Lezione 5

Sistemi a tempo discreto

Introduzione

Un sistema dinamico a tempo discreto è caratterizzato dal fatto che tutte le variabili del sistema sono funzioni di una variabile temporale *k* che assume solo valori interi.

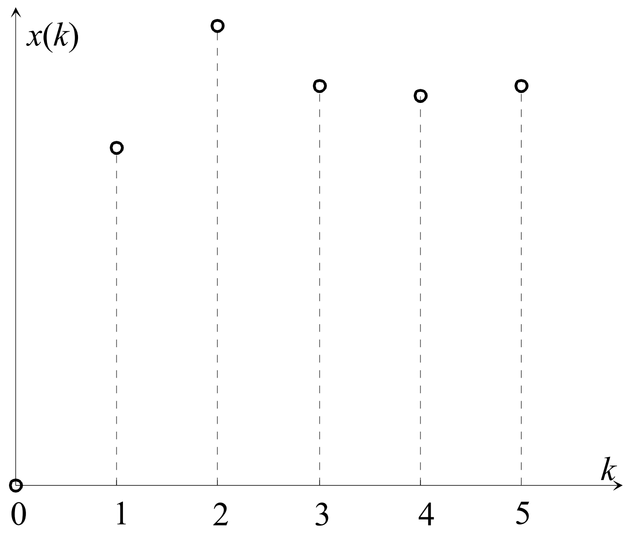

Fig. 1 : Segnale a tempo discreto

La motivazione dello studio dei sistemi a tempo discreto è duplice: da un lato questo studio è utile per la comprensione di alcuni aspetti del controllo digitale (eseguito al calcolatore), dall'altro vi sono sistemi (economici, ecologici, sociologici, ecc.) che si lasciano naturalmente descrivere come sistemi a tempo discreto. Ciò avviene in particolare in tutti i casi in cui i dati disponibili sono nella forma di serie temporali.

Nel seguito ripercorreremo rapidamente l'analisi dei sistemi già svolta a tempo continuo, soffermandoci in particolare sui punti in cui l'analisi dei sistemi a tempo discreto differisce.

Il sistema dinamico

Il sistema dinamico a tempo discreto è caratterizzato da un certo numero (m) di ingressi e un certo numero (p) di uscite.

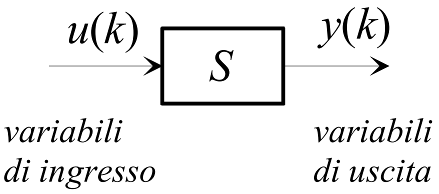

Fig. 2 : Sistema a tempo discreto

Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite del sistema, noti gli andamenti degli ingressi a partire dall'istante iniziale, prende il nome di *ordine* del sistema: lo si indica con n.

Il sistema si lascia descrivere per mezzo di n **equazioni alle differenze**, cui si aggiungono p equazioni algebriche per determinare le uscite:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k), k)$$

Si usano le stesse classificazioni viste per i sistemi a tempo continuo: sistemi SISO e MIMO, tempo varianti e invarianti, strettamente propri e no, lineari e non lineari.

In particolare, un sistema lineare tempo invariante (LTI) potrà essere descritto per mezzo di quattro matrici, nella forma:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

Assegnata una condizione iniziale all'istante k_0 ed un ingresso a partire da k_0, definiamo **movimento** dello stato la soluzione delle equazioni di stato corredate dalla condizione iniziale assegnata e movimento dell'uscita la conseguente uscita, ricavabile dalla trasformazione d'uscita.

L'**equilibrio** è un particolare movimento costante nel tempo a seguito di un ingresso costante nel tempo. Occorre però prestare attenzione al fatto che, nei sistemi tempo invarianti, per determinare gli stati di equilibrio corrispondenti ad un ingresso $\bar{\boldsymbol{u}}$ si deve imporre che lo stato sia uguale a se stesso in tutti gli istanti, ossia che:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) = \bar{\boldsymbol{x}}$$

Pertanto gli stati di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione implicita:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}})$$

In corrispondenza di ogni soluzione di questa equazione, si ha la corrispondente uscita di equilibrio:

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}})$$

Si danno infine le stesse definizioni, viste a tempo continuo, di movimento stabile, instabile, asintoticamente stabile.

Esempio 1

Si supponga di dover risolvere numericamente l'equazione scalare:

$$z = f(z),$$

con f generica funzione non lineare. Un metodo per risolvere numericamente l'equazione può consistere nel partire da una certa soluzione iniziale di tentativo x_0 ed iterare secondo la formula:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}.$$

Questa formula costituisce un sistema dinamico non lineare tempo invariante, dove l'indice temporale k scandisce le successive iterazioni dell'algoritmo. Si osservi che gli stati di equilibrio del sistema dinamico sono soluzioni dell'equazione implicita:

$$\bar{x} = f(\bar{x}),$$

ossia sono soluzioni dell'equazione non lineare data. Naturalmente non è detto che si converga alla soluzione dell'equazione partendo da una generica condizione iniziale.

