

Lezione 6

Controllo digitale

Realizzazione dei regolatori

Come è noto, il progetto del regolatore si conclude con la determinazione di una funzione di trasferimento $R(s)$. Tuttavia la funzione di trasferimento costituisce soltanto un formalismo matematico per descrivere il comportamento dinamico di un sistema, a partire dal quale occorre **realizzare** un dispositivo avente quel comportamento dinamico, ed atto alla regolazione del processo sotto controllo.

Il modo più naturale di procedere sembra quello di realizzare, in una qualunque tecnologia (elettronica, pneumatica, fluidica) un sistema che presenti la stessa funzione di trasferimento ottenuta dal progetto, ed interfacciarlo con il trasduttore della misura della variabile controllata, da un lato, e con l'attuatore, dall'altro. Questo è il principio che sta alla base dei **sistemi di controllo analogici**.

Tuttavia, negli ultimi decenni, l'avvento ed il successivo sviluppo delle tecnologie digitali hanno indotto i progettisti dei sistemi di controllo ad un crescente interesse verso l'utilizzo dei calcolatori, in particolare dei microprocessori, all'interno dell'anello di controllo. Nei **sistemi di controllo digitale** il calcolatore esegue un algoritmo che elabora le informazioni provenienti dai trasduttori e produce un conseguente comando all'attuatore. Dopo le iniziali difficoltà legate principalmente alla, giustificata, riluttanza del mondo industriale ad abbandonare soluzioni tecnologicamente assestate a favore di altre basate su tecnologie emergenti, la tecnologia di controllo digitale ha via via soppiantato i sistemi di controllo analogici, che oggi sopravvivono soprattutto in applicazioni in cui le bande richieste agli anelli di controllo renderebbero antieconomico il passaggio alla tecnologia digitale (esempi si hanno nel campo del controllo dei motori elettrici).

Inserimento del calcolatore in un anello di controllo

Un calcolatore opera, in istanti di tempo discreti, su variabili rappresentate da numeri con precisione finita (dipendente dal numero di bit), ossia su cosiddetti **segnali digitali**. Le variabili di ingresso ed uscita del sistema sotto controllo sono invece funzioni del tempo (continuo), sono cioè cosiddetti **segnali analogici**. Sono segnali analogici anche le misure delle grandezze fornite dai trasduttori, come pure i segnali di comando degli attuatori. L'inserimento del calcolatore nell'anello di controllo comporta quindi l'adozione di dispositivi per la conversione dei segnali analogici in segnali digitali e viceversa.

Tali dispositivi prendono il nome, rispettivamente, di:

convertitori A/D (analogico/digitale)

convertitori D/A (digitale/analogico).

Uno schema di massima di un sistema di controllo digitale sarà quindi il seguente (dove C indica il calcolatore, A , S e T indicano rispettivamente l'attuatore, il sistema sotto controllo ed il trasduttore, mentre l'asterisco e la freccia a tratto più spesso distinguono i segnali digitali):

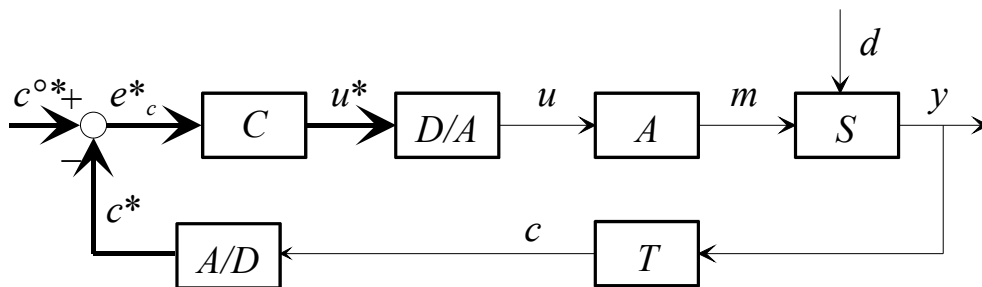


Fig. 1 : Sistema di controllo digitale

Uno schema alternativo in cui si converte in digitale l'errore è il seguente:

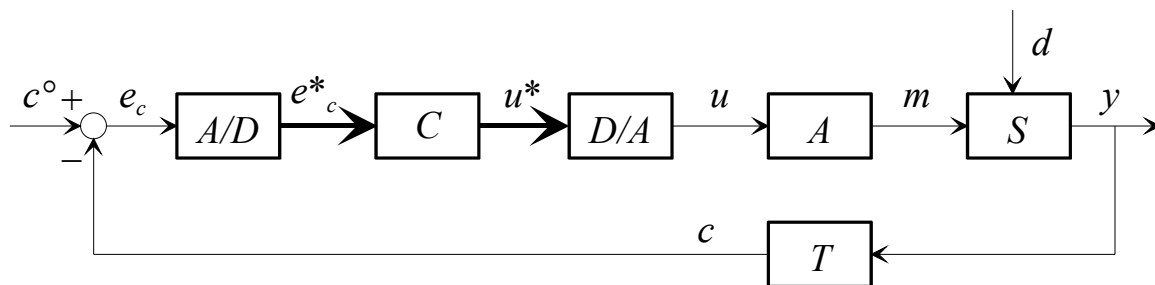


Fig. 2 : Sistema di controllo digitale con conversione in digitale dell'errore

Supporteremo tutti i sistemi oggetto della presente trattazione monovariabili (ad un ingresso ed una uscita).

Conversione A/D: il campionamento

Si consideri un generico segnale analogico $v(t)$, $t \in \mathfrak{R}$. Si fissi un'origine per l'asse dei tempi e, a partire da tale istante ($t=0$), si considerino istanti di tempo distanziati l'uno dall'altro da un intervallo T_C . Si valuti quindi il segnale $v(t)$ in corrispondenza di tutti questi istanti:

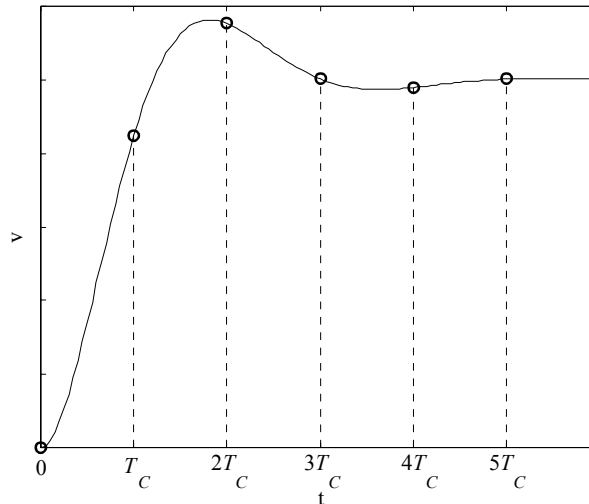


Fig. 3 : Campionamento

Si otterrà una sequenza (o successione) di numeri che indichiamo con:

$$v^*(k) = v(kT_C), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Adotteremo la seguente terminologia:

- **Segnale campionato:** la sequenza di numeri $v^*(k)$.
- **Campionamento:** l'operazione che fa passare dal segnale a tempo continuo v al segnale a tempo discreto v^* .
- **Periodo (o tempo, o intervallo, o passo) di campionamento:** l'intervallo di tempo T_C .
- **Frequenza di campionamento:** l'inverso del periodo di campionamento, $f_C = 1/T_C$.
- **Pulsazione di campionamento:** la pulsazione corrispondente a f_C , $\Omega_C = 2\pi/T_C$.
- **Pulsazione di Nyquist:** la pulsazione $\Omega_N = \Omega_C/2 = \pi/T_C$.

