

Lezione 4

Schemi avanzati di controllo

Compensazione di disturbi misurabili

Nei sistemi di controllo è frequente il caso in cui il disturbo in linea d'andata sia misurabile. E' allora possibile sfruttare l'informazione data dalla misura e agire direttamente sulla variabile di controllo, anticipando l'effetto del disturbo sull'uscita, senza attendere che questo si manifesti in errore. Si usa parlare di **compensazione diretta** del disturbo quando:

- il disturbo è misurabile
- si esercita un'azione di controllo dipendente dalla sua misura.

Consideriamo dunque un sistema sotto controllo su cui agisce un disturbo:

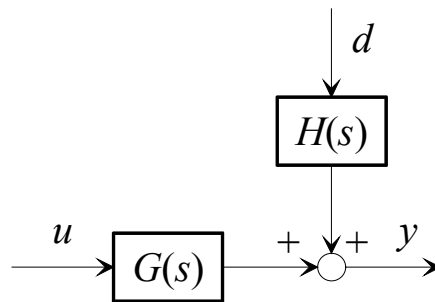


Fig. 1 : Sistema sotto controllo

Uno schema di compensazione potrebbe essere il seguente:

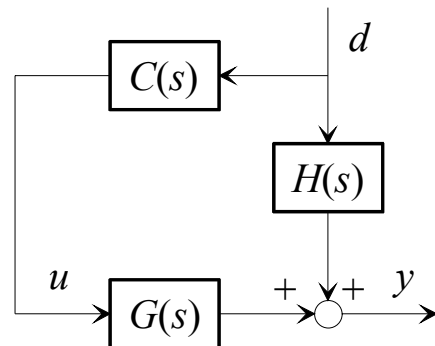


Fig. 2 : Compensazione del disturbo

La funzione di trasferimento $C(s)$ descrive il comportamento dinamico del **compensatore** e comprende anche l'effetto dinamico del trasduttore del disturbo, qualora esso non risulti trascurabile.

Per il progetto di $C(s)$ si può imporre che la funzione di trasferimento da d a y sia nulla:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) + C(s)G(s) = 0 ,$$

da cui:

$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)} .$$

Il risultato di questa operazione non è tuttavia direttamente utilizzabile ogniqualvolta $G(s)$ ha zeri a parte reale positiva o ritardi (si otterrebbe un compensatore instabile o con azione predittiva) oppure quando il grado relativo di G è superiore a quello di H (si otterrebbe un compensatore con più zeri che poli). In ogni caso il compensatore derivante da questa formula può essere di ordine eccessivamente elevato.

Si può tuttavia utilizzare la formula precedente per ricavare la funzione di trasferimento di compensatori in grado di far fronte a tipologie di disturbi specifiche. In particolare sono di interesse le seguenti situazioni:

- **Disturbo costante** a regime. Per annullarne asintoticamente l'effetto è sufficiente approssimare la formula generale per $s=0$:

$$C(s) = \mu_C = -\frac{H(0)}{G(0)}.$$

- **Disturbo sinusoidale** alla pulsazione $\bar{\omega}$. Per annullarne asintoticamente l'effetto è sufficiente approssimare la risposta in frequenza solo ad una determinata pulsazione $\bar{\omega}$:

$$C(j\bar{\omega}) = -\frac{H(j\bar{\omega})}{G(j\bar{\omega})}$$

Si osservi che questa relazione nel campo complesso equivale a due relazioni nel campo reale (su modulo e fase). E' quindi opportuno parametrizzare la funzione di trasferimento $C(s)$ con due parametri, ricavabili dalla due condizioni. Ad esempio, si può porre:

$$C(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^n}, \quad T > 0,$$

con n intero scelto in modo tale che la fase della risposta in frequenza possa assumere il valore imposto dalla condizione alla pulsazione $\bar{\omega}$.

- **Disturbo con trasformata di Fourier limitata alla pulsazione $\bar{\omega}$** . Per annullarne asintoticamente l'effetto, almeno approssimativamente, è sufficiente approssimare la risposta in frequenza fino alla pulsazione $\bar{\omega}$:

$$C(j\omega) = -\frac{H(j\omega)}{G(j\omega)}, \quad \omega < \bar{\omega}.$$

Di norma uno schema di compensazione viene associato ad uno schema di **retroazione** per rendere la reiezione del disturbo più robusta rispetto ad incertezze di modello e per soddisfare le altre specifiche. Si perviene allora allo schema di controllo di figura:

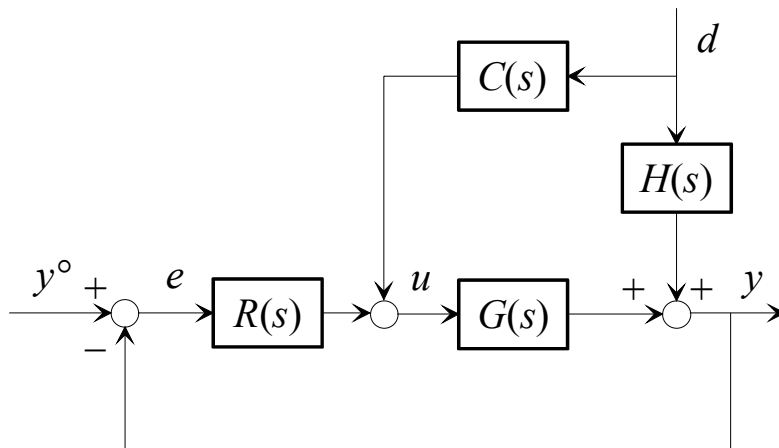


Fig. 3 : Controllo in retroazione con compensazione del disturbo

La funzione di trasferimento da d a y è ora:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s) + C(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)},$$

e si annulla ancora per:

$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)}.$$

Pertanto, assunto naturalmente che il regolatore $R(s)$ stabilizzi l'anello di controllo, il progetto del compensatore C si può condurre esattamente come in anello aperto. In altre parole, il progetto del regolatore in retroazione e del compensatore in anello aperto sono disaccoppiati (indipendenti l'uno dall'altro).

Compensazione e prefiltraggio del riferimento

Come la misura del disturbo, anche il segnale di riferimento della variabile controllata può essere elaborato con un sistema dinamico per favorire un'azione di controllo più pronta.