Se ad esempio $f(z) = -z^3$, per cui l'unica soluzione reale dell'equazione è z=0, l'algoritmo iterativo è il seguente:

$$x(k+1) = -x(k)^3.$$

Partendo da x_0 = 1/2, le prime iterazioni sono:

$$\begin{aligned} x(1) &= -(1/2)^3 = -1/8 \\ x(2) &= -(-1/8)^3 = 1/512 \\ x(3) &= -(1/512)^3 = -1/134217728 \end{aligned}$$

Esempio 2

Consideriamo un sistema economico in cui definiamo le variabili:

$y(k)$: reddito nazionale nell'anno k;

$c(k)$: consumi nell'anno k;

$i(k)$: investimenti privati nell'anno k;

$u(k)$: spesa pubblica nell'anno k.

Il sistema può essere descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} y(k) &= c(k) + i(k) + u(k) \\ c(k) &= \alpha y(k-1) \\ i(k) &= \beta(c(k) - c(k-1)) \end{aligned}$$

Possiamo rappresentare queste equazioni in termini di sistema dinamico, introducendo le variabili di stato:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= c(k) \\ x_2(k) &= i(k) \end{aligned}$$

Traslando le ultime due equazioni di un passo in avanti, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= c(k+1) = \alpha y(k) = \alpha\big(c(k)+i(k)+u(k)\big) = \\
&= \alpha x_1(k) + \alpha x_2(k) + \alpha u(k) \\
x_2(k+1) &= i(k+1) = \beta\big(c(k+1)-c(k)\big) = \beta\big(\alpha\big(c(k)+i(k)+u(k)\big)-c(k)\big) = \\
&= \beta(\alpha-1)x_1(k) + \beta\alpha x_2(k) + \beta\alpha u(k) \\
y(k) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k)
\end{aligned}
$$

Il sistema è LTI, con matrici:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta(\alpha-1) & \beta\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 1
$$

Sistemi lineari tempo invarianti

Consideriamo un sistema LTI:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

Proponiamoci di calcolare il movimento dello stato a partire dall'istante k=0, in cui $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$. Si ottiene, iterativamente:

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0)$$
$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1)$$
$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(2) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2) = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2)$$
$$\vdots$$

Per induzione, possiamo ricavare la formula generale del movimento dello stato:

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\left[\boldsymbol{A}^{k-i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)\right],$$

cui corrisponde la formula per il movimento dell'uscita:

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\left[\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)\right] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k).$$

Come a tempo continuo, il movimento può quindi essere scomposto in **movimento libero e movimento forzato**: il primo dipende solo dallo stato iniziale, il secondo solo dall'ingresso.

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}_l(k) &= \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{y}_l(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0\end{aligned}\right\}\ \text{moto libero}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}_f(k) &= \sum_{i=0}^{k-1}\left[\boldsymbol{A}^{k-i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)\right]\\ \boldsymbol{y}_f(k) &= \sum_{i=0}^{k-1}\left[\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)\right] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}\right\}\ \text{moto forzato}$$

Poiché il moto libero è lineare nello stato iniziale, ed il moto forzato lo è nell'ingresso, vale il **principio di sovrapposizione degli effetti** (di fatto valido anche per sistema tempo variante, purché lineare).

Per quanto riguarda gli equilibri, per quanto già osservato, essi risolvono l'equazione implicita:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}}$$

dove $\bar{\boldsymbol{u}}$ è un ingresso costante. A ciascun eventuale stato di equilibrio è associata l'uscita di equilibrio:

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\bar{\boldsymbol{u}}\ .$$

Se la matrice $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ è invertibile, il che avviene se $\boldsymbol{A}$ non ha autovalori in s=1, esiste un solo stato di equilibrio, dato dall'espressione:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}}$$

Inoltre risulta:

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \mu \bar{\boldsymbol{u}}$$

con:

$$\mu = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

guadagno statico del sistema.

E' utile ricordare che, effettuando un cambiamento di variabili di stato:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(k), \quad \det \boldsymbol{T} \neq 0$$

le matrici del sistema si trasformano esattamente come a tempo continuo:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}, \quad \hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}.$$

Inoltre le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità si definiscono come a tempo continuo, ed i test per verificarle sono identici.