Nella conversione analogico/digitale è anche inevitabile una *quantizzazione* del segnale, vale a dire la suddivisione dell'insieme dei valori che può assumere il segnale a tempo continuo v in un numero finito di intervalli. Tutti i valori di v interni allo stesso intervallo danno luogo allo stesso campione espresso in bit. La trattazione analitica dell'errore di quantizzazione è decisamente complessa e la sua rilevanza è in qualche misura ridimensionata dall'utilizzo di convertitori ad elevato numero di bit. Nel seguito non ci occuperemo degli effetti della quantizzazione, ritenendo l'insieme in cui varia v^* identico a quello in cui prende valori v .

Si intuisce che all'operazione di campionamento è generalmente associata una perdita di informazione, rispetto al segnale originario analogico. Non sembra infatti possibile compiere l'operazione inversa, ossia risalire univocamente dal segnale campionato al segnale originario, dal momento che diversi segnali analogici, anche molto differenti tra loro, possono dar luogo allo stesso segnale campionato:

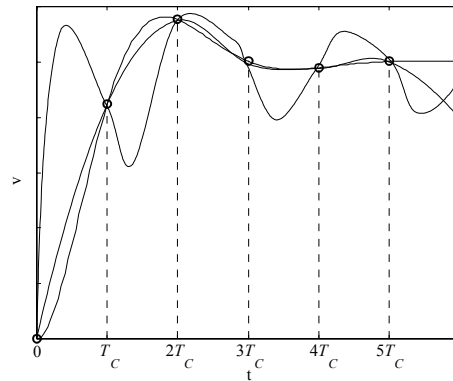


Fig. 4 : Segnali analogici che danno luogo allo stesso segnale campionato

In particolare, campionando un segnale sinusoidale con determinati periodi di campionamento, si può ottenere un segnale campionato che esibisce una oscillazione di lungo periodo, del tutto assente nel segnale originario:

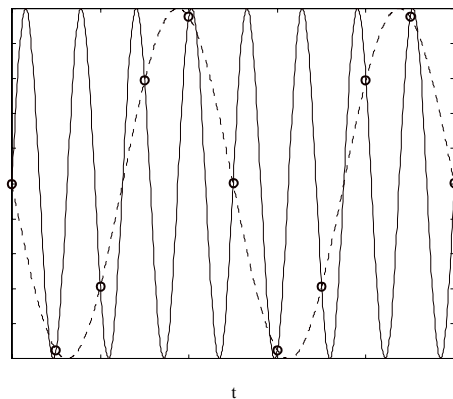


Fig. 5 : Aliasing

Questo fenomeno, detto **aliasing**, impone che il periodo di campionamento sia adeguato alle caratteristiche del segnale soggetto al campionamento. Il campionamento deve essere sufficientemente fitto (e quindi il periodo di campionamento sufficientemente piccolo) da cogliere anche le variazioni più rapide del segnale.

A questo proposito, è facile convincersi che per campionare correttamente un segnale sinusoidale occorrono almeno due campioni per periodo. Detto \bar{T} il periodo della sinusoide si avrà quindi:

$$\bar{T} > 2T_C \Rightarrow 2\pi/\bar{T} < \pi/T_C,$$

ossia, detta $\bar{\omega} = 2\pi/\bar{T}$ la pulsazione della sinusoide,:

$$\boxed{\Omega_N > \bar{\omega}}.$$

La pulsazione di Nyquist deve quindi essere superiore alla pulsazione della sinusoidale. Se così non è, si genera un'armonica di "alias" di bassa frequenza, la cui pulsazione è data dalla formula (come si può dimostrare):

$$\omega_{al} = |\Omega_C - \bar{\omega}|, \quad \text{per } \bar{\omega} < 3\Omega_N.$$

Per valori superiori di pulsazione valgono formule analoghe.

Si consideri a titolo d'esempio il campionamento di una sinusoidale di periodo \bar{T} con tempo di campionamento $T_C = 3/4\bar{T}$:

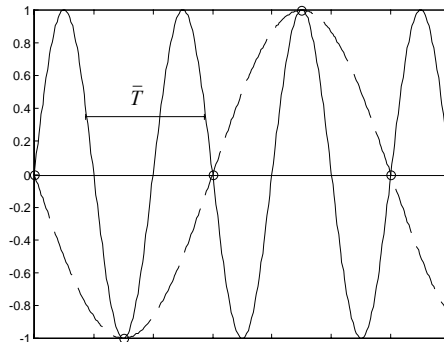


Fig. 6 : Campionamento di una sinusoidale

Risulta, in questo caso:

$$T_C = \frac{3}{4}\bar{T} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_C} = \frac{4}{3} \frac{2\pi}{\bar{T}} \Rightarrow \Omega_C = \frac{4}{3}\bar{\omega}.$$

Pertanto l'armonica di alias ha pulsazione:

$$\omega_{al} = \Omega_C - \bar{\omega} = \frac{4}{3}\bar{\omega} - \bar{\omega} = \frac{1}{3}\bar{\omega},$$

e quindi periodo 3 volte il periodo della sinusoidale originaria (come si rileva graficamente).

Volendo estendere il risultato precedente a segnali generici, è utile ricordare che qualsiasi segnale a tempo continuo si può scomporre, sotto ipotesi molto blande, in serie o integrale (a seconda che sia periodico o aperiodico) di infinite sinusoidi, o componenti armoniche, attraverso la trasformata di Fourier. Un segnale si dice poi a **banda limitata** se ha trasformata di Fourier nulla, o sostanzialmente nulla, per pulsazioni maggiori di una pulsazione Ω_v . E' allora evidente che se tutte le armoniche del segnale hanno pulsazione inferiore alla pulsazione di Nyquist Ω_N , non si genera aliasing nel campionamento di alcuna di tali armoniche, e quindi del segnale stesso. Ne consegue il seguente importante risultato:

Teorema di Shannon (o del campionamento)

Se il segnale soggetto a campionamento $v(t)$ è a banda limitata con estremo superiore della banda Ω_v inferiore alla pulsazione di Nyquist $\Omega_N = \pi/T_C$:

$$\boxed{\Omega_v < \Omega_N}$$

allora la conoscenza del segnale campionato $v^*(k)$, con periodo di campionamento T_C , consente di ricostruire esattamente il segnale originario $v(t)$, ossia segnale campionato e segnale soggetto al campionamento sono informativamente equivalenti.

Se è rispettata la condizione del teorema del campionamento, deve essere possibile ricostruire, a partire dalla sequenza completa dei campioni del segnale campionato $v^*(k)$, il segnale originario $v(t)$ ad ogni istante. La formula che risolve il problema è la **formula di Shannon** (o del **decampionatore di Shannon**):

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[v^*(k) \frac{\sin(\Omega_N t - k\pi)}{\Omega_N t - k\pi} \right].$$

Si osservi che, come è ovvio, vi sono comunque infiniti segnali a tempo continuo che generano tramite campionamento la stessa sequenza $v^*(k)$, ma di questi uno solo soddisfa la condizione del teorema di Shannon, e la sua espressione è data dalla formula del decampionatore.