Si consideri il seguente schema di **compensazione del segnale di riferimento**:

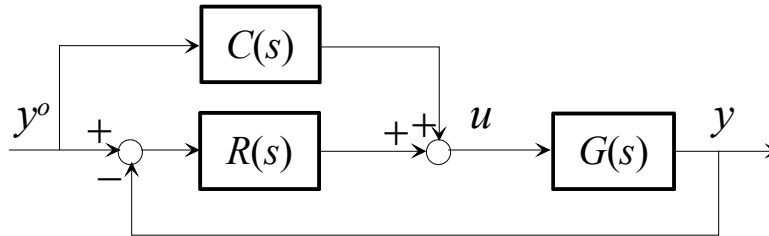


Fig. 4 : Compensazione del riferimento

In virtù della presenza del compensatore in anello aperto di funzione di trasferimento $C(s)$, la funzione di trasferimento dal riferimento alla variabile controllata diventa:

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = \frac{R(s)G(s) + C(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Ponendo quindi:

$$C(s) = \frac{1}{G(s)},$$

si otterrebbe il risultato ideale $Y(s)/Y^o(s) \equiv 1$. Naturalmente si tratta di una scelta non realizzabile a causa di molteplici ragioni (causalità del compensatore, eventuale presenza di zeri nel semipiano destro o di ritardi di tempo in G). Tuttavia rimane un'utile indicazione di progetto, nel senso che si cercherà di rendere la risposta in frequenza di C simile a quella di $1/G$ nella banda di interesse.

Alternativamente, si può **prefiltrare il segnale di riferimento**, come nello schema seguente:

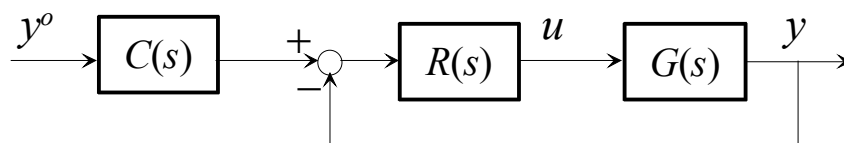


Fig. 5 : Prefiltraggio del riferimento

In questo modo la funzione di trasferimento dal riferimento alla variabile controllata diventa:

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = C(s)F(s),$$

con:

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}.$$

Il prefiltro di funzione di trasferimento $C(s)$ può quindi essere scelto in modo da modificare la funzione di trasferimento $Y(s)/Y^o(s)$, senza modificare la funzione di trasferimento d'anello, e quindi senza modificare le proprietà dell'anello (margine di fase, pulsazione critica, reiezione dei disturbi). Se per esempio scegliamo:

$$C(s) = \mu_C = \frac{1}{F(0)},$$

otterremo guadagno unitario della funzione di trasferimento $Y(s)/Y^o(s)$, anche in assenza di azione integrale nell'anello. Si osservi tuttavia che mentre la precisione statica ottenuta introducendo un integratore nel regolatore è robusta, ossia garantita anche in presenza di incertezza sul guadagno del sistema, questo non è più vero se la precisione statica viene forzata con il prefiltro.

Si supponga invece che, per effetto di dinamiche non modellate in alta frequenza o di disturbi sulla linea di retroazione sia consigliabile limitare la pulsazione critica dell'anello di controllo al valore $\bar{\omega}_c$. Se fosse prescritta una banda nell'inseguimento del segnale di riferimento di valore superiore $\bar{\omega}_b > \bar{\omega}_c$, si potrebbe progettare un prefiltro avente una funzione di trasferimento di tipo **passaalto**, di espressione:

$$C(s) = \frac{1 + s/\bar{\omega}_c}{1 + s/\bar{\omega}_b}.$$

Naturalmente, la migliore prontezza nell'inseguimento del segnale di riferimento va a discapito della moderazione del controllo, in quanto la variabile di controllo viene maggiormente sollecitata.

Gli schemi di **compensazione e prefiltraggio** possono poi essere combinati in uno schema più generale:

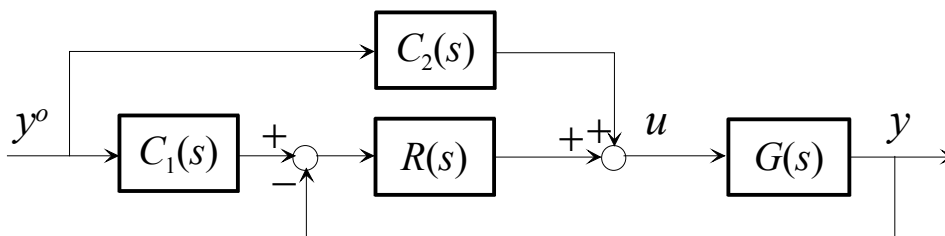


Fig. 6 : Compensazione e prefiltraggio del riferimento

Si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = \frac{[C_1(s)R(s) + C_2(s)]G(s)}{1 + R(s)G(s)}.$$

Ponendo:

$$C_1(s) = F^o(s), \quad C_2(s) = F^o(s)G(s)^{-1},$$

si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = F^o(s).$$

La funzione di trasferimento $F^o(s)$ deve quindi essere scelta come il modello di riferimento per il sistema in anello chiuso. Per la causalità del compensatore $C_2(s)$ deve avere grado relativo (differenza tra il numero dei poli ed il numero degli zeri) almeno pari a quello di $G(s)$. Inoltre, deve essere caratterizzata degli stessi eventuali zeri a parte reale positiva o ritardi di tempo presenti in $G(s)$ affinché essi non vengano cancellati dal compensatore.

Si osservi, in conclusione, che questa soluzione complica in modo considerevole la realizzazione del sistema di controllo.

Regolatori in cascata

In molte applicazioni avviene che il sistema sotto controllo sia strutturabile nella connessione in serie di due funzioni di trasferimento. Si assuma che all'uscita del primo sottosistema si sommi un disturbo d e che la variabile intermedia v tra i due sottosistemi sia misurabile.

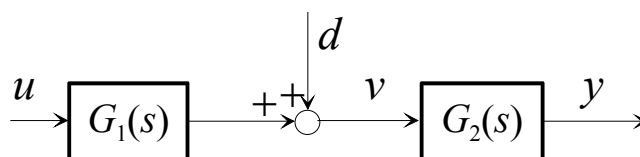


Fig. 7 : Sistemi in cascata

Spesso avviene che la dinamica di G_1 sia molto più favorevole, in termini di progetto del controllore, di quella di G_2 . Per esempio, G_1 potrebbe essere a fase minima e G_2 no oppure, pur essendo entrambe le funzioni di trasferimento a fase minima, G_1 potrebbe avere dinamica molto più veloce rispetto a G_2 e quindi potrebbe dar luogo ad una dinamica in anello chiuso veloce con sforzo del controllo molto più limitato di quello richiesto per accelerare G_2 .