Sistemi LTI: stabilità

Per i sistemi LTI a tempo discreto valgono considerazioni sulla stabilità del tutto analoghe a quelle fatte a tempo continuo. In particolare quindi la stabilità è una proprietà del sistema (tutti i movimenti sono asintoticamente stabili, stabili o instabili). Inoltre la stabilità si può valutare studiando le soluzioni dell'equazione libera in $\delta \boldsymbol{x}$ (differenza tra movimento perturbato e movimento nominale):

$$\delta \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A} \delta \boldsymbol{x}(k)$$

al variare della condizione iniziale $\delta \boldsymbol{x}(0)$. Risulta:

$$\delta \boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k \delta \boldsymbol{x}(0).$$

Se tutte le componenti del moto libero sono limitate, qualunque sia lo stato iniziale, il sistema è stabile; se inoltre decadono tutte a zero, il sistema è asintoticamente stabile; se per almeno uno stato iniziale almeno una componente del moto libero non decade a zero il sistema è instabile.

Se la matrice $\boldsymbol{A}$ è diagonalizzabile, cioè se:

$$\exists \boldsymbol{T} : \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} = \hat{\boldsymbol{A}} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\},$$

dove λ_i sono gli autovalori di $\boldsymbol{A}$, risulta:

$$\delta \boldsymbol{x}(k) = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\right)^k \delta \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}^k \boldsymbol{T} \delta \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} \boldsymbol{T} \delta \boldsymbol{x}(0).$$

Le componenti del moto libero del sistema sono quindi combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori. Di seguito sono riportati gli andamenti di λ^k al variare di λ reale:

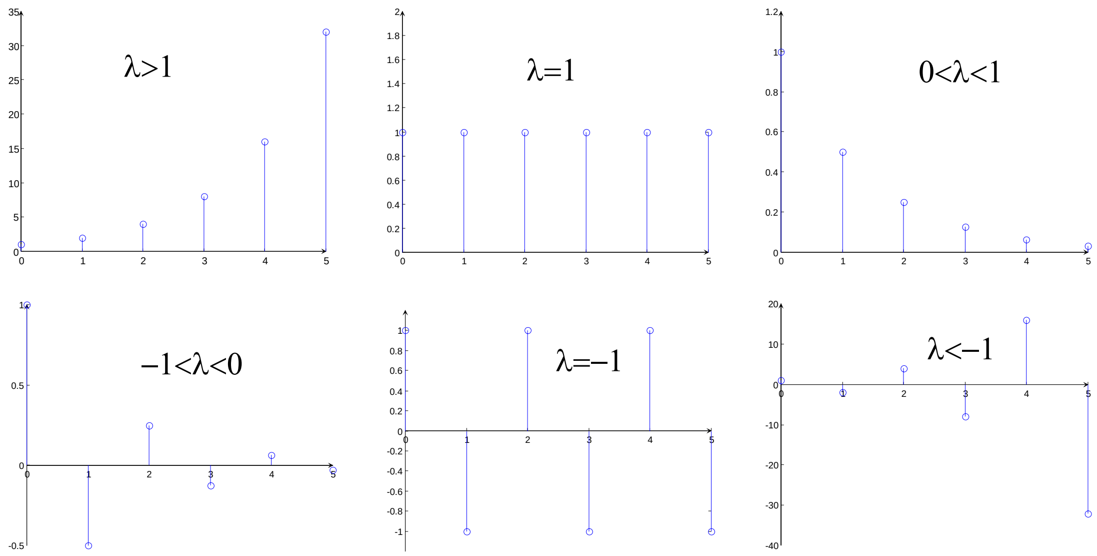

Fig. 3 : Esponenziale a tempo discreto

Naturalmente, accanto ad un autovalore complesso $\lambda_i=\rho_i e^{j\vartheta_i}$ ci sarà anche il coniugato e la combinazione dei due termini darà luogo ad un termine reale del tipo $\rho_i^k\cos(\vartheta_i k+\varphi_i)$, con φ_i fase opportuna.

E' facile allora rendersi conto che se tutti gli autovalori hanno modulo minore di 1, tutti i moti liberi sono limitati e decadono a zero; se non ci sono autovalori a modulo maggiore di 1, ma ce ne sono a modulo unitario, nessun moto libero diverge, ma vi sono moti liberi che non decadono a zero; se c'è almeno un autovalore a modulo maggiore di 1, almeno un moto libero non è limitato.

Possiamo pertanto concludere che un sistema dinamico lineare tempo invariante a tempo discreto è:

asintoticamente stabile:	se e solo se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ hanno modulo minore di 1;
stabile:	se e solo se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ hanno modulo minore o uguale a 1 e ne esistono a modulo uguale a 1;
instabile:	se e solo se esistono autovalori di $\boldsymbol{A}$ a modulo maggiore di 1.

Osservazioni

1) In pratica si tratta di parafrasare le condizioni di stabilità valide per un sistema a tempo continuo, sostituendo al semipiano sinistro del piano complesso il cerchio di centro l'origine e raggio unitario (insieme dei numeri complessi che hanno modulo minore di 1).