Scelto il periodo di campionamento del convertitore A/D, è anche possibile forzare il segnale a tempo continuo al soddisfacimento della condizione del teorema del campionamento, filtrando il segnale stesso con un filtro passabasso. Tale filtro, che va sotto il nome di **filtro anti-aliasing**, avrà guadagno unitario e pulsazione di taglio inferiore alla pulsazione di Nyquist, in modo da tagliare le componenti ad alta frequenza del segnale.

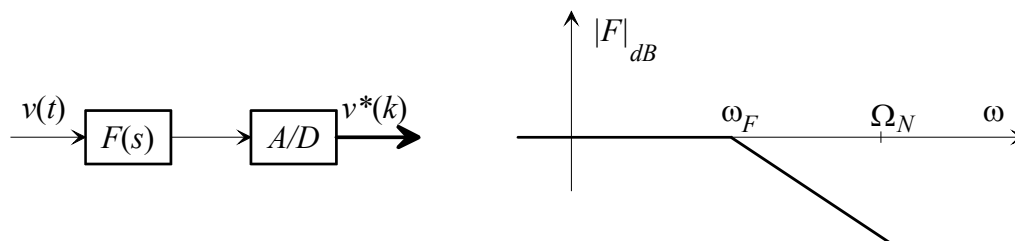


Fig. 7 : Filtro anti-aliasing

Conversione D/A

La conversione digitale/analogico consiste nel ricavare da una sequenza di valori $v^*(k)$ cui è associata una base dei tempi, un segnale a tempo continuo, che negli istanti associati ai valori $v^*(k)$, assuma gli stessi valori della sequenza data.

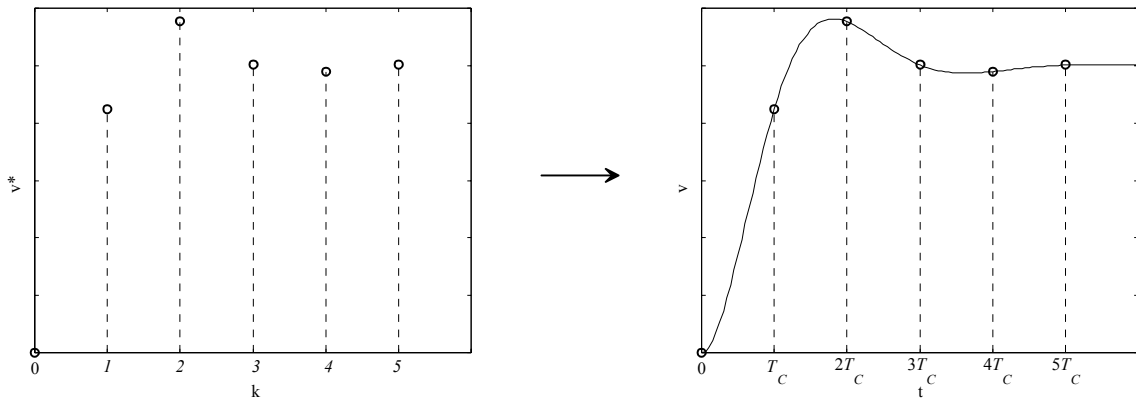


Fig. 8 : Conversione D/A

La formula di Shannon risolverebbe il problema generando un segnale a banda limitata: tuttavia non è utilizzabile negli schemi di controllo digitale in quanto **non causale**. Il valore di $v(t)$, in ciascun istante di tempo, dipende infatti da tutti i valori di $v^*(k)$, in particolare anche da quelli associati ad istanti successivi a t . Il calcolatore impiegato nel controllo digitale, operando in tempo reale, non può disporre che dei valori passati della variabile di controllo da convertire. Per risolvere il problema si usano allora degli **estrapolatori**, ossia dei dispositivi che, sulla base di un certo numero di campioni (i più recenti elaborati dal dispositivo di controllo digitale), determinano il valore che dovrà assumere l'uscita del convertitore fino al successivo campione.

In particolare la soluzione più comunemente utilizzata consiste semplicemente nel mantenere costante l'ultimo campione in tutto l'intervallo di campionamento:

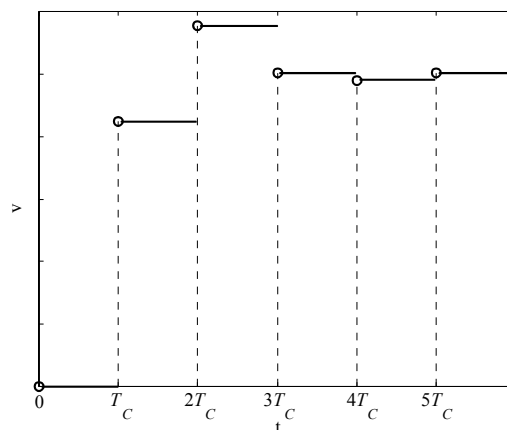


Fig. 9 : Mantentore di ordine zero

Il dispositivo che realizza questa operazione si chiama **Mantentore di ordine zero** o **ZOH** (**Z**ero **O**rdine **H**old).

Consideriamo ora la sequenza di un campionatore ed uno ZOH:

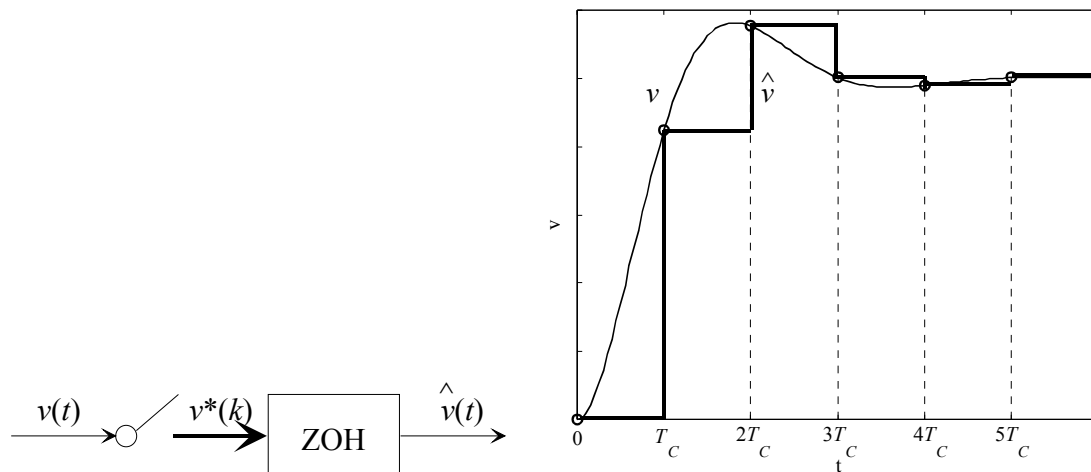


Fig. 10 : Campionatore e mantenitore

Tra i segnali a tempo continuo in ingresso ed uscita, v e \hat{v} si evidenzia un certo ritardo. Tale ritardo è quantificabile, con un'analisi non del tutto banale nel dominio della frequenza, in circa metà del periodo di campionamento, $\tau = T_c/2$, e prende il nome di **ritardo intrinseco di conversione**.