Tutte queste circostanze si manifestano in particolare quando G_1 costituisce l'**attuatore** per il sistema sotto controllo. Se per esempio $G_1(s)$ fosse la funzione di trasferimento di un motore elettrico a corrente continua, u sarebbe la tensione del circuito d'armatura, i la corrente, mentre il disturbo d potrebbe essere associato alla forza controelettrica. Se viceversa l'attuatore fosse una valvola idraulica, u sarebbe l'area di apertura della valvola, v la portata di liquido, mentre il disturbo d sarebbe associabile alla dipendenza della portata dal livello di liquido a monte della valvola.

In tutte queste situazioni può risultare molto opportuno strutturare il sistema di controllo con due anelli di controllo innestati, secondo la metodologia del **controllo in cascata**.

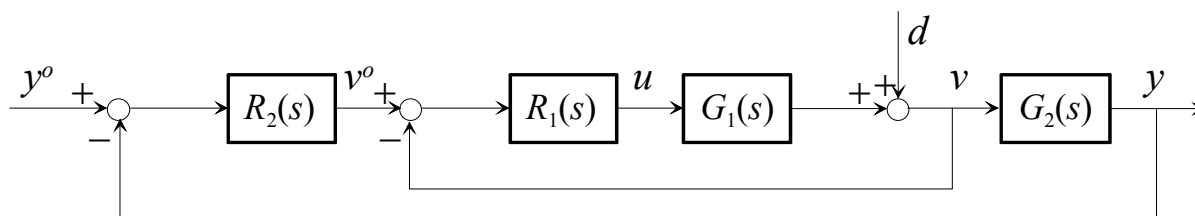


Fig. 8 : Schema di controllo in cascata

Il progetto del regolatore interno R_1 si basa esclusivamente sulla funzione di trasferimento $G_1(s)$ e mira a far sì che v inseguia il suo riferimento v^o su un'ampia banda e che sulla stessa banda il disturbo d sia quanto più possibile attenuato. Nel progetto del regolatore esterno R_2 potremo limitare la banda a valori decisamente inferiori rispetto alla banda dell'anello interno: questo consente di approssimare, su questa banda, la dinamica dell'anello interno come infinitamente veloce ($v \approx v^o$) e quindi basare il progetto di R_2 esclusivamente sulla funzione di trasferimento $G_2(s)$.

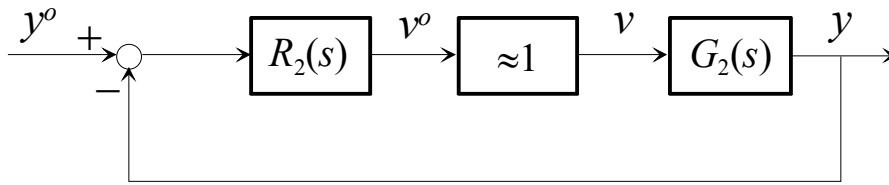


Fig. 9 : Schema per il progetto del regolatore esterno

I due regolatori R_1 e R_2 vengono quindi progettati secondo un **disaccoppiamento in frequenza**, che da un lato semplifica il progetto, suddividendolo in due sottoprogetti più semplici, dall'altra conferisce al sistema delle prestazioni di norma molto superiori rispetto a quelle ottenibili con un unico controllore chiuso su y .

Esempio

Consideriamo un motore a corrente continua:

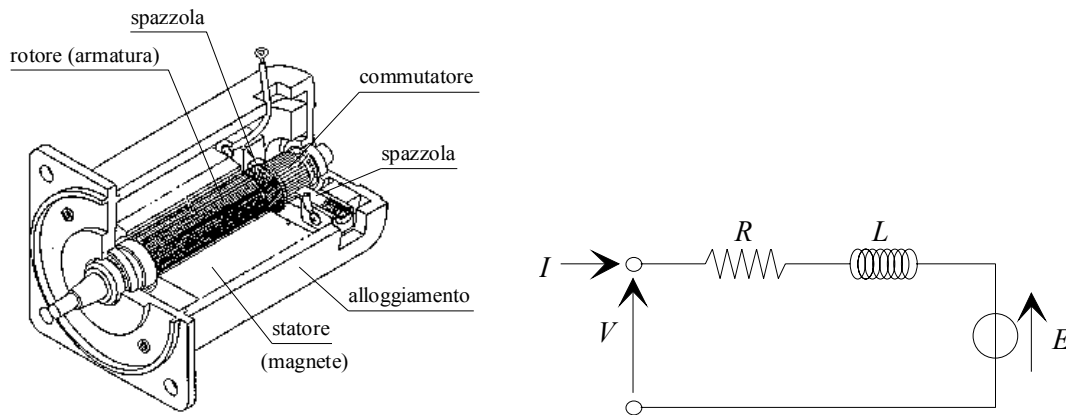


Fig. 10 : Motore a corrente continua e schema del circuito d'armatura

Il motore, caratterizzato meccanicamente da un momento d'inerzia J , eroga una coppia proporzionale alla corrente I nel circuito d'armatura. Su questo circuito, avente resistenza R ed induttanza L , agisce anche la forza controelettromotrice E , proporzionale alla velocità angolare ω del motore. Sono misurabili la posizione ϑ del motore e la corrente I del circuito d'armatura, e l'obiettivo ultimo è il controllo del moto del sistema, ossia della posizione ϑ . Il sistema è retto dalle seguenti equazioni:

$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + E(t)$$

$$E(t) = K\omega(t)$$

$$\tau(t) = KI(t)$$

$$\tau(t) = J\dot{\omega}(t)$$

$$\dot{\vartheta}(t) = \omega(t)$$

che trasformate secondo Laplace danno luogo al seguente sistema:

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R}(V(s) - E(s))$$

$$E(s) = K\omega(s)$$

$$\tau(s) = KI(s)$$

$$\omega(s) = \frac{1}{Js} \tau(s)$$

$$\vartheta(s) = \frac{1}{s} \omega(s)$$

Lo schema a blocchi del sistema è quindi il seguente:

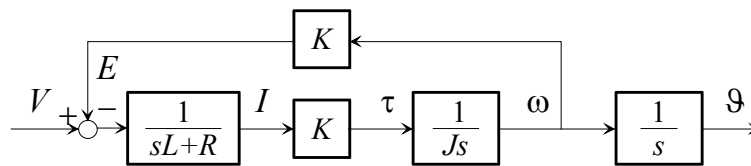


Fig. 11 : Schema a blocchi del motore a corrente continua

Uno schema di controllo in cascata per questo sistema è il seguente:

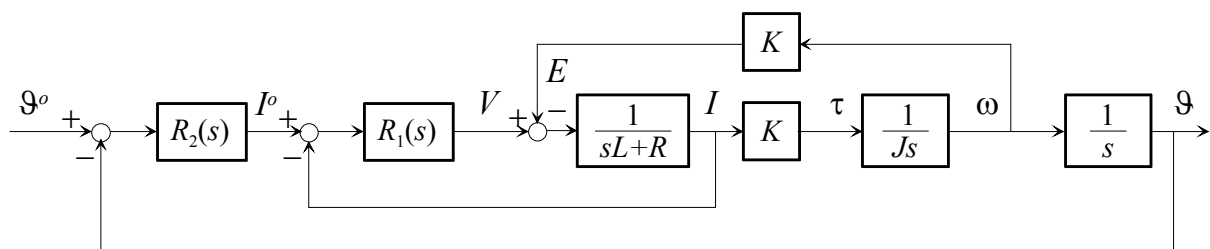


Fig. 12 : Controllo in cascata del motore a corrente continua

Nel progetto del regolatore più interno, R_1 , si assumerà la forza contro elettromotrice come un disturbo di bassa frequenza. Vista la dinamica veloce legata ai transistori elettrici (la costante di tempo elettrica L/R è di norma dell'ordine dei ms) si potrà progettare $R_1(s)$ per ottenere bande dell'ordine del kHz . Una volta chiuso l'anello di controllo della corrente, questo potrà ritenersi istantaneo ai fini del progetto del controllore di posizione esterno:

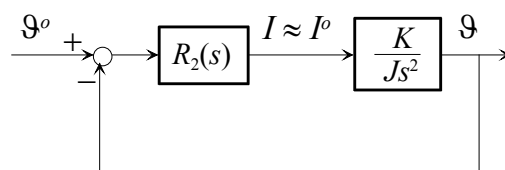


Fig. 13 : Schema per il progetto del controllore esterno (di posizione)

Il controllore dell'anello esterno R_2 sarà progettato in modo da ottenere una banda decisamente inferiore a quella dell'anello di corrente (qualche decina di Hz).

Predittore di Smith

E' noto che i sistemi a fase non minima (che contengono zeri nel semipiano destro e/o ritardi di tempo) comportano problemi nel controllo: l'impossibilità di cancellare tali termini nel regolatore lascia come unica possibilità, nel progetto classico del controllore, la limitazione della pulsazione critica dell'anello di controllo, in modo da ottenere accettabili margini di stabilità.

Esiste in realtà uno schema di controllo più avanzato, che prende il nome di schema a **predittore di Smith** che consente di affrontare il problema in modo diverso.

Si supponga che il sistema sotto controllo sia **asintoticamente stabile** e che la sua funzione di trasferimento sia fattorizzabile nel prodotto:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s), \quad G_2(0) = 1,$$

con $G_2(s)$ a fase non minima (in particolare può essere $G_2(s) = e^{-s\tau}$).

Lo schema a predittore di Smith è il seguente:

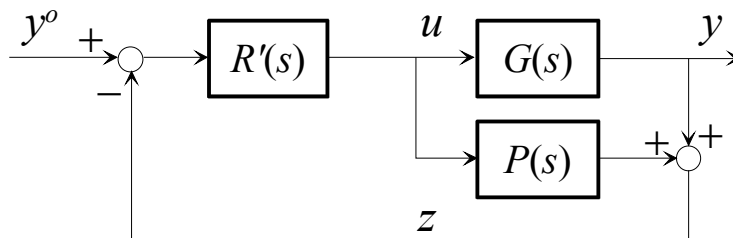


Fig. 14 : Schema di controllo con predittore di Smith

Il controllore prevede quindi, oltre alla funzione di trasferimento $R'(s)$, anche una funzione di trasferimento, $P(s)$, posta in parallelo a $G(s)$. A questa funzione di trasferimento, che costituisce il **predittore**, viene attribuita la funzione di trasferimento:

$$P(s) = [1 - G_2(s)]G_1(s) = G_1(s) - G(s).$$

Si osservi a questo punto che, tagliando l'anello in corrispondenza dell'ingresso o dell'uscita di $R'(s)$, si ottiene come funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = R'(s)[G(s) + P(s)] = R'(s)G_1(s).$$

Pertanto nella funzione di trasferimento d'anello **non compare più il termine a fase non minima** $G_2(s)$ o, in altre parole, il progetto di $R'(s)$ si può condurre sulla base della parte a fase minima $G_1(s)$. Non si hanno più quindi i limiti di banda associati alla fase non minima del sistema, anche se rimarranno limiti legati ad altri fattori (moderazione del controllo, eventuali dinamiche di alta frequenza non modellate, disturbi in linea di retroazione).

Il nome predittore risulta chiaro se si pone $G_2(s) = e^{-s\tau}$, ossia se la parte a fase non minima è costituita da un ritardo puro, come del resto originariamente previsto nella concezione del metodo. In questo caso, infatti, considerando la variabile z che viene retroazionata al regolatore $R'(s)$ (si veda la Fig. 14) si ha:

$$Z(s) = [G(s) + P(s)]U(s) = G_1(s)U(s) = G_2(s)^{-1}G_1(s)G_2(s)U(s) = e^{s\tau}Y(s).$$

Nel dominio del tempo questa relazione si traduce in:

$$z(t) = y(t + \tau).$$

La situazione è quindi analoga a quella che si avrebbe se nello schema di controllo venisse **retroazionata** non y , ma la sua **predizione** $z(t) = y(t + \tau)$: si osservi che questa circostanza è piuttosto ovvia se si considera che in un ritardo puro l'ingresso ad un dato istante (utilizzato dal predittore) non è altro che il valore che assumerà l'uscita esaurito il ritardo stesso.