2) Ricordiamo che a seguito di un cambiamento di variabili di stato descritto da una matrice di trasformazione $\boldsymbol{T}$, la matrice $\boldsymbol{A}$ del sistema si trasforma secondo una relazione di similitudine ($\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{TAT}^{-1}$). Poiché matrici simili hanno gli stessi autovalori, l'analisi della stabilità è del tutto indipendente dalla scelta delle variabili di stato. In altre parole, la proprietà di stabilità è una **proprietà strutturale** del sistema dinamico.

3) Se la matrice $\boldsymbol{A}$ non è diagonalizzabile, può essere messa in relazione di similitudine con una forma canonica (forma di Jordan). Seguendo questa strada si giunge alla conclusione che il teorema precedentemente enunciato va corredato dalla precisazione che se vi sono autovalori multipli a modulo unitario (e non vi sono autovalori a modulo maggiore di 1), il sistema è instabile se per almeno uno degli autovalori a modulo unitario la cosiddetta *molteplicità geometrica* (numero degli autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore) è inferiore alla *molteplicità algebrica* (molteplicità con cui l'autovalore è radice del polinomio caratteristico).

Esempio

Si consideri nuovamente il sistema economico, in cui:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \beta(\alpha-1) & \beta\alpha\end{bmatrix}.$$

Posto α=0.5, β=1, si ha:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & \lambda - 0.5 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.5)^2 + 0.25 = \lambda^2 - \lambda + 0.5$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{1 \pm j}{2}$$

e sono disposti nel piano complesso come in figura:

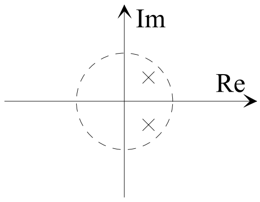

Fig. 4 : Autovalori per l'esempio economico

Poiché gli autovalori hanno entrambi modulo minore di 1, il sistema è asintoticamente stabile.

Trasformazione bilineare

Anche per i sistemi a tempo discreto è possibile studiare la stabilità evitando il calcolo diretto degli autovalori, ma studiando i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice ***A***:

$$\varphi(z) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \varphi_2 z^{n-2} + \cdots + \varphi_n \, .$$

Esiste un criterio, dovuto a Jury, per determinare le condizioni sui coefficienti φ_i necessarie e sufficienti perché il polinomio ammetta tutte radici a modulo minore di 1. Tuttavia è anche possibile ricondursi all'impiego del criterio noto a tempo continuo, il criterio di Routh, per verificare se un polinomio ha tutte le radici a parte reale negativa. A questo scopo, occorre individuare una trasformazione di variabili $z=\psi(s)$, tale che, sostituita nell'equazione $\varphi(z)=0$, dia luogo ancora ad un'equazione polinomiale, in s, le cui radici abbiano tutte parte reale negativa se e solo se l'equazione $\varphi(z)=0$ ha tutte le radici a modulo minore di 1.

Una trasformazione utilizzabile a questo proposito è la **trasformazione bilineare**:

$$z = \frac{1+s}{1-s} \, .$$

Ovviamente questa trasformazione, essendo razionale, dà luogo ad un'equazione polinomiale. Inoltre è facile verificare che il modulo di z è minore di 1 se e solo se la parte reale di s è negativa. Posto infatti $s = x+jy$, si ha:

$$|z|^2 = \frac{|1+x+jy|^2}{|1-x-jy|^2} = \frac{x^2+y^2+2x+1}{x^2+y^2-2x+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \, .$$

Una volta determinato il polinomio in s, si procede con il criterio di Routh per l'analisi di stabilità.

Esempio

Si consideri il polinomio di terzo grado:

$$\varphi(z) = 8z^3 - 12z^2 + 6z - 1 \, .$$

Applicando la trasformazione bilineare ed uguagliando a zero si ottiene:

$$8\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 - 12\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + 6\left(\frac{1+s}{1-s}\right) - 1 = 0 \, .$$

Prendendo il denominatore comune ed uguagliando a zero il polinomio a numeratore:

$$8(1+s)^3 - 12(1+s)^2(1-s) + 6(1+s)(1-s)^2 - (1-s)^3 = 0 \, ,$$

ossia:

$$27s^3 + 27s^2 + 9s + 1 = 0 \, .$$

Costruiamo la tabella di Routh:

27	9	0
27	1	0
8	0	
1		

Poiché tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, il polinomio in s ha tutte le radici a parte reale negativa. Questo comporta che il polinomio in z ha tutte le radici a modulo minore di 1 e quindi che il sistema è asintoticamente stabile. Si osservi che, in effetti:

$$\varphi(z) = 8(z - 0.5)^3,$$

ovvero che le tre radici del polinomio in z coincidono nel punto 0.5.

Stabilità degli stati di equilibrio

Anche a tempo discreto lo studio dei sistemi lineari risulta utile per lo studio locale dei sistemi non lineari nell'intorno di stati di equilibrio.