Regolatore digitale e temporizzazione

Il regolatore digitale elabora in linea la sequenza di valori ottenuti dal campionamento dell'errore e produce la sequenza di valori da attribuire alla variabile di controllo:

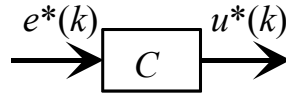


Fig. 11 : Regolatore digitale

Il regolatore può implementare, via software, un algoritmo arbitrariamente complesso, sfruttando tutte le opportunità date dalla programmazione. Noi in realtà ci limiteremo a regolatori il cui algoritmo è costituito da un insieme di equazioni alle differenze, interpretabile come un sistema dinamico a tempo discreto lineare tempo invariante, di funzione di trasferimento:

$$R(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)}$$

Il problema di progetto in un sistema di controllo digitale consisterà nel ricavare la funzione di trasferimento $R(z)$.

Supporremo inoltre campionatore e mantentore sincroni e in fase (cioè operanti con lo stesso periodo e con la stessa origine dei tempi). Si osservi che tuttavia sono inevitabili ritardi nelle operazioni di conversione e soprattutto nell'elaborazione da parte del calcolatore: chiamiamo τ_c la somma di questi ritardi. Naturalmente deve essere $\tau_c < T_c$, altrimenti il controllore digitale perderebbe il passo (non avrebbe ancora terminato l'elaborazione all'arrivo del nuovo campione).

Trascurando il ritardo dovuto alla conversione, al generico istante di campionamento kT_c il calcolatore acquisisce il campione dell'errore $e^*(k)$. A questo punto, a seconda che il regolatore digitale sia strettamente proprio o proprio non strettamente si possono seguire due strategie diverse per quanto riguarda l'istante in cui aggiornare l'ingresso del convertitore digitale/analogico (uscita del calcolatore).

Se $R(z)$ è **strettamente proprio** $u^*(k)$ non dipende da $e^*(k)$, per cui la conoscenza del nuovo campione dell'errore non è richiesta per il calcolo del nuovo campione della variabile di controllo $u^*(k)$. Questo comporta che al termine dell'intervallo di campionamento si potrà aggiornare l'ingresso del convertitore D/A con il campione $u^*(k+1)$, che invece può dipendere da $e^*(k)$:

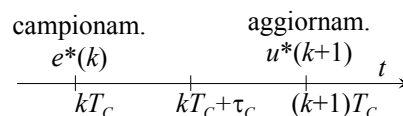


Fig. 12 : Temporizzazione nel caso di regolatore strettamente proprio

In altre parole, il ritardo di elaborazione non comporta ulteriori ritardi nell'anello (il regolatore stesso ha già in sé almeno un passo di ritardo).

Se $R(z)$ è **proprio non strettamente** $u^*(k)$ dipende da $e^*(k)$, per cui la conoscenza del nuovo campione dell'errore è richiesta per il calcolo del nuovo campione della variabile di controllo

$u^*(k)$. Questo comporta che, in linea di principio, non appena il calcolatore ha terminato l'elaborazione, la sua uscita andrebbe aggiornata con il nuovo campione $u^*(k)$ calcolato:

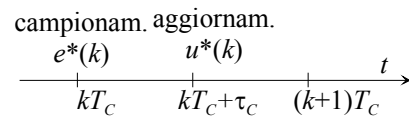


Fig. 13 : Temporizzazione nel caso di regolatore proprio non strettamente

In questo modo, tuttavia, si genererebbe un ritardo variabile (a seconda del tempo richiesto per eseguire le operazioni in ciascun intervallo di campionamento) e si incorrerebbe in difficoltà tecnologiche legate ad un'operazione di aggiornamento del convertitore D/A asincrona con la temporizzazione degli altri organi. Una soluzione alternativa consiste nell'aggiornare l'uscita del calcolatore comunque al termine dell'intervallo di campionamento, accettando di introdurre nell'anello un ritardo fisso pari a T_c :

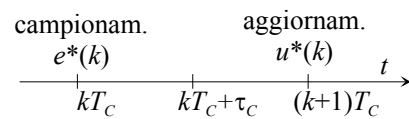


Fig. 14 : Temporizzazione alternativa nel caso di regolatore proprio non strettamente

Punti di vista analogico e digitale

Nell'analisi di un sistema di controllo digitale si possono adottare due punti di vista:

Punto di vista analogico

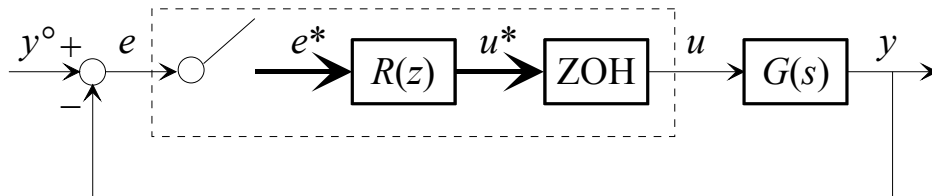


Fig. 15 : Punto di vista analogico

La parte tratteggiata è un sistema esternamente a tempo continuo. Dato un regolatore analogico ci proponremo di realizzarlo in tecnologia digitale, con un'opportuna scelta di $R(z)$ e del periodo di campionamento.

Punto di vista digitale

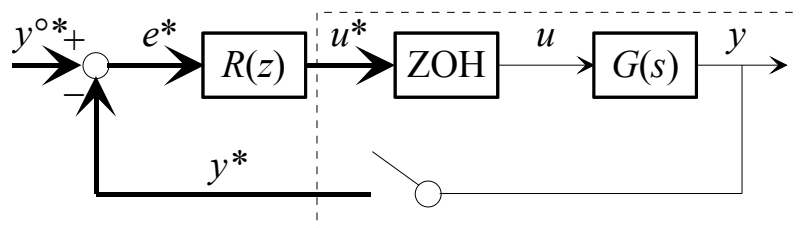


Fig. 16 : Punto di vista digitale

La parte tratteggiata è un sistema esternamente a tempo discreto, di cui si determinerà la funzione di trasferimento. Si progetterà quindi il regolatore $R(z)$ direttamente con la teoria dei sistemi a tempo discreto.

Realizzazione digitale di un controllore analogico

Supponiamo di avere già progettato un controllore analogico $R^\circ(s)$ e di volerlo realizzare mediante un regolatore a tempo discreto $R(z)$ con un tempo di campionamento T .

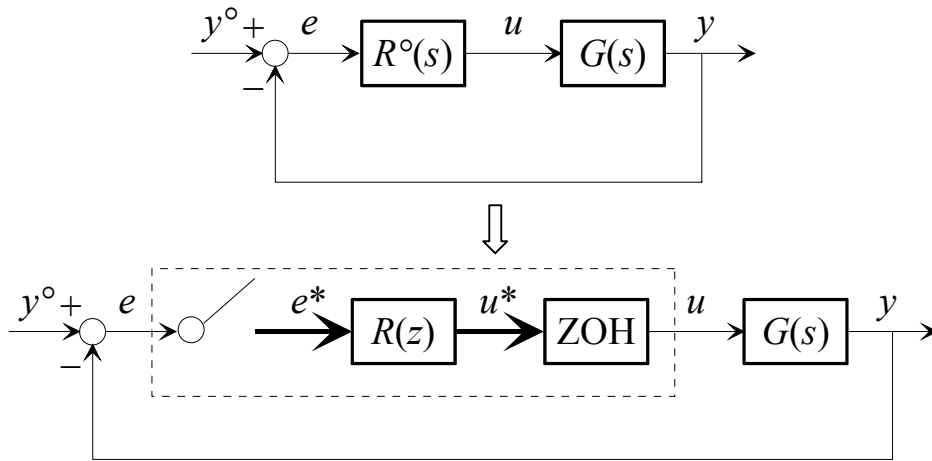


Fig. 17 : Realizzazione digitale del controllore

Poniamoci dapprima il problema della **scelta del periodo di campionamento**. Il segnale soggetto a campionamento, l'errore e , deve soddisfare la condizione del teorema di Shannon. Poiché però non si tratta di un segnale esogeno, le sue caratteristiche spettrali non sono determinabili a priori. E' noto tuttavia che in un sistema di controllo le componenti armoniche significative dei segnali risiedono nella banda passante del sistema di controllo stesso, il cui estremo superiore è di norma ben approssimato dalla pulsazione critica ω_c . Per rispettare la condizione del teorema di Shannon occorrerà allora che tutto il contenuto informativo utile dell'errore sia in una banda inferiore alla pulsazione di Nyquist, ossia che la pulsazione critica sia decisamente inferiore alla pulsazione di Nyquist:

$$\omega_c \ll \Omega_N.$$

Un buon criterio è che le due pulsazioni siano separate da una decade ($\Omega_N/\omega_c = 10$). Valori eccessivamente alti della pulsazione di Nyquist (ossia valori molto piccoli del tempo di campionamento) non sono peraltro raccomandabili sia per ragioni di costo dei dispositivi, sia per il fatto che enfatizzano gli errori legati alla quantizzazione.

In presenza di disturbi con componenti armoniche di alta frequenza o di componenti in alta frequenza del segnale di riferimento (che non interessa riprodurre in uscita) è opportuno anteporre al convertitore A/D un **filtro antialiasing**:

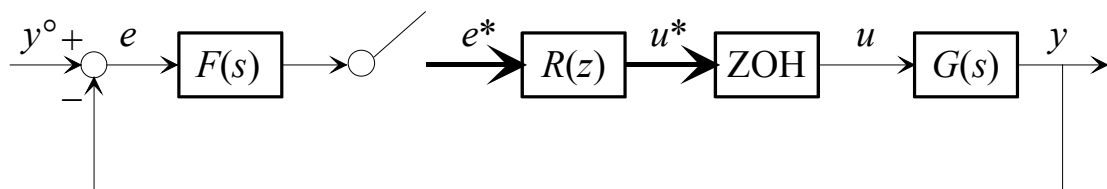


Fig. 18 : Inserimento di un filtro antialiasing nell'anello

La pulsazione di taglio del filtro dovrà essere superiore a ω_c (per non tagliare componenti armoniche significative del segnale da campionare) ma inferiore a Ω_N (per rispettare la condizione del teorema del campionamento):

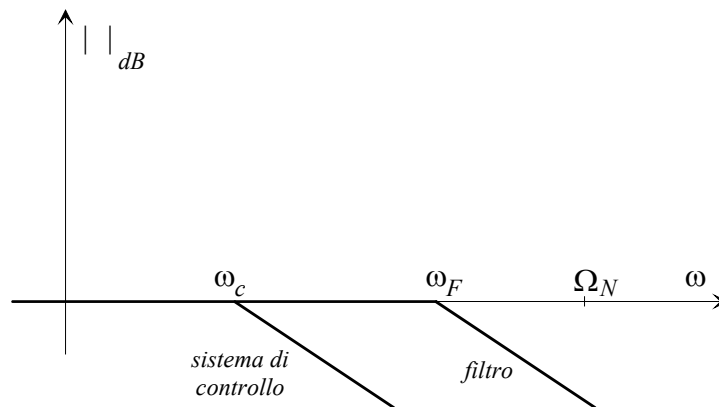


Fig. 19 : Progetto del filtro antialiasing

Si osservi a questo punto che il fatto stesso di realizzare il regolatore in tecnologia digitale con campionatori e mantentori introduce il **ritardo intrinseco di conversione** (pari a metà del periodo di campionamento). A questo si sommano i ritardi di elaborazione, di conversione e lo sfasamento introdotto dall'eventuale filtro antialiasing.

E' bene quindi che il regolatore $R^\circ(s)$ progettato a tempo continuo sia dotato di **un'eccedenza di margine di fase** tale da coprire gli sfasamenti introdotti dalla realizzazione digitale.

Se per esempio $\Omega_N=10\omega_c$, tenendo conto del solo ritardo intrinseco di conversione, si deve prevedere la seguente eccedenza di margine di fase:

$$\Delta\varphi_m = \frac{T_C}{2} \omega_c \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ \frac{\omega_c}{\Omega_N} = 9^\circ.$$

Per quanto riguarda **la scelta del regolatore** $R(z)$ occorre fare in modo che la serie di campionatore, sistema di funzione di trasferimento $R(z)$ e ZOH si comporti agli effetti esterni come $R^\circ(s)$. Si osservi a questo proposito che la funzione di trasferimento non è altro che un formalismo utile per rappresentare un sistema di equazioni differenziali lineari: ne consegue che i metodi noti per **l'integrazione numerica** delle equazioni differenziali possono tornare utili anche per la soluzione del nostro problema.

Consideriamo a questo proposito un semplice integratore a tempo continuo:

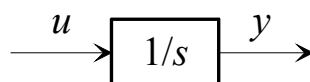


Fig. 20 : Sistema da integrare numericamente

Il sistema è descritto dall'equazione differenziale:

$$\dot{y}(t) = u(t).$$

Detti $u^*(k)=u(kT)$ e $y^*(k)=y(kT)$, con T intervallo di integrazione, risulta:

$$y^*(k) = y^*(k-1) + u_m(k)T,$$

dove $u_m(k)$ è il valor medio di u nell'intervallo di integrazione (per il cui calcolo occorre conoscere u in tutto l'intervallo d'integrazione). Approssimiamo u_m con una combinazione lineare convessa (tale che la somma dei coefficienti sia unitaria) dei valori assunti da u agli estremi dell'intervallo di integrazione:

$$y^*(k) = y^*(k-1) + T[(1-\alpha)u^*(k-1) + \alpha u^*(k)], \quad \alpha \in [0,1].$$

Si è ottenuta un'equazione alle differenze lineare, ad entrambi i membri della quale possiamo applicare la trasformata Zeta:

$$Y^*(z) = z^{-1}Y^*(z) + T[(1-\alpha)z^{-1} + \alpha]U^*(z)$$

e quindi:

$$\frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = T \frac{(1-\alpha) + \alpha z}{z-1},$$

versione a tempo discreto dell'integratore $1/s$.

Da queste considerazioni discende un metodo per ricavare $R(z)$ a partire da $R^\circ(s)$. Si tratta semplicemente di sostituire a s l'espressione (ottenuta invertendo la precedente funzione di trasferimento):

$$s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{\alpha z + (1-\alpha)},$$

che prende il nome di **trasformazione bilineare**.

Risulta pertanto:

$$R(z) = R^\circ\left(\frac{1}{T} \frac{z-1}{\alpha z + (1-\alpha)}\right).$$

Se $R^\circ(s)$ è razionale, di ordine n e propria, lo è anche $R(z)$, purché $R^\circ(s)$ non abbia poli in $s=1/(\alpha T)$, il che è escluso se R° è asintoticamente stabile. La trasformazione bilineare si specializza poi nelle seguenti formule di uso comune:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad s &= \frac{z-1}{T} && \text{Eulero in avanti (o Eulero esplicito)} \\ \alpha = 1 \quad s &= \frac{z-1}{Tz} && \text{Eulero all'indietro (o Eulero implicito)} \\ \alpha = \frac{1}{2} \quad s &= \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} && \text{Trapezi o Tustin} \end{aligned}$$

L'applicazione della formula di Eulero esplicita ad un sistema asintoticamente stabile a tempo continuo può dar luogo a un sistema a tempo discreto instabile se non si sceglie un tempo di campionamento sufficientemente piccolo.

