Esponenziale di matrici

Estendendo la definizione valida per gli scalari:

$$e^{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(x)^{i} = 1 + x + \frac{(x)^{2}}{2!} + \ldots$$

Scalari….

Per ogni matrice A, *nxn* ed ogni scalare t / 0 la matrice esponenziale ? (t)

è definita dalla relazione:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(At)^{i} = I_{n} + At + \frac{(At)^{2}}{2!} + \ldots$$

Matrici….

Autovalori ed autovettori

Data A matrice quadrata nxn il vettore v_i (nx1) si dice autovettore relativo all'autovettore λ_i se soddisfa la relazione:

$$Av_i = \lambda_i v_i \qquad (A - \lambda_i I) v_i = \mathbf{0}$$

In particolare λ_i sono le soluzioni del polinomio caratteristico $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

Se i λ_i sono distinti tra di loro allora A è diagonalizzabile ovvero esiste T_D tale che $A = T_D^{-1} A_D T_D$

In cui $A_D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

T_D assume la forma $[v_1 \ldots v_n]^{-1}$ (matrice degli autovettori *nxn* non singolare)

Se A è diagonalizzabile…

$$\psi(t) = e^{At} = T_D^{-1} diag\left\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right\} T_D$$

$$\psi(t) = T_D^{-1} \psi_D(t) T_D$$

… T_D mette in forma diagonale anche ? (t)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du \qquad (1)$$

A *nxn* B *nxm*

C *pxn* D*pxm*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{t_0} + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Formula di Lagrange

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema (1) è che tutti gli autovalori di A abbiano parte reale negativa.

Cambiamento variabili

Dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

e la matrice di trasformazione T tale che:

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

è possibile scrivere:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t)$$
$$y = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t)$$

in cui:

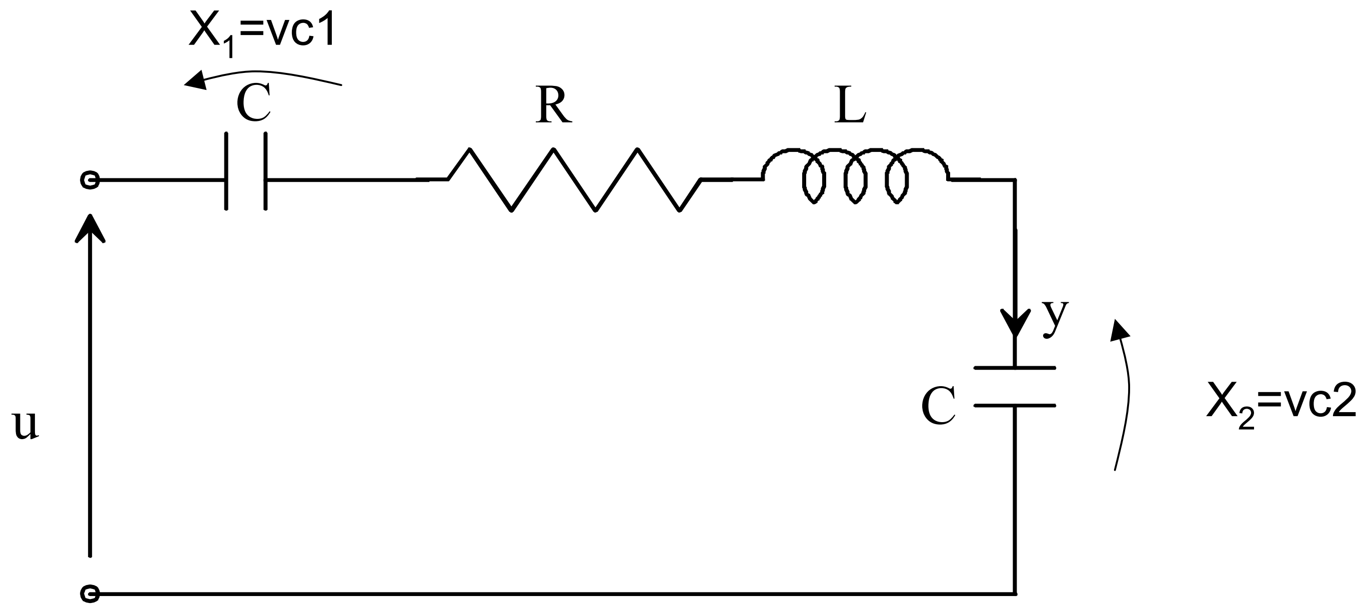
$$\hat{A} = TAT^{-1}$$
$$\hat{B} = TB$$
$$\hat{C} = CT^{-1}$$
$$\hat{D} = D$$

A e $\hat{A}$ sono simili (stessi autovalori)

(A,B,C,D) e $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$

descrivono lo stesso sistema fisico!!

4° esercizio



$$u = v_{c1} + Ri + L\frac{di}{dt} + v_{c2}$$

$$= x_1 + Rx_3 + L\dot{x}_3 + x_2$$

$$\dot{x}_1 = 1/Cx_3$$

$$\dot{x}_2 = 1/Cx_3$$

$$\dot{x}_3 = -1/Lx_1 - 1/Lx_2 - R/Lx_3 + 1/Lu$$

Osservabilità & Raggiungibilità

Dato il sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (1)$$

A *nxn* B *nxm*

C *pxn* D *pxm*

Definita M_r = [B AB A^2B … A^{n-1}B] matrice di raggiungibilità (*nxmn*)

Definita M_o = [C^T A^TC^T $A^{T2}C^T$… $A^{Tn-1}C^T$] matrice di osservabilità (*nxpn*)

Il sistema (1) è completamente osservabile se e solo se il rango della matrice di osservabilità è pari ad *n*

Il sistema (1) è completamente raggiungibile se e solo se il rango della matrice di raggiungibilità è pari ad *n*