Si consideri un sistema non lineare tempo invariante:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k))\end{aligned},$$

e si supponga che, in corrispondenza ad un ingresso costante $\bar{\boldsymbol{u}}$ si abbia lo stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}}$ e l'uscita di equilibrio $\bar{\boldsymbol{y}}$, per cui:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})$$

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}).$$

Introducendo le variabili:

$$\delta\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{u}(k) - \bar{\boldsymbol{u}}, \quad \delta\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{x}(k) - \bar{\boldsymbol{x}}, \quad \delta\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{y}(k) - \bar{\boldsymbol{y}},$$

si formula il sistema linearizzato:

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{u}(k) \\ \delta\boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{u}(k)\end{aligned},$$

con:

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{C} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{D} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}$$

Il sistema linearizzato risulta in particolare utile per lo studio della stabilità dello stato di equilibrio del sistema non lineare Valgono infatti i seguenti risultati:

1) Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha tutti autovalori a modulo minore di 1 (ossia se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile) lo stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}}$ è **asintoticamente stabile**.

2) Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha almeno un autovalore a modulo maggiore di 1 lo stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}}$ è **instabile**.

Resta come caso indecidibile sulla base dell'analisi del sistema linearizzato quello in cui la matrice $\boldsymbol{A}$ non ha autovalori a modulo maggiore di 1 ma ne ha a modulo uguale a 1. In questo caso occorrono approssimazioni del sistema originario non lineare estese a termini di ordine superiore al primo per decidere circa la stabilità dello stato di equilibrio.

Esempio

Consideriamo il sistema a tempo discreto del primo ordine:

$$x(k+1) = f(x(k),u(k)) = \cos(x(k)) + u(k).$$

Siamo interessati allo studio di eventuali equilibri che si hanno quando l'ingresso è nullo: $u(k) = \bar{u} = 0$. Per trovare gli stati di equilibrio, imponiamo la condizione:

$$\bar{x} = f(\bar{x},\bar{u}) = f(\bar{x},0) = \cos(\bar{x}).$$

Graficamente si trova una sola soluzione:

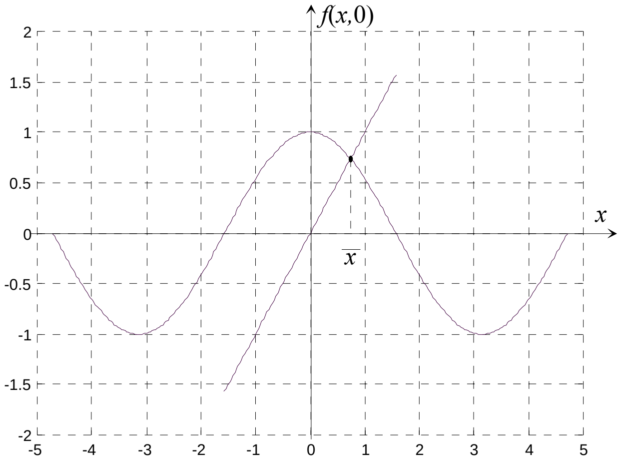

Fig. 5 : Ricerca grafica dello stato di equilibrio

Risulta $\bar{x} \approx 0.74$. L'unico autovalore del sistema linearizzato si ottiene come:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = -\sin(\bar{x}) = -\sqrt{1-\cos(\bar{x})^2} = -\sqrt{1-\bar{x}^2} = -0.67\,.$$

Poiché l'autovalore è in modulo minore di 1, lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

Trasformata Zeta

Dato un sistema LTI, in analogia con il procedimento seguito a tempo continuo, considereremo una rappresentazione alternativa del sistema, ottenuta introducendo i vettori $\boldsymbol{U}(z)$ e $\boldsymbol{Y}(z)$, rispettivamente vettori delle trasformate Zeta degli ingressi e delle uscite del sistema dinamico. Anche nel caso discreto il pregio dell'approccio nelle trasformate consiste nel fatto che, come si dimostrerà, il legame tra la trasformata dell'ingresso e la trasforamta dell'uscita è espresso da equazioni algebriche.

$$\begin{tikzcd}
u(k) \arrow[r, "\text{trasformata}"] \arrow[d, bend right, "\textit{eq. alle differenze}"'] & U(z) \arrow[d, bend left, "\textit{eq. algebriche}"] \\
y(k) & Y(z) \arrow[l, "\text{antitrasformata}"']
\end{tikzcd}$$

Fig. 6 : Approccio nel dominio delle trasformate

Si consideri dunque una generica funzione reale $v(k)$, definita per k intero ≥ 0, tale che, per almeno un $r \in \Re$, $r>0$, risulti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |v(k)| r^{-k} < \infty .$$

La serie:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k}$$

converge per valori della variabile complessa z tali che $|z|>r$, ovvero nel cosiddetto co-cerchio di convergenza. Definiamo **trasformata Zeta** di v l'unica funzione di z, definita ed analitica quasi ovunque nel piano complesso, che nel co-cerchio di convergenza della serie, coincide con la somma $V(z)$ della serie stessa.