Lo schema a predittore di Smith si lascia poi interpretare in termini di uno schema classico di retroazione, come segue:

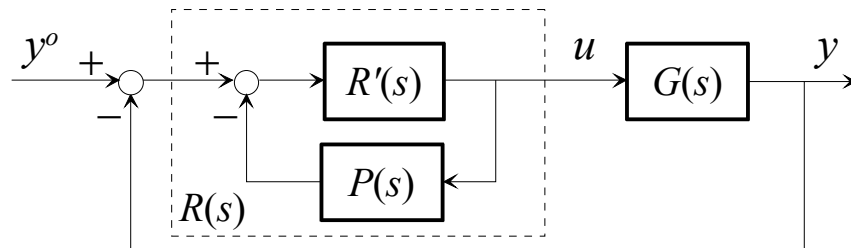


Fig. 15 : Interpretazione dello schema di controllo con predittore di Smith

Il sistema retroazionato tratteggiato è interpretabile come un regolatore classico in retroazione a $G(s)$, ed ha funzione di trasferimento:

$$R(s) = \frac{R'(s)}{1 + R'(s)P(s)} = \frac{R'(s)}{1 + R'(s)[1 - G_2(s)]G_1(s)}.$$

Esprese le funzioni di trasferimento in termini di rapporti di polinomi e tenuto conto dell'eventuale termine di ritardo puro:

$$R'(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)}, \quad G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} e^{-s\tau},$$

si ha:

$$R(s) = \frac{\frac{N_R(s)}{D_R(s)}}{1 + \frac{N_R(s)}{D_R(s)} \left[1 - \frac{N_2(s)}{D_2(s)} e^{-s\tau} \right] \frac{N_1(s)}{D_1(s)}} = \frac{N_R(s)D_1(s)D_2(s)}{D_R(s)D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_R(s)[D_2(s) - N_2(s)e^{-s\tau}]}$$

Da questa espressione scaturiscono alcune osservazioni:

- Il fatto che $R(s)$ abbia a numeratore il denominatore di G ($D_1(s)D_2(s)$), giustifica l'ipotesi di asintotica stabilità introdotta all'inizio della trattazione;
- Se il sistema presenta un ritardo di tempo ($\tau \neq 0$) il regolatore ha funzione di trasferimento trascendente;
- Poiché $G_2(0)=1$, e quindi $D_2(0)=N_2(0)$, risulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N_R(s)}{D_R(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} R'(s).$$

Pertanto $R(s)$ ha lo stesso comportamento di $R'(s)$ in bassa frequenza, il che comporta che se il progetto statico impone azione integrale nel regolatore, questa deve essere presente nella funzione di trasferimento $R'(s)$.

Le prestazioni del predittore di Smith per sistemi con ritardo si deteriorano considerevolmente nel caso di **valutazione imprecisa del ritardo** stesso, il che ne limita in qualche misura l'utilità pratica. Inoltre la realizzazione del ritardo di tempo nella funzione di trasferimento $P(s)$ comporta problemi di implementazione.

Regolatori anti-windup

Il comportamento degli attuatori è stato finora sempre ipotizzato lineare. In realtà tutti gli attuatori presentano una saturazione, che può essere rappresentata nel sistema di controllo come nel seguente schema:

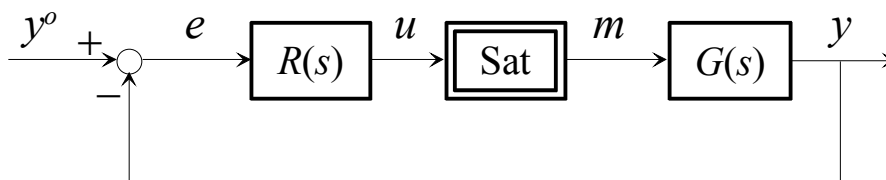


Fig. 16 : Sistema di controllo con saturazione

Il blocco non lineare “Sat” rappresenta una caratteristica di saturazione, che per semplicità supporremo simmetrica, come in figura:

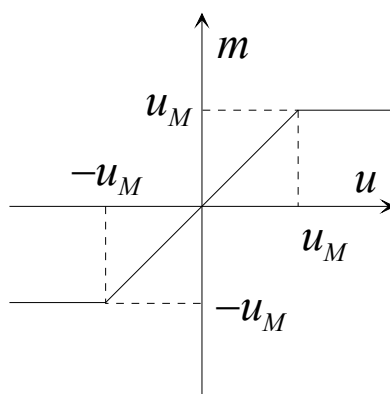


Fig. 17 : Caratteristica di saturazione

Dal punto di vista matematico, la caratteristica di saturazione si esprime quindi nei seguenti termini:

$$m(t) = \begin{cases} -u_M, & u(t) < -u_M \\ u(t) & -u_M \leq u(t) \leq u_M \\ u_M & u(t) > u_M \end{cases}$$

Se il regolatore presenta azione integrale, la combinazione di questa con la saturazione dell'attuatore può dar luogo ad un effetto indesiderato, noto come **carica integrale** (o **integral windup**), che può pregiudicare le prestazioni del sistema di controllo. Per comprendere il fenomeno, si faccia riferimento al caso in cui il regolatore sia puramente integrale ($R(s) = k_I/s$): le considerazioni che si svolgeranno in questo caso sono peraltro estendibili al caso generale. Con riferimento alla Fig.16, se nel corso dell'operato del sistema di controllo accade che l'errore e resta a lungo dello stesso segno, ad esempio positivo, la variabile di stato dell'integratore, e quindi la variabile u , cresce indefinitamente e può senz'altro superare, anche di molto, il valore di saturazione u_M , facendo operare l'attuatore in regime di saturazione ($m \equiv u_M$). Quando, per effetto di questa azione di controllo perdurante al valore massimo, la variabile di controllo y avrà superato il valore del suo riferimento y^o ,

rendendo quindi l'errore e negativo, sarebbe auspicabile che la variabile m lasciasse rapidamente il valore massimo u_M ed assumesse valori inferiori. Affinché ciò avvenga, tuttavia, è necessario attendere che la variabile u rientri dai valori elevati raggiunti nella fase precedente, fino ad assumere valori inferiori al limite di saturazione u_M : questa fase di scarica, o **desaturazione**, dell'azione integrale, può essere di durata rilevante e dà luogo ad un comportamento anomalo del sistema di controllo.

Per ovviare a questo inconveniente, occorre realizzare il regolatore in modo differente, senza ovviamente alterarne la funzione di trasferimento. Si ponga dunque:

$$R(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)},$$

con N_R e D_R polinomi primi tra loro e $D_R(0)=0$ per effetto della presenza dell'azione integrale. Si considerino quindi le seguenti elaborazioni formali sulla funzione di trasferimento:

$$R(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)} = \frac{N_R(s)}{\varphi(s)} \frac{\varphi(s)}{D_R(s)} = \frac{N_R(s)}{\varphi(s)} \frac{1}{\frac{D_R(s)}{\varphi(s)}} = \frac{N_R(s)}{\varphi(s)} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{D_R(s)}{\varphi(s)}\right)} = K(s) \frac{1}{1 - H(s)},$$

dove $\varphi(s)$ è un polinomio, le cui proprietà saranno analizzate in seguito, mentre $K(s)$ e $H(s)$ sono le seguenti funzioni di trasferimento:

$$K(s) = \frac{N_R(s)}{\varphi(s)}, \quad H(s) = \frac{\varphi(s) - D_R(s)}{\varphi(s)}.$$

Si osservi che $H(s)$ ha per costruzione guadagno unitario. La funzione di trasferimento $R(s)$ viene quindi ottenuta come serie di $K(s)$ e di un sistema retroazionato positivamente con linea d'andata unitaria e linea di retroazione $H(s)$.