Esempio

Consideriamo un **regolatore PI** analogico:

$$R^\circ(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right).$$

Utilizzando la trasformazione di Tustin:

$$\begin{aligned} R(z) &= R^o\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right) = k_p \left(1 + \frac{T}{2T_I} \frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{k_p}{2T_I} \left(\frac{(2T_I + T)z + T - 2T_I}{z-1}\right) = \\ &= \Gamma_p \frac{z-b}{z-1} \end{aligned}$$

con:

$$\Gamma_p = k_p \left(1 + \frac{T}{2T_I}\right), \quad b = \frac{2T_I - T}{2T_I + T}.$$

Pertanto:

$$\frac{U^*(z)}{E^*(z)} = \Gamma_p \frac{z-b}{z-1} = \Gamma_p \frac{1-bz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

ossia:

$$(1-z^{-1})U^*(z) = \Gamma_p(1-bz^{-1})E^*(z)$$

Passando nel dominio del tempo:

$$u^*(k) = u^*(k-1) + \Gamma_p e^*(k) - \Gamma_p b e^*(k-1).$$

Questa equazione alle differenze può essere tradotta in un **programma di calcolo**, da eseguire ad ogni istante di campionamento:

```
input yref, y;
e = yref-y;
u = u + Gammap*e-Gammap*b*eold;
eold = e;
```

Sistemi a segnali campionati

Il “punto di vista digitale” nell’analisi di un sistema di controllo digitale induce a considerare (si veda la Fig. 16) il sistema esternamente a tempo discreto costituito dalla serie di uno ZOH, di un sistema a tempo continuo e di un campionatore: questo sistema prende il nome di **sistema a segnali campionati**.

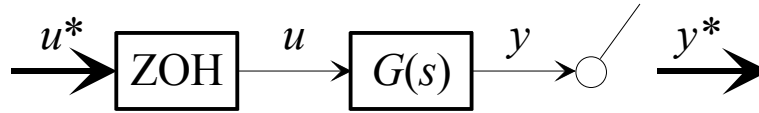


Fig. 21 : Sistema a segnali campionati

Ci proponiamo, dati la funzione di trasferimento $G(s)$ ed il tempo di campionamento T , di ricavare la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto da u^* a y^* . Supporremo la funzione di trasferimento $G(s)$ razionale, assumendo quindi in particolare che non presenti ritardi di tempo. Sia (A, B, C, D) una realizzazione minima di $G(s)$, ossia una quaterna di matrici, con le dimensioni di A pari al grado del denominatore di G , tali che:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Il sistema di funzione di trasferimento $G(s)$ può quindi essere rappresentato dalle seguenti equazioni nel dominio del tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$y(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Ricordiamo che l’espressione dello stato al generico istante t , noti lo stato ad un istante antecedente t_0 e l’ingresso a partire da t_0 , è data dalla formula di Lagrange:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Sceglieremo ora come istante iniziale t_0 un generico istante di campionamento e come istante t il successivo istante di campionamento, ossia $t_0 = kT$, $t = kT + T$:

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{AT}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Poniamo ora $\mathbf{x}^*(k) = \mathbf{x}(kT)$ ed osserviamo che, in virtù del principio di funzionamento dello ZOH, la variabile u resta costante per tutto l’intervallo di campionamento, e quindi per tutto l’intervallo compreso tra gli estremi d’integrazione:

$$u(\tau) = u(kT) = u^*(k) \quad \tau \in [kT, kT + T)$$

Pertanto:

$$\mathbf{x}^*(k+1) = e^{AT}\mathbf{x}^*(k) + \left[\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}B d\tau \right] u^*(k).$$

Eseguito il cambiamento di variabili:

$$\sigma = kT + T - \tau$$

otteniamo:

$$\mathbf{x}^*(k+1) = e^{AT} \mathbf{x}^*(k) + \left[\int_0^T e^{A\sigma} \mathbf{B} d\sigma \right] u^*(k)$$

In definitiva, il sistema a tempo discreto si lascia descrivere dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \mathbf{A}^* \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{B}^* u(k) \\ y^*(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}^*(k) + \mathbf{D} u^*(k) \end{aligned}$$

con:

$$\mathbf{A}^* = e^{AT}, \quad \mathbf{B}^* = \int_0^T e^{A\sigma} \mathbf{B} d\sigma,$$

per cui la sua funzione di trasferimento è:

$$G^*(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{B}^* + \mathbf{D}.$$

Dalla relazione precedentemente ricavata tra la matrice \mathbf{A} del sistema a tempo continuo e la matrice \mathbf{A}^* del sistema a tempo discreto, discende la relazione tra un autovalore s_i della matrice \mathbf{A} e un autovalore z_i della matrice \mathbf{A}^* :

$$z_i = e^{s_i T}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pertanto i **poli** delle due funzioni di trasferimento sono legati dalla trasformazione:

$$z = e^{sT},$$

che prende il nome di **trasformazione di campionamento**.

La trasformazione mette in relazione regioni del piano complesso s (nel quale si indicano i poli del sistema a tempo continuo) con regioni del piano z (relativo ai poli del sistema a tempo discreto), come mostra la figura:

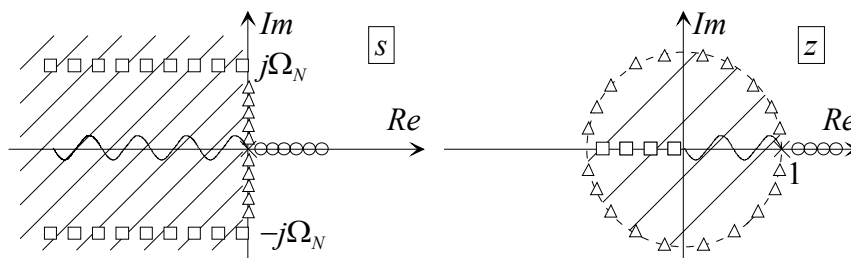


Fig. 22 : Trasformazione di campionamento

Si osservi in particolare che:

- i punti a parte reale negativa in s si trasformano in punti a modulo minore di 1 in z ;
- l'origine in s si trasforma in $z=1$;

- la trasformazione non è biunivoca: presi due punti in s le cui parti immaginarie differiscono per multipli della pulsazione di campionamento, essi si trasformano nello stesso punto in z :

$$s_2 = s_1 + jh\Omega_c \Rightarrow e^{s_2 T} = e^{s_1 T} e^{jh2\pi} = e^{s_1 T}, \quad h \text{ intero}$$

La prima osservazione implica che se il sistema a tempo continuo è asintoticamente stabile, lo è anche il sistema a segnali campionati.

Il legame tra gli **zeri** di G e G^* è più articolato:

- Se $G(s)$ ha m zeri, ci sono m zeri in $G^*(z)$ che tendono, al tendere di T a zero, alle immagini secondo la trasformazione di campionamento degli zeri di $G(s)$;
- Se $n > m+1$, compaiono in $G^*(z)$ $n-m-1$ zeri aggiuntivi (detti **zeri del campionamento**) la cui posizione tende, al tendere a zero di T , in alcune posizioni fisse (indipendenti da G).