Esempi di calcolo diretto della trasformata

<u>Impulso</u>

Consideriamo l'impulso unitario a tempo discreto (delta di Kronecker):

$$v(k) = \mathrm{imp}(k) = \delta_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

risulta:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} = v(0) + v(1) z^{-1} + v(2) z^{-2} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

<u>Esponenziale</u>

Consideriamo l'esponenziale a tempo discreto $v(k)=a^k$. Risulta:

$$V(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{per } \left|az^{-1}\right|<1\ \left(|z|>|a|\right)$$

Per a=1 si ha lo <u>scalino a tempo discreto</u>:

$$v(k)=\mathrm{sca}(k) \quad \Rightarrow \quad V(z)=\frac{z}{z-1}$$

Proprietà della trasformata Zeta

<u>Linearità</u>

$$v(k)=\alpha v_1(k)+\beta v_2(k) \quad \Rightarrow \quad V(z)=\alpha V_1(z)+\beta V_2(z)$$

<u>Anticipi e ritardi</u>

$$v_2(k)=v_1(k+1) \quad \Rightarrow \quad V_2(z)=z\left(V_1(z)-v_1(0)\right)$$

$$v_2(k)=v_1(k-1) \quad \Rightarrow \quad V_2(z)=z^{-1}V_1(z)$$

<u>Derivazione in *z*</u>

$$v_2(k)=kv_1(k) \quad \Rightarrow \quad V_2(z)=-z\frac{dV_1(z)}{dz}$$

<u>Valore iniziale</u>

$$v(0)=\lim_{z\to\infty} V(z)$$

<u>Valore finale</u> (applicabile se i poli di V sono a modulo < 1 o in z=1)

$$v(\infty)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)V(z)\right]$$

Esempi

1) Consideriamo la rampa a tempo discreto:

$$\mathrm{ram}(k)=k, \quad k\geq 0$$

Poiché ram(k) = $k$sca(k), si ha:

$$\mathrm{Z}\left[\mathrm{ram}(k)\right]=-z\frac{d}{dz}\mathrm{Z}\left[\mathrm{sca}(k)\right]=-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right]=\frac{z}{(z-1)^2}$$

2) Consideriamo un segnale di trasformata

$$V(z)=\frac{z}{z-a}$$

Dai teoremi del valore iniziale e finale:

$$v(0)=\lim_{z\to\infty} V(z)=1$$

$$v(\infty)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)V(z)\right]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z}{z-a}\right]=0 \quad \Leftrightarrow \quad |a|<1$$

Se a=1, il teorema del valore finale è ancora applicabile e risulta:

$$v(\infty) = \lim_{z \to 1}[(z-1)V(z)] = \lim_{z \to 1}\left[(z-1)\frac{z}{z-1}\right] = 1 .$$

Tutti questi risultati sono coerenti con il fatto che $v(k) = a^k$

Trasformate notevoli

Utilizzando le proprietà della trasformata, si può compilare la seguente tabella di trasformate notevoli:

$v(k)$	$V(z)$
$\mathrm{imp}(k)$	1
$\mathrm{sca}(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\mathrm{ram}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$\mathrm{par}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
ka^k	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$

dove par(k) = $k(k-1)/2$, $k \geq 0$.

Antitrasformata Zeta

Come la trasformata di Laplace, anche la trasformata Zeta è biunivoca: data una trasformata, è sempre possibile risalire univocamente alla funzione del tempo che la genera.

Per trasformate Zeta razionali (rapporti di polinomi), si può utilizzare per l'antitrasformata il metodo di **Heaviside**, ossia di scomposizione in frazioni semplici. Di fatto conviene scomporre $V(z)/z$, secondo il seguente schema (per poli semplici):

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z-p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{z-p_n}$$

$$V(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z-p_1} + \cdots + \alpha_n \frac{z}{z-p_n}$$

$$v(k) = \alpha_0 \operatorname{imp}(k) + \alpha_1 p_1^k + \cdots + \alpha_n p_n^k, \quad k \geq 0$$

In alternativa si può usare il metodo della **lunga divisione**, che consiste nel dividere il polinomio a numeratore e quello a denominatore, in modo da trovare, per confronto tra il risultato parziale della divisione e l'espansione della serie che costituisce la trasformata Zeta, i primi campioni dell'antitrasformata:

$$V(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v(0) = \beta_0 \\ v(1) = \beta_1 \\ v(2) = \beta_2 \end{array}$$

Esempio

Consideriamo la trasformata Zeta:

$$V(z) = \frac{3z+12}{z^2+5z+6}$$

Con il metodo di Heaviside, si ottiene:

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{3z+12}{z(z+2)(z+3)} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z+2} + \frac{\alpha_2}{z+3} = \frac{\alpha_0(z+2)(z+3) + \alpha_1 z(z+3) + \alpha_2 z(z+2)}{z(z+2)(z+3)}$$