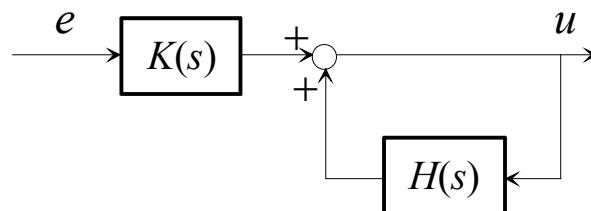


Fig. 18 : Realizzazione alternativa di $R(s)$

Da quanto precede, risulta chiaro che il polinomio $\varphi(s)$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

- deve avere tutte le radici a parte reale negativa (per l'asintotica stabilità di $K(s)$)
- deve avere grado non inferiore a quello di $N_R(s)$ (per la causalità di $K(s)$)
- deve rendere $H(s)$ strettamente proprio, per evitare un anello algebrico

Si osservi che nel caso, frequente, in cui $R(s)$ sia un sistema proprio, non strettamente, a fase minima, scritti i polinomi N_R e D_R nella forma:

$$\begin{aligned} N_R(s) &= \rho(s^n + b_n s^{n-1} + \dots + b_2 s + b_1) \\ D_R(s) &= s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s \end{aligned}$$

tutte le condizioni sopra riportate sono soddisfatte ponendo $\varphi(s)=N_R(s)/\rho$, dove ρ è la costante di trasferimento di $R(s)$, da cui:

$$K(s) = \rho, \quad H(s) = \frac{(b_n - a_n)s^{n-1} + \dots + (b_2 - a_2)s + b_1}{s^n + b_n s^{n-1} + \dots + b_2 s + b_1}.$$

La realizzazione anti carica integrale (o **anti windup**) del regolatore si ottiene con lo schema seguente, in cui si suppone misurabile la variabile manipolabile m , a valle della saturazione dell'attuatore:

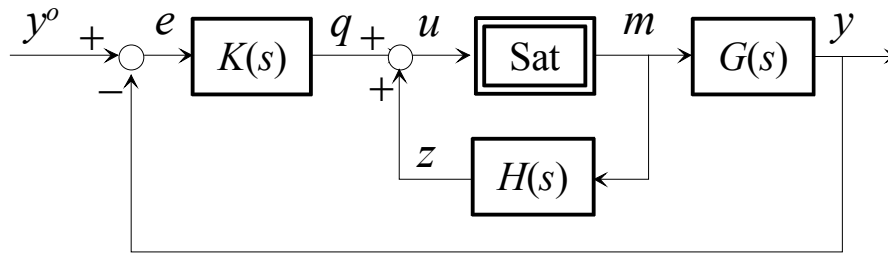


Fig. 19 : Realizzazione anti windup del regolatore

Se invece la variabile m non è accessibile, si dovrebbe riprodurre all'interno del regolatore, una caratteristica, indicata con \hat{Sat} in Fig. 20, uguale a quella fisica dell'attuatore, e porla sulla linea d'andata dello schema a blocchi che realizza il regolatore, secondo lo schema seguente:

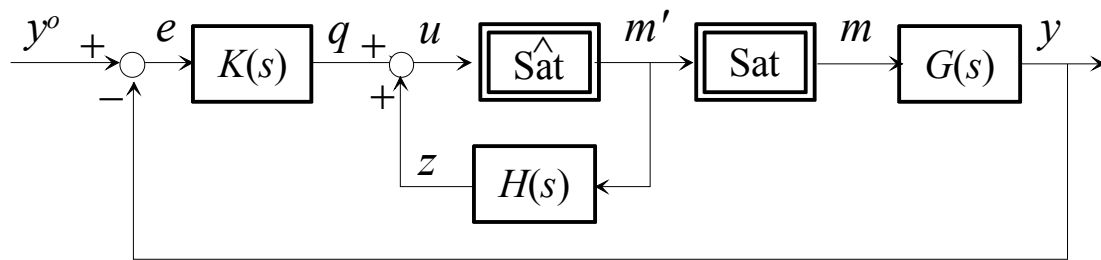


Fig. 20 : Realizzazione anti windup del regolatore senza misura di m

Facendo riferimento alla Fig. 19 (ma le stesse considerazioni valgono per lo schema di Fig. 20), si supponga nuovamente che l'errore e rimanga dello stesso segno, ad esempio positivo, a lungo. Se il regolatore ha guadagno positivo, anche q assumerà valori positivi. Si supponga quindi l'attuatore in saturazione con $m=u_M$. Poiché $H(0)=1$, anche la variabile z si assesterà sul valore u_M . Quando, per effetto della prolungata azione dell'attuatore, l'errore cambia segno, anche la variabile q cambierà segno, istantaneamente se $K(s)$ è algebrica (come avviene con la scelta sopra proposta per $\varphi(s)$) o comunque con la dinamica legata alle radici di $\varphi(s)$, arbitrariamente assegnabili. Il fatto che q assuma valori negativi, unito al fatto sopra ricordato che $z=u_M$, implica poi che u assuma immediatamente valori inferiori a u_M , facendo subito uscire l'attuatore dalla saturazione, ripristinandone quindi il comportamento lineare.

Esempio

Si consideri un regolatore PI:

$$R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) = K_P \frac{s + 1/T_I}{s} = \frac{N_R(s)}{D_R(s)},$$

con:

$$N_R(s) = K_P(s + 1/T_I), \quad D_R(s) = s.$$

Posto:

$$\varphi(s) = \frac{N_R(s)}{\rho} = \frac{N_R(s)}{K_P} = s + \frac{1}{T_I},$$

si ha:

$$K(s) = \rho = K_P, \quad H(s) = \frac{s + 1/T_I - s}{s + 1/T_I} = \frac{1}{1 + sT_I},$$

da cui segue lo schema anti windup:

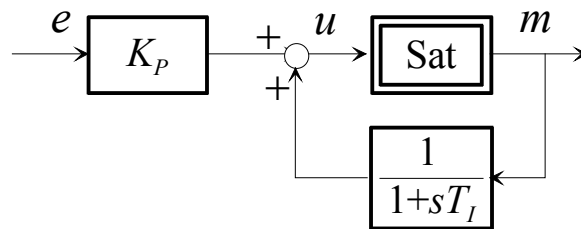


Fig. 21 : Realizzazione anti windup del regolatore PI

Controllo di sistemi multivariabili

Le tecniche di controllo nel dominio della frequenza finora studiate fanno unicamente riferimento a sistemi SISO. Il controllo di sistemi con più ingressi e/o più uscite è argomento complesso e richiede nozioni di teoria del controllo avanzate. Si osservi, d'altra parte, che le tecniche di controllo nel dominio del tempo per l'assegnamento degli autovalori si prestano naturalmente all'applicazione su sistemi multivariabili.