La funzione di trasferimento del sistema a segnali campionati si può anche ottenere in modo più semplice, osservando che uno scalino a tempo discreto sulla variabile $u^*(k)$ genera, per come opera lo ZOH, uno scalino a tempo continuo su $u(t)$. Ne consegue la seguente **procedura**:

1. Detta $Y(s) = G(s)/s$ la trasformata di Laplace della risposta di $G(s)$ allo scalino, si antitrasforma Y per ottenere la risposta allo scalino nel dominio del tempo $y(t)$;
2. Si valuta la risposta allo scalino negli istanti di campionamento, ottenendo $y^*(k) = y(kT)$;
3. Si calcola la trasformata Zeta $Y^*(z)$ di $y^*(k)$;
4. Si ricava $G^*(z)$ come rapporto tra $Y^*(z)$ e la trasformata dello scalino a tempo discreto:

$$G^*(z) = \frac{Y^*(z)}{\frac{z}{z-1}} = \frac{z-1}{z} Y^*(z).$$

La funzione di trasferimento che si ottiene con questa procedura è ovviamente identica a quella ottenuta precedentemente. Si ponga attenzione al fatto che quanto ottenuto con le due procedure espone un risultato esatto e non va confuso con le formule introdotte per la discretizzazione della legge di controllo (formule di Eulero e di Tustin).

Esempio

Si consideri il sistema di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{P}{s+p}.$$

Una realizzazione minima (in forma canonica di controllo) del sistema è la seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -px(t) + u(t) \\ y(t) &= px(t) \end{aligned}.$$

Risulta pertanto:

$$\mathbf{A} = -p, \mathbf{B} = 1, \mathbf{C} = p, \mathbf{D} = 0.$$

Il sistema a segnali campionati è quindi caratterizzato dalle matrici:

$$\mathbf{A}^* = e^{AT} = e^{-pT}, \quad \mathbf{B}^* = \int_0^T e^{A\sigma} \mathbf{B} d\sigma = \int_0^T e^{-p\sigma} d\sigma = \left[\frac{e^{-p\sigma}}{-p} \right]_0^T = \frac{1 - e^{-pT}}{p},$$

e dalla funzione di trasferimento:

$$G^*(z) = \mathbf{C}(\mathbf{zI} - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{B}^* + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{CB}^*}{z - \mathbf{A}^*} = \frac{1 - e^{-pT}}{z - e^{-pT}}.$$

D'altra parte la risposta allo scalino di $G(s)$ ha trasformata:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{p}{s(s+p)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+p},$$

e si antitrasforma immediatamente in:

$$y(t) = 1 - e^{-pt}, \quad t \geq 0.$$

Valutando questa risposta negli istanti di campionamento si ha:

$$y^*(k) = y(kT) = 1 - e^{-pkT}, \quad k \geq 0.$$

La trasformata Zeta di questa funzione è:

$$Y^*(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-pT}}.$$

Infine la funzione di trasferimento si ottiene come:

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z} Y^*(z) = 1 - \frac{z-1}{z - e^{-pT}} = \frac{1 - e^{-pT}}{z - e^{-pT}},$$

e coincide ovviamente con quella ricavata con l'altro metodo.

Si osservi che questa funzione di trasferimento ha guadagno unitario (come quella a tempo continuo) e che il suo polo è legato al polo di $G(s)$ dalla trasformazione di campionamento.

Progetto a tempo discreto del regolatore

Per il progetto del regolatore si può ora fare riferimento ad un sistema interamente a tempo discreto:

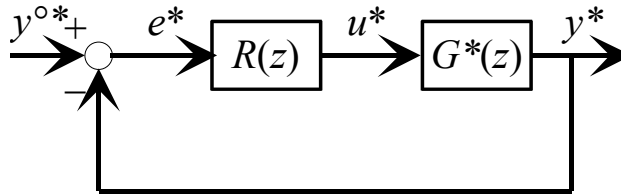


Fig. 23 :Sistema di controllo a tempo discreto

dove $G^*(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema a segnali campionati prima discussa.

A questo punto il regolatore si può progettare con la **teoria dei sistemi a tempo discreto**. Molti dei concetti e metodi visti per i sistemi di controllo a tempo continuo restano inalterati: il criterio di Nyquist ha fondamentalmente lo stesso enunciato, come pure è uguale il tracciamento del luogo delle radici.

Si osservi che per la scelta del **periodo di campionamento**, non essendoci un preesistente progetto a tempo continuo a cui rifarsi, occorre seguire altri criteri. Ad esempio si può selezionare il tempo di campionamento in modo che nel tempo di assestamento dei transienti del sistema in anello chiuso siano compresi un numero di passi di campionamento compreso tra 5 e 50.

A tempo discreto vengono inoltre utilizzati, più che a tempo continuo, metodi che assegnano il modello del sistema in anello chiuso (ossia la funzione di trasferimento dal riferimento alla variabile controllata) e da esso ricavano direttamente la funzione di trasferimento del controllore. Uno di questi metodi, noto anche come **metodo di Ragazzini**, prevede una procedura sistematica per l'assegnamento del modello in modo che siano soddisfatte una serie di requisiti sul sistema di controllo (causalità, stabilità, prestazioni) e verrà di seguito esposto nei suoi tratti essenziali.

Sia $F^*(z)$ la funzione di sensitività complementare del sistema di controllo di Fig. 23, ossia:

$$F^*(z) = \frac{Y^*(z)}{Y^{o*}(z)} = \frac{R(z)G^*(z)}{1 + R(z)G^*(z)}.$$

Assegnata $F^*(z)$, ossia assegnato il modello del sistema in anello chiuso, si può immediatamente ricavare la funzione di trasferimento del controllore:

$$R(z) = \frac{F^*(z)}{G^*(z)[1 - F^*(z)]}.$$

Tuttavia, al fine di pervenire ad un risultato di utilità pratica, ovvero ad un regolatore realizzabile, che non comporti generazione di parti non raggiungibili o non osservabili instabili e che conferisca al sistema di controllo determinate prestazioni, occorre scegliere $F^*(z)$ rispettando alcuni vincoli. Per agevolare la trattazione, esprimiamo tutte le funzioni di trasferimento come rapporti di polinomi, primi tra loro:

$$G^*(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad F^*(z) = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

Siano inoltre $n_N, n_D, n_Q, n_P, n_B, n_A$ i gradi dei sei polinomi. Assumendo $F^*(z)$ strettamente propria (al fine di evitare un anello algebrico nel sistema di controllo) sarà:

$$n_A > n_B.$$

In termini di questi polinomi, la **formula risolutiva** che dà la funzione di trasferimento del controllore si può esprimere come segue:

$$R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{D(z)B(z)}{N(z)[A(z) - B(z)]}.$$

Si osservi che i polinomi Q e P sono quelli che si ottengono a seguito di eventuali cancellazioni formali tra i polinomi a numeratore e a denominatore che compaiono nella formula risolutiva.

Vediamo ora da quali considerazioni scaturiscono i vincoli sulla scelta di $F^*(z)$.

1) Causalità del controllore

Il controllore deve essere un sistema causale (o fisicamente realizzabile) ovvero deve costituire un sistema dinamico proprio: il suo **grado relativo** (differenza tra il numero di poli ed il numero degli zeri) non deve essere negativo. Questo comporta che:

$$n_P \geq n_Q.$$

D'altra parte, dalla formula risolutiva si ottiene:

$$n_P - n_Q = n_N + n_{A-B} - (n_D + n_B) = n_N + n_A - (n_D + n_B),$$

dove si è utilizzato il fatto che il grado di $A-B$ coincide con il grado di A .