Valutando il polinomio a numeratore in z=0, z=–2, z=–3, si ottiene:

$$\begin{cases} 6\alpha_0 = 12 \\ -2\alpha_1 = 6 \\ 3\alpha_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Pertanto la trasformata Zeta data si scompone nella somma:

$$V(z) = 2 - 3\frac{z}{z+2} + \frac{z}{z+3}$$

immediatamente antitrasformabile in:

$$v(k) = 2imp(k) - 3(-2)^k + (-3)^k, \quad k \geq 0 .$$

Con il metodo della lunga divisione si ottiene invece:

$$
\begin{array}{l|l}
3z+12 & z^2+5z+6 \\
3z+15+18z^{-1} & 3z^{-1}-3z^{-2}-3z^{-3} \\
\hline
-3-18z^{-1} & \\
-3-15z^{-1}-18z^{-2} & \\
\hline
-3z^{-1}+18z^{-2} &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{c}
v(0)=0 \\
v(1)=3 \\
v(2)=-3 \\
v(3)=-3
\end{array}
$$

Funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\
\boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)
\end{aligned}
$$

Applichiamo la trasformata Zeta ad entrambi i membri delle equazioni, supponendo lo stato iniziale nullo ($\boldsymbol{x}(0)=0$):

$$
\begin{aligned}
z\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)\\
\boldsymbol{Y}(z) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}(z) &= (z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)\\
\boldsymbol{Y}(z) &= \left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{U}(z)
\end{aligned}
$$

Si è ottenuto:

$$
\boldsymbol{Y}(z)=\boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{U}(z), \quad \boldsymbol{G}(z)=\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}
$$

La matrice a p righe e m colonne $\boldsymbol{G}(z)$ prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema e dà la trasformata dell'uscita forzata dall'ingresso. Nel caso SISO possiamo dunque scrivere:

$$
G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}.
$$

La funzione di trasferimento a tempo discreto ha formalmente la stessa espressione di quella a tempo continuo. Pertanto gode delle stesse proprietà:

- La f.d.t. è invariante rispetto a cambiamenti di variabili di stato.
- Nel caso SISO la f.d.t. è rapporto di due polinomi:

  $$
  G(z)=\frac{N(z)}{D(z)}
  $$

- Le radici del polinomio a numeratore si chiamano **zeri**, le radici del polinomio a denominatore **poli**
- A meno di cancellazioni, i poli coincidono con gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$, sicché l'analisi di stabilità del sistema può essere condotta anche analizzando i poli della funzione di trasferimento.

Facendo ora riferimento ad un sistema SISO, si introduce il concetto di **tipo** g della funzione di trasferimento, numero intero positivo, nullo o negativo: se positivo, la funzione di trasferimento presenta g poli in $z=1$, se negativo, vi sono $(-g)$ zeri in $z=1$, se nullo non vi sono né zeri, né poli in $z=1$.

Consideriamo una funzione di trasferimento priva di poli o zeri in $z=1$ (ovvero di tipo nullo). Definiamo **guadagno** della funzione di trasferimento il valore che assume per $z=1$:

$$
\mu = G(1)=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}.
$$

Il guadagno della funzione di trasferimento coincide quindi con il guadagno statico del sistema, ossia con il rapporto uscita/ingresso all'equilibrio.

Si supponga inoltre il sistema **asintoticamente stabile** e lo si solleciti con un ingresso a scalino:

$$u(k)=\mathrm{sca}(k) \quad \Rightarrow \quad U(z)=\frac{z}{z-1}$$

Risulta:

$$\lim_{k\to\infty} y(k)=\lim_{z\to 1}[(z-1)Y(z)]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)G(z)\frac{z}{z-1}\right]=G(1)=\mu$$

Pertanto il guadagno della funzione di trasferimento è il valore di regime della risposta allo scalino del sistema.

In presenza di poli o zeri in z=1 (funzione di trasferimento di tipo non nullo), la nozione di guadagno si generalizza come:

$$\mu=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^g G(z)\right].$$

A differenza di quanto avviene a tempo continuo, anche il **ritardo di tempo** ha funzione di trasferimento razionale. Se infatti risulta:

$$y(k)=u(k-h),$$

con h intero positivo, applicando iterativamente la regola sul ritardo di un passo della trasformata Zeta, si ha:

$$Y(z)=z^{-h}U(z).$$

Pertanto la funzione di trasferimento è:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=z^{-h}=\frac{1}{z^h}.$$

Si tratta quindi di un sistema di guadagno 1, con h poli nell'origine.

Risposte temporali

Le risposte temporali si calcolano con lo stesso procedimento utilizzato a tempo continuo:

0. Calcolo della funzione di trasferimento del sistema
1. Trasformazione Zeta dell'ingresso
2. Calcolo della trasformata Zeta dell'uscita ($Y(z)=G(z)U(z)$)
3. Antitrasformazione Zeta dell'uscita

A titolo d'esempio si consideri il sistema del primo ordine:

$$G(z)=\mu\frac{1-p}{z-p}.$$

Calcoliamo la risposta allo scalino:

$$u(k)=\mathrm{sca}(k) \quad\Rightarrow\quad U(z)=\frac{z}{z-1}$$

La trasformata dell'uscita è:

$$Y(z)=\mu\frac{1-p}{z-p}\frac{z}{z-1}=\mu\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-p}\right).$$

Antitrasformando:

$$y(k)=\mu\left(1-p^k\right), \quad k\geq 0.$$

Se $|p|<1$ il sistema è asintoticamente stabile e la risposta allo scalino converge al valore $\mu=G(1)$. Tuttavia, se $p>0$, la risposta è monotona, se $p<0$ è oscillante:

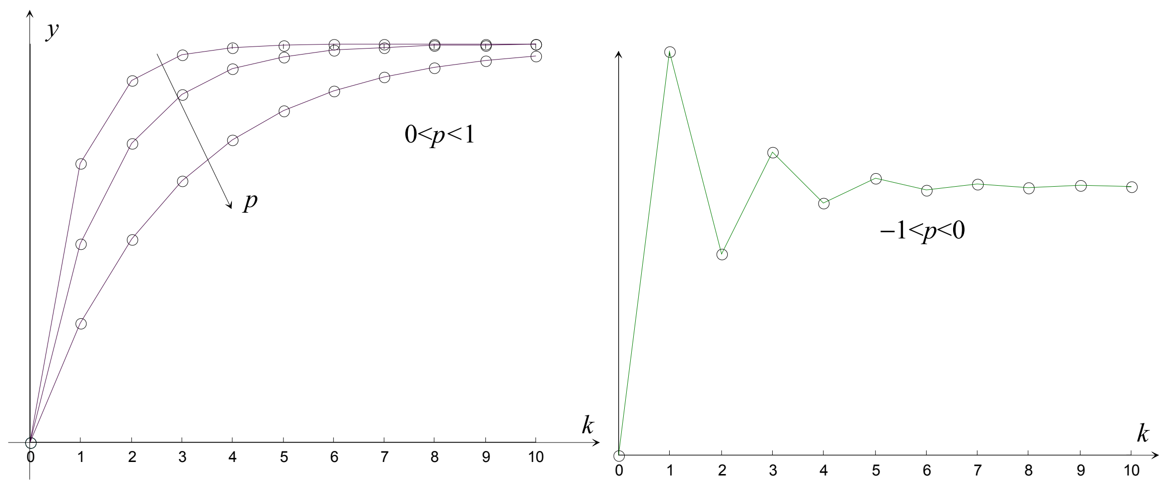

Fig. 7 : Risposta allo scalino di un sistema del primo ordine

Si osservi che, contrariamente ai sistemi a tempo continuo, anche un sistema del primo ordine, con polo compreso tra –1 e 0, può dare luogo ad una risposta allo scalino oscillante.

Risposta in frequenza

In un sistema LTI **asintoticamente stabile**, sollecitato dall'ingresso:

$$u(k) = U \sin(\bar{\theta} k + \phi)$$

esaurito un transitorio iniziale, l'uscita assume l'espressione:

$$y(k) = Y \sin(\bar{\theta} k + \psi)$$

con:

$$Y = U \left| G\left(e^{j\bar{\theta}}\right) \right|$$

$$\psi = \phi + \angle G\left(e^{j\bar{\theta}}\right)$$

Anche a tempo discreto è possibile estendere questo risultato a segnali in ingresso più generali, purché trasformabili con Fourier.

La funzione complessa della variabile reale θ definita da:

$$G\left(e^{j\theta}\right), \quad \theta \in [0, \pi]$$

prende il nome di **risposta in frequenza** del sistema, e si definisce per qualsiasi sistema lineare tempo invariante, indipendentemente dalla sua stabilità.

La risposta in frequenza si ottiene quindi valutando la funzione di trasferimento sulla semicirconferenza superiore di centro l'origine e raggio unitario:

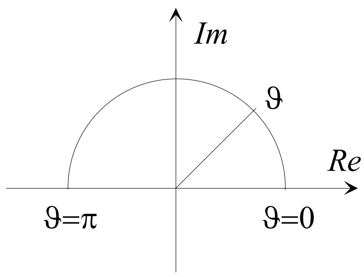

Fig. 8 : Luogo dei punti per il calcolo della risposta in frequenza

La risposta in frequenza costituisce uno strumento completo per l'analisi del sistema dinamico. Tuttavia il suo utilizzo è considerevolmente limitato dal fatto che il tracciamento dei diagrammi della risposta in frequenza (di Bode) non è agevole e non se ne danno approssimazioni asintotiche.