Rimanendo nel dominio della frequenza, una strada percorribile con sforzo ragionevolmente contenuto consiste nel ricondurre il problema di controllo a **tanti problemi di controllo monovariabili**, risolvibili secondo le tecniche note.

Nel seguito si daranno cenni a due procedure utilizzabili per ricondurre il problema MIMO a una serie di problemi SISO: il progetto di **controllori di disaccoppiamento** ed il progetto di **controllori decentralizzati**.

Controllori di disaccoppiamento

Si consideri un sistema con m ingressi e m uscite ($m > 1$), con funzione di trasferimento matriciale $\mathbf{G}(s)$.

Siano y_i le uscite del sistema e y_i^o i corrispondenti segnali di riferimento. Si dice che un controllore realizza il **disaccoppiamento** (o la **non interazione**) se è in grado di fare in modo che risulti:

y_i indipendente da $y_k^o \forall k \neq i$.

Il controllore deve quindi essere in grado di rendere il sistema in anello chiuso completamente disaccoppiato. Si consideri a questo scopo il seguente sistema di controllo:

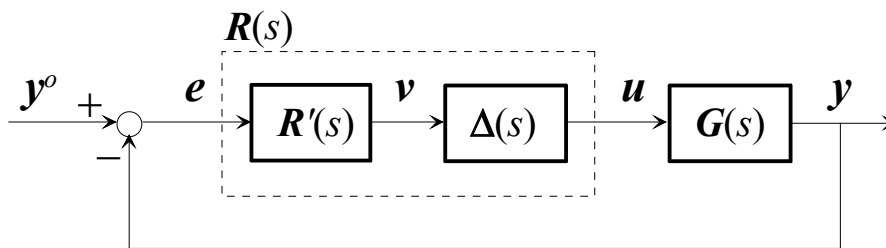


Fig. 22 : Sistema di controllo con disaccoppiatore

Il controllore, di ingresso (vettoriale) e , uscita (vettoriale) u e di funzione di trasferimento $\mathbf{R}(s)$, è costituito dalla serie di due sistemi a m ingressi e m uscite. E' infatti descritto dalle relazioni:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{\Delta}(s)\mathbf{V}(s), \quad \mathbf{V}(s) = \mathbf{R}'(s)\mathbf{E}(s) .$$

Il sistema di funzione di trasferimento $\mathbf{\Delta}(s)$, che prende il nome di **disaccoppiatore**, deve essere progettato in modo tale che il sistema di ingresso v ed uscita y abbia funzione di trasferimento $\mathbf{G}(s)\mathbf{\Delta}(s)$ **diagonale**.

A questo punto, progettando la restante parte del controllore con funzione di trasferimento $\mathbf{R}'(s)$ diagonale, si rende la funzione di trasferimento d'anello $\mathbf{G}(s)\mathbf{\Delta}(s)\mathbf{R}'(s)$ diagonale, dal che consegue che anche la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso (da y^o a y) è diagonale, e quindi che viene realizzata la condizione di disaccoppiamento prima enunciata. Esistono condizioni sufficienti per l'esistenza del disaccoppiatore $\mathbf{\Delta}(s)$.

Vediamo come si conduce il progetto nel caso semplice di sistema a due ingressi e due uscite ($m=2$). Sia dunque:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

la funzione di trasferimento del sistema sotto controllo e:

$$\mathbf{\Delta}(s) = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(s) & \Delta_{12}(s) \\ \Delta_{21}(s) & \Delta_{22}(s) \end{bmatrix}$$

quella del disaccoppiatore. Imponiamo che il prodotto $\mathbf{G}(s)\mathbf{\Delta}(s)$ sia diagonale, ovvero che i termini fuori diagonale siano nulli:

$$\begin{cases} G_{11}(s)\Delta_{12}(s) + G_{12}(s)\Delta_{22}(s) = 0 \\ G_{21}(s)\Delta_{11}(s) + G_{22}(s)\Delta_{21}(s) = 0 \end{cases}$$

Il problema è indeterminato (vi sono due equazioni per le quattro incognite $\Delta_{ij}(s)$). Una soluzione semplice si ottiene ponendo:

$$\begin{cases} \Delta_{11}(s) = \Delta_{22}(s) = 1 \\ \Delta_{12}(s) = -\frac{G_{12}(s)}{G_{11}(s)} \\ \Delta_{21}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} \end{cases}$$

Utilizzando questo disaccoppiatore, il sistema disaccoppiato sotto controllo ha funzione di trasferimento diagonale, espressa da:

$$\mathbf{G}(s)\mathbf{\Delta}(s) = \begin{bmatrix} G_{d1}(s) & 0 \\ 0 & G_{d2}(s) \end{bmatrix},$$

con:

$$\begin{cases} G_{d1}(s) = G_{11}(s)\Delta_{11}(s) + G_{12}(s)\Delta_{21}(s) = G_{11}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = \frac{\det(\mathbf{G}(s))}{G_{22}(s)} \\ G_{d2}(s) = G_{21}(s)\Delta_{12}(s) + G_{22}(s)\Delta_{22}(s) = G_{22}(s) - \frac{G_{21}(s)G_{12}(s)}{G_{11}(s)} = \frac{\det(\mathbf{G}(s))}{G_{11}(s)} \end{cases}$$

Il problema di controllo multivariabile è stato quindi ricondotto a **due problemi di controllo monovariabili**, in ciascuno dei quali occorre progettare un regolatore $R'_i(s)$ ($i=1,2$) sulla base della funzione di trasferimento $G_{di}(s)$.

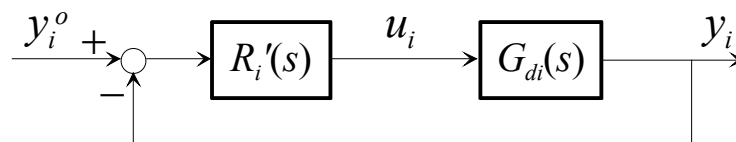


Fig. 23 : Problema di controllo monovariabile

Si osservi che le funzioni di trasferimento $G_{di}(s)$ possono risultare di ordine elevato, rendendo problematico il progetto del controllore. Inoltre le funzioni di trasferimento $\Delta_{12}(s)$ e $\Delta_{21}(s)$ possono risultare non proprie: in questo caso si può limitare l'azione di disaccoppiamento ad una certa banda di frequenza, prevedendo funzioni di trasferimento che approssimino la risposta in frequenza ideale nella banda d'interesse.

Controllo decentralizzato

Se nella struttura di controllo vista precedentemente si pone $\Delta(s)=I$, ovvero si rinuncia all'azione del disaccoppiatore, si ottiene un controllore di funzione di trasferimento $\mathbf{R}(s)=\mathbf{R}'(s)$ diagonale, che prende il nome di controllore (totalmente) **decentralizzato**. Il comportamento dinamico del controllore è quindi retto dalle equazioni:

$$U_i(s) = R'_i(s)E_i(s), \quad i = 1, \dots, m.$$

Per $m=2$, la struttura del sistema di controllo è la seguente:

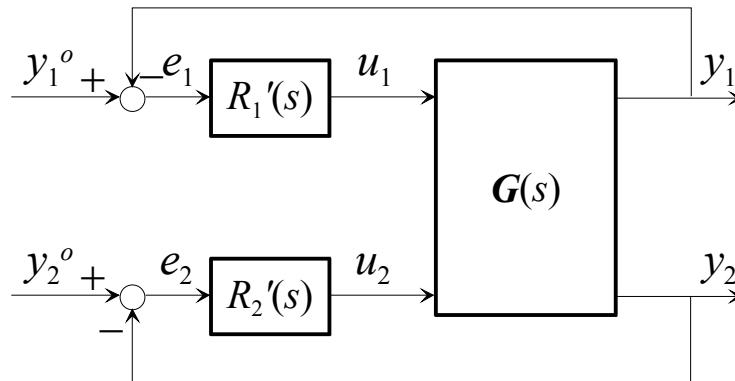


Fig. 24 : Sistema di controllo decentralizzato

A questo punto, si potrebbe condurre il progetto di $R'_i(s)$ sulla base dell' i -simo elemento diagonale $G_{ii}(s)$ della matrice $\mathbf{G}(s)$. Tuttavia questa strada non offre particolari garanzie in termini del comportamento del sistema multivariabile in anello chiuso, in quanto le interazioni possono alterarne sensibilmente il comportamento, anche in termini di stabilità.

Un modo migliore di procedere consiste nel progettare le funzioni di trasferimento $R'_i(s)$ **sequenzialmente**, tenendo conto, in ogni progetto, dell'effetto dei regolatori precedentemente inseriti. L'ordine da seguire in questa sequenza si basa di norma sul tempo di risposta ammissibile in anello chiuso: si progettano prima i regolatori destinati alla chiusura degli anelli più veloci.

Nel caso $m=2$, si procederà quindi progettando $R'_1(s)$ sulla base di $G_{11}(s)$ e progettando $R'_2(s)$ sulla base della funzione di trasferimento, che denominiamo $G'_{22}(s)$, che si manifesta da u_2 a y_2 quando è inserito il primo regolatore. Per calcolare questa funzione di trasferimento, si faccia riferimento allo schema a blocchi di Fig. 25, in cui non si è tenuto conto del riferimento y^o_1 in quanto ininfluenza per la discussione. Lo schema corrisponde alle equazioni:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R'_1(s)Y_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}.$$

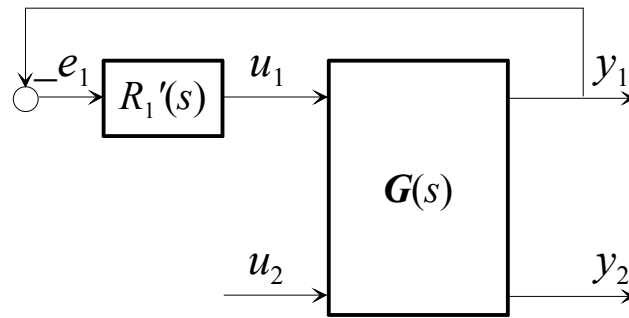


Fig. 25 : Sistema sotto controllo per il secondo regolatore

Eliminando $Y_1(s)$ da queste equazioni, si ottiene il legame tra $U_2(s)$ e $Y_2(s)$, espresso dalla funzione di trasferimento:

$$G'_{22}(s) = G_{22}(s) - \frac{G_{12}(s)G_{21}(s)R'_1(s)}{1 + R'_1(s)G_{11}(s)}.$$

Anche questo metodo, tuttavia, è di natura euristica e non basato su solidi fondamenti teorici.

Si osservi che nel progetto di un controllore decentralizzato si pone il problema di quale sia il migliore **accoppiamento** tra gli ingressi u_i del sistema e le uscite y_j del sistema. Stabilito un certo accoppiamento, e quindi determinata la funzione di trasferimento $\mathbf{G}(s)$, si passa ad un altro accoppiamento permutando opportunamente righe e colonne di $\mathbf{G}(s)$. Ci si chiede come scegliere tra quelli possibili, l'accoppiamento migliore. Un metodo, anch'esso euristico, che guida nella scelta si basa sulla costruzione della cosiddetta **matrice dei guadagni relativi**, avente espressione:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{G}(0) \otimes \left(\mathbf{G}(0)^{-1} \right)^T,$$

dove il simbolo \otimes indica il prodotto, elemento per elemento, delle due matrici. Si può dimostrare che l'accoppiamento migliore è quello che rende la matrice $\mathbf{\Lambda}$ più diagonale, con elementi sulla diagonale prossimi a 1.

Per $m=2$, posto:

$$\mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix},$$

si ottiene facilmente:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix},$$

con:

$$\lambda = \frac{g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}.$$

Si osservi che se $\lambda=1$, $\mathbf{\Lambda}$ è la matrice identità, e risulta $g_{12}=0$ e/o $g_{21}=0$, ovvero il sistema è già diagonale o al più triangolare: l'accoppiamento è quindi corretto.

Se $\lambda=0$, Λ ha elementi nulli sulla diagonale ed unitari fuori dalla diagonale, e risulta $g_{11}=0$ e/o $g_{22}=0$: l'accoppiamento è errato. Accoppiando u_1 con y_2 e u_2 con y_1 si ha l'accoppiamento corretto, che ha struttura al più triangolare.

Argomenti simili si possono usare nei casi intermedi.