Pertanto deve risultare:

$$n_N + n_A - (n_D + n_B) \geq 0,$$

ossia:

$$\boxed{n_A - n_B \geq n_D - n_N}.$$

Pertanto il grado relativo di F^* deve essere almeno pari al grado relativo di G^* .

2) Stabilità e cancellazioni

Affinché il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, le radici di $A(z)$ devono ovviamente essere tutte a modulo minore di 1. Bisogna però anche evitare che eventuali zeri o poli a modulo maggiore o uguale a 1 in G^* siano cancellati dal regolatore, in modo da non formare parti non raggiungibili o non osservabili non asintoticamente stabili. Dalla formula risolutiva si traggono facilmente le conclusioni.

- Ogni zero z_i di $G^*(z)$ ($N(z_i)=0$), a modulo maggiore o uguale a 1 deve essere anche radice di $B(z)$:

$$\boxed{N(z_i) = 0, \quad |z_i| \geq 1 \Rightarrow B(z_i) = 0}$$

- Ogni polo p_i di $G^*(z)$ ($D(p_i)=0$), a modulo maggiore o uguale a 1 deve essere anche radice di $A(z)-B(z)$:

$$\boxed{D(p_i) = 0, \quad |p_i| \geq 1 \Rightarrow A(p_i) = B(p_i)}$$

3) Precisione statica

Per avere errore nullo a regime con riferimento a scalino, $F^*(z)$ deve avere guadagno unitario ($F^*(1)=1$):

$$\boxed{A(1) = B(1)}$$

4) Precisione dinamica

Per quanto concerne la scelta di poli e zeri di $F^*(z)$, una delle strategie più comuni, peculiare dei sistemi a tempo discreto, è il **controllo in tempo finito**. Con questa strategia, la variabile controllata y^* raggiunge, a seguito di una variazione a scalino del riferimento, il valore di regime in un numero finito di passi. Si osservi che questa circostanza è impossibile a tempo continuo. Per imporre questo comportamento al sistema in anello chiuso occorre che tutti i **poli di F^* siano nell'origine del piano complesso**, ossia che F^* assuma l'espressione:

$$\boxed{F^*(z) = \frac{B(z)}{z^{n_A}}}$$

In questo caso, infatti, risulta:

$$\frac{Y^*(z)}{Y^{o*}(z)} = \frac{b_0 z^{n_A} + b_1 z^{n_A-1} + \dots + b_{n_A}}{z^{n_A}} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_A} z^{-n_A},$$

e, nel dominio del tempo:

$$y^*(k) = b_0 y^{o*}(k) + b_1 y^{o*}(k-1) + \dots + b_{n_A} y^{o*}(k-n_A).$$

Si deduce quindi che effettivamente, se $y^{o*}(k) = \text{sca}(k)$, dopo n_A passi y^* non cambia più valore.

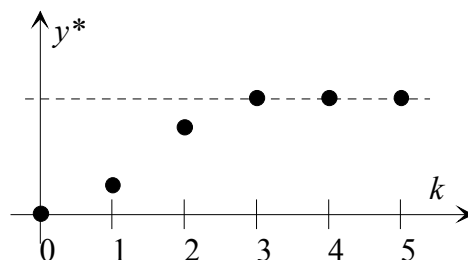


Fig. 24 : Controllo in tempo finito

Se si vuole in particolare che l'uscita raggiunga il valore di regime nel **tempo minimo**, sarà sufficiente porre:

$$\boxed{F^*(z) = \frac{1}{z^{\delta_G}}}$$

con $\delta_G = n_D - n_N$ grado relativo di G^* , per rispettare la condizione sulla causalità del controllore. La risposta di F^* allo scalino è quindi quella di un ritardo puro:

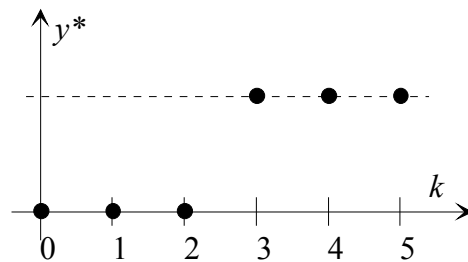


Fig. 25 : Controllo in tempo minimo

Si osservi che questa soluzione è possibile solo se G^* è un sistema strettamente proprio, asintoticamente stabile e a fase minima. Per ogni polo o zero di G^* a modulo maggiore o uguale a 1, occorrerà infatti aggiungere uno zero alla funzione di trasferimento ed un polo nell'origine, in modo da poter applicare la condizione di non cancellazione riportata precedentemente.

Pur se attraente dal punto di vista concettuale, la soluzione del controllo in tempo minimo così come presentata nasconde alcune difficoltà: la variabile di controllo è sollecitata in modo molto rilevante e può insorgere il fenomeno delle “**oscillazioni nascoste**”, ovvero di oscillazioni della variabile controllata y a tempo continuo che vengono mascherate dal processo di campionamento:

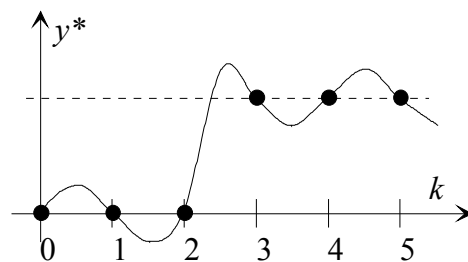


Fig. 26 : Oscillazioni nascoste

Per ovviare a queste difficoltà bisogna modificare il procedimento di sintesi, secondo tecniche alternative qui non affrontate.

Esempio

Sia:

$$G^*(z) = \frac{1}{z-2}.$$

Si vuole progettare $R(z)$ in modo che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y^* ad uno scalino in y^{o*} si esaurisca in tempo minimo, senza errore a regime.

Poiché G^* ha grado relativo 1, anche F^* deve avere grado relativo 1. Si osservi che G^* presenta un polo a modulo maggiore di 1. Per poter imporre sia la condizione sulla non cancellazione di questo polo che la condizione sulla precisione statica (guadagno unitario di F^*), diamo a F^* la seguente espressione:

$$F^*(z) = \rho \frac{z+a}{z^2}.$$

Imponiamo quindi le due condizioni:

$$\begin{cases} F^*(1) = 1 & (\text{precisione statica}) \\ A(2) = B(2) & (\text{non cancellazione}) \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} \rho(1+a) = 1 \\ \rho(2+a) = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2+a}{1+a} = 4 \Rightarrow a = -\frac{2}{3} \Rightarrow \rho = \frac{1}{1+a} = 3.$$

Pertanto:

$$F^*(z) = 3 \frac{z - \frac{2}{3}}{z^2} = \frac{3z-2}{z^2}.$$

Ne consegue la funzione di trasferimento del regolatore:

$$R(z) = \frac{\frac{3z-2}{z^2}}{\frac{1}{z-2} \left[1 - \frac{3z-2}{z^2} \right]} = \frac{(3z-2)(z-2)}{z^2 - 3z + 2} = \frac{(3z-2)(z-2)}{(z-1)(z-2)} = \frac{3z-2}{z-1}.$$

Si osservi la presenza nel regolatore di un polo in $z=1$ (azione integrale).