# *Lezione 3*

# Luogo delle radici

# Introduzione

Si consideri il sistema retroazionato di Fig. 1, la cui funzione di trasferimento d'anello è $L(s)$.

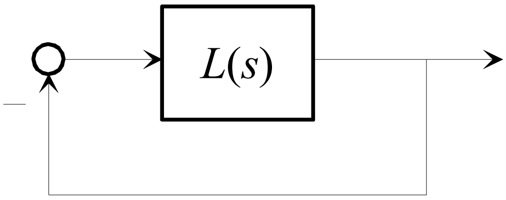


*Fig. 1 : Sistema retroazionato*

Scritta $L(s)$ nella forma:

$$L(s) = \rho \frac{N(s)}{D(s)} = \rho \frac{\Pi_i (s + z_i)}{\Pi_k (s + p_k)} ,$$

l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso assume la seguente espressione:

$$\chi(s) = D(s) + \rho N(s) = 0 \ .$$

Si definisce **luogo delle radici** il luogo descritto nel piano complesso dalle radici di $\chi(s)$ (poli del sistema in anello chiuso) al variare della costante di trasferimento $\rho$ da $-\infty$ a $+\infty$. Per la precisione, si parla di luogo delle radici **diretto** quando $\rho$ varia da 0 a $+\infty$, di luogo delle radici **inverso** quando $\rho$ varia da 0 a $-\infty$.

***Esempio***

Consideriamo il sistema con funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)}$$

Il polinomio caratteristico in anello chiuso è quindi:

$$\chi(s) = (s+1)(s+2) + \rho = s^2 + 3s + 2 + \rho = 0$$

ed ha le radici:

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{1 - 4\rho}}{2}$$

Al variare di $\rho$ si ha:

$\rho = 0 \quad \Rightarrow$ Due poli in -1 e -2

$0 < \rho < 1/4 \quad \Rightarrow$ Due poli reali negativi

$\rho = 1/4 \quad \Rightarrow$ Due poli reali coincidenti in -3/2

$\rho > 1/4 \quad \Rightarrow$ Due poli complessi con parte reale -3/2

$\rho < 0 \quad \Rightarrow$ Due poli reali

Sulla base di questa discussione, si possono tracciare i luoghi:

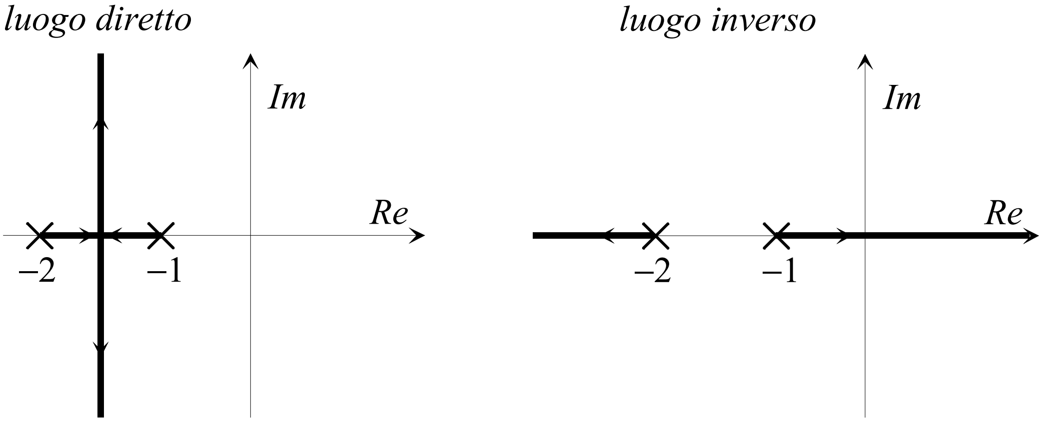


*Fig. 2 : Luoghi delle radici per l'esempio introduttivo*

È evidente che in questo caso il tracciamento dei luoghi è stato possibile grazie al fatto che le radici si possono calcolare esplicitamente.

Più in generale, l’equazione caratteristica può essere riscritta nella forma:

$$\frac{D(s)}{N(s)} = -\rho$$

ed equivale alle due equazioni nel campo reale:

$$\frac{|D(s)|}{|N(s)|} = |\rho|$$

$$\angle D(s) - \angle N(s) = \angle(-\rho)$$

La seconda equazione determina compiutamente la **forma del luogo**, mentre la prima consente di attribuire ad ogni punto del luogo il corrispondente valore di ρ, ossia, come si usa dire, di “**punteggiare**” il luogo rispetto a ρ.

## Regole di tracciamento

Il tracciamento del luogo è fortemente agevolato dall'uso di alcune **semplici regole**. Ci limiteremo di seguito ad enunciarne le principali (immediatamente verificabili sull'esempio introduttivo trattato sopra).

**Regola 1:** Detto $m$ il grado del polinomio $N(s)$ (numero di zeri di $L(s)$) e $n$ il grado del polinomio $D(s)$ (numero di poli di $L(s)$), il luogo diretto e il luogo inverso sono costituiti da $n$ rami.

**Regola 2:** Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale.

**Regola 3:** Ogni ramo parte (per $\rho=0$) da un polo di $L$.

**Regola 4:** I rami terminano (per $|\rho|\to\infty$) in uno zero di $L$, oppure tendono all'infinito, secondo un asintoto. Tanto il luogo diretto quanto il luogo inverso presentano un numero di asintoti pari alla differenza $n-m$ (grado relativo di $L$).

**Regola 5:** Tutti gli asintoti si incontrano in un punto dell'asse reale, individuato dall'ascissa:

$$x_a = \frac{\sum_i z_i - \sum_k p_k}{n-m}$$

**Regola 6:** Gli $n-m$ asintoti formano con il semiasse reale positivo i seguenti angoli:

$$\vartheta_{ah} = \begin{cases} \dfrac{180° + h360°}{n-m}, & \text{per il luogo diretto} \\ \dfrac{h360°}{n-m}, & \text{per il luogo inverso} \end{cases}$$

dove $h$ assume i valori 0,1, 2, ... , $n-m-1$.

**Regola 7:** Tutti i punti dell'asse reale appartengono al luogo. Precisamente, appartengono al luogo diretto i punti dell'asse reale che hanno alla loro destra un numero dispari di poli e zeri di $L$, mentre appartengono al luogo inverso i punti dell'asse reale che hanno alla loro destra un numero pari (o nullo) di poli e zeri di $L$.

**Regola 8:** Se $n-m \geq 2$, la somma delle parti reali dei poli del sistema in anello chiuso si conserva al variare di $\rho$ (regola del baricentro).

**Regola 9:** Il valore di $|\rho|$ corrispondente ad un punto $\bar{s}$ del luogo si ottiene eseguendo il rapporto tra il prodotto delle distanze di $\bar{s}$ dai poli di $L$ ed il prodotto delle distanze di $\bar{s}$ dagli zeri di $L$.

$$|\rho| = \frac{\Pi_k |\bar{s} + p_k|}{\Pi_i |\bar{s} + z_i|}$$

**Regola 10:** I punti di diramazione dall'asse reale e di ricongiunzione con esso (cioè i punti in cui il luogo abbandona l'asse reale per entrare nel piano complesso o vi ritorna) sono individuati da valori dell'ascissa $x_d$ che risolvono la seguente equazione implicita (oltre all'equazione del luogo):

$$\Sigma_k \frac{1}{x_d + p_k} - \Sigma_i \frac{1}{x_d + z_i} = 0$$

E' utile osservare che l'innesto o il disinnesto di *due* rami in un punto (diramazione) dell'asse reale avviene, di norma, con tangente verticale.

***Esempio 1***

Consideriamo il sistema di funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Si ha $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $m = 0$, $n = 3$. Poiché $n-m = 3$, sia il luogo diretto sia quello inverso presentano 3 asintoti, che si incontrano sull'asse reale nel punto:

$$x_a = \frac{-p_1 - p_2 - p_3}{n-m} = \frac{-1-2-3}{3} = -2$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{ah} = \begin{cases} \dfrac{180° + h360°}{3} = \begin{cases} 60° \\ 180°, \\ 300° \end{cases} & \text{per il luogo diretto} \\ \dfrac{h360°}{3} = \begin{cases} 0° \\ 120°, \\ 240° \end{cases} & \text{per il luogo inverso} \end{cases}$$

Tenendo conto della regola sull'appartenenza dei punti dell'asse reale, si possono facilmente tracciare i luoghi:

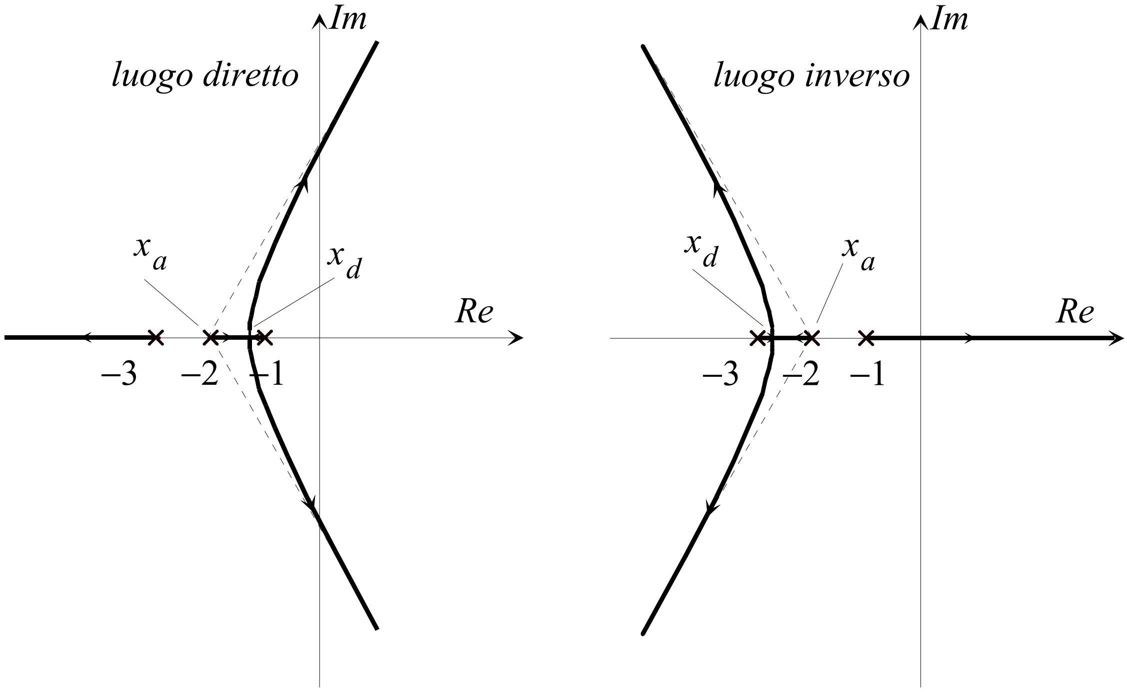


*Fig. 3 : Luoghi delle radici per l'esempio 1*

I punti di diramazione dell'asse reale si possono calcolare con la formula:

$$\frac{1}{x_d+1}+\frac{1}{x_d+2}+\frac{1}{x_d+3}=0 \quad \Rightarrow \quad 3x_d^2+12x_d+11=0 \quad \Rightarrow \quad x_d=\begin{cases}-1.42\ \text{(L.D.)}\\ -2.58\ \text{(L.I.)}\end{cases}$$

E' interessante determinare per quali valori della costante di trasferimento ρ il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile (cioè tutti i suoi poli si trovano nel semipiano sinistro aperto).

**Luogo diretto**

Occorre determinare il valore $\rho_M$ di ρ che porta due rami nel semipiano destro. Tuttavia i punti di intersezione con l'asse immaginario sono difficili da valutare. Si può però osservare che, essendo $n-m=3$ (>2), si conserva la somma delle parti reali dei poli in anello chiuso. Tale somma, valutata per ρ=0, risulta −6 (somma dei poli di $L$). Ne consegue che quando due dei poli hanno parte reale nulla, il terzo avrà parte reale −6. Eseguendo la punteggiatura in $s$ = −6:

$$\rho_M=|-6+p_1||-6+p_2||-6+p_3|=5\times 4\times 3=60$$

**Luogo inverso**

Occorre determinare il valore $\rho_m$ di ρ per cui uno dei rami entra nel semipiano destro. Eseguendo la punteggiatura in $s$=0, e tenendo conto che nel luogo inverso ρ assume valori negativi:

$$\rho_m=-|p_1||p_2||p_3|=-1\times 2\times 3=-6$$

Possiamo pertanto concludere:

$$\boxed{\text{Sistema asintoticamente stabile} \quad \Leftrightarrow \quad -6<\rho<60}$$

***Esempio 2***

Consideriamo il sistema di funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = \rho \frac{(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Si ha $z_1 = 4$, $z_2 = 5$ , $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $m = 2$, $n = 3$. Poiché $n-m = 1$, sia il luogo diretto sia quello inverso presentano un asintoto, che si sovrappone all'asse reale:

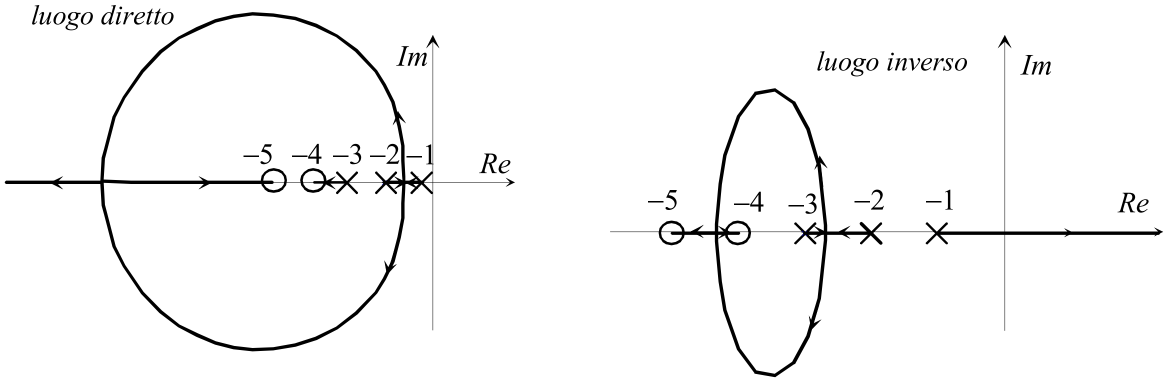


*Fig. 4 : Luoghi delle radici per l'esempio 2*

Analizziamo la stabilità del sistema in anello chiuso:

**Luogo diretto**

Tutto il luogo è compreso nel semipiano sinistro: il sistema è asintoticamente stabile per tutti i valori di $\rho>0$.

**Luogo inverso**

Occorre determinare il valore di $\rho$ per cui uno dei rami entra nel semipiano destro. Eseguendo la punteggiatura in $s=0$:

$$\rho_m = -\frac{|p_1||p_2||p_3|}{|z_1||z_2|} = -\frac{1\times 2\times 3}{4\times 5} = -\frac{6}{20} = -0.3$$

Possiamo pertanto concludere:

$$\boxed{\text{Sistema asintoticamente stabile} \quad \Leftrightarrow \quad \rho > -0.3}$$

# Progetto del regolatore

Oltre che per l'analisi della stabilità dei sistemi in anello chiuso, il metodo del luogo delle radici costituisce un valido ausilio anche per la sintesi del regolatore.

E' infatti possibile affrontare in maniera particolarmente intuitiva il problema della **stabilizzazione** in anello chiuso di sistemi instabili in anello aperto, nonché condurre a termine progetti che presentano specifiche di un certo dettaglio sulla forma dei transitori in anello chiuso.

Le caratteristiche di tali transitori sono infatti legate strettamente alla posizione nel piano complesso dei poli del sistema in anello chiuso, sui quali si ha completo controllo con il metodo del luogo delle radici.

***Esempio***

Si consideri il sistema di controllo in anello chiuso:

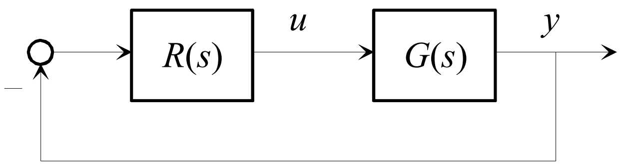


*Fig. 5 : Sistema di controllo in anello chiuso*

Sia:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

Si vuole progettare $R(s)$ in modo tale che il sistema in anello chiuso abbia due poli in $-2$.

E' opportuno esplorare la possibilità che la stabilizzazione sia ottenuta con un regolatore proporzionale. Si pone quindi:

$$R(s) = \rho_R \quad \Rightarrow \quad L(s) = R(s)G(s) = \frac{\rho_R}{(s+1)(s-2)}$$

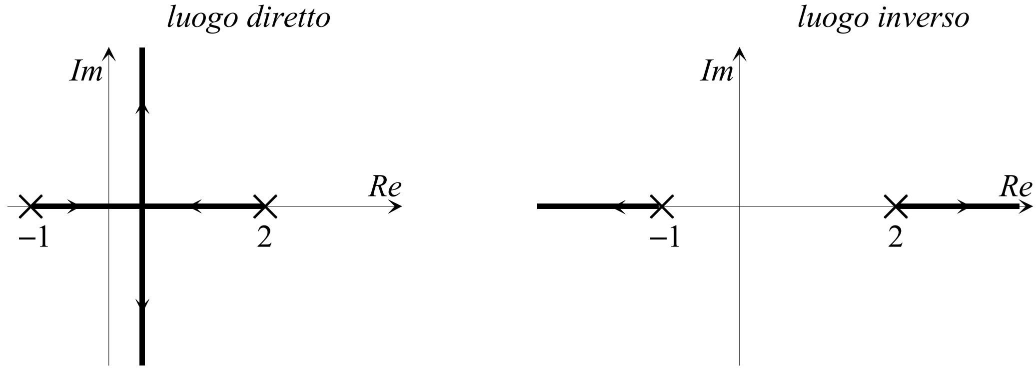


*Fig. 6 : Luoghi delle radici con regolatore proporzionale*

Per nessun valore di $\rho_R$ il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile (c'è sempre un ramo nel semipiano destro). Occorre quindi complicare la struttura del regolatore, in modo da modificare la forma del luogo delle radici. In particolare si può cercare di portare l'asse verticale del luogo diretto nel semipiano sinistro.

Con riferimento al luogo diretto prima tracciato, si supponga di cancellare il polo in $-1$ con uno zero del regolatore, e di sostituirlo con un polo messo in modo tale che l'asintoto del luogