli ($\chi_A(0) \neq 0$), non deve avere zeri in s=0. Verifichiamo:

$$G(0) = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = -[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Il sistema ha quindi almeno uno zero nell'origine, per cui non è possibile risolvere il problema.

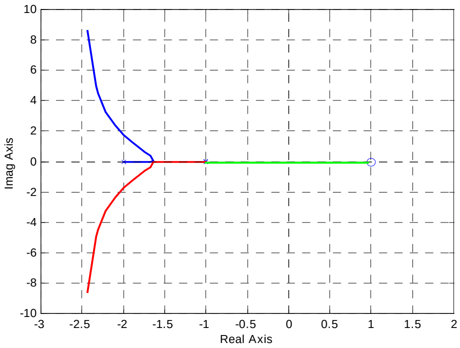
Esercizio 3

3.1

Risulta m=1, n=3, z_1= −1, p_1=1, p_2=1, p_3=2. Il punto di intersezione degli asintoti è quindi:

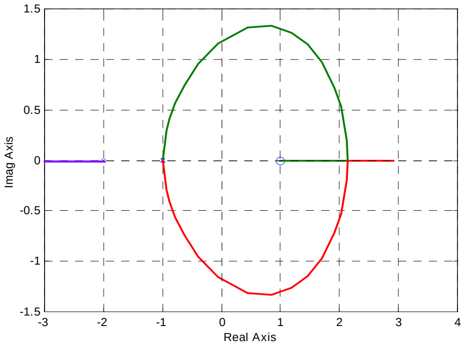
$$x_a = \frac{\sum z_i - \sum p_i}{n-m} = \frac{-1-(1+1+2)}{2} = -\frac{5}{2}$$

Luogo diretto:



3.2

Luogo inverso:



3.3

Per valori di ρ positivi, il valore limite per la stabilità si ottiene punteggiando in s=0:

$$\rho_M = \frac{1\times 1\times 2}{1} = 2$$

Per valori di ρ negativi, il valore limite si ottiene con la regola di conservazione della somma delle parti reali dei poli. Quando due poli hanno parte reale nulla, il terzo ha parte reale –4. Punteggiando in s=–4 si ottiene:

$$\rho_m = -\frac{2\times 3\times 3}{5} = -\frac{18}{5} = -3.6$$

Il sistema è quindi asintoticamente stabile per $-3.6 < \rho < 2$.

3.4

Il valore di ρ per cui uno dei poli in anello chiuso è nel punto $\bar{s} = -1.5$ si ottiene con la regola di punteggiatura (il punto appartiene al luogo diretto):

$$\bar{\rho} = \frac{0.5\times 0.5\times 0.5}{2.5} = \frac{1}{20} = 0.05\ .$$

Poiché $\bar{\rho}$ è nell'insieme dei valori prima determinati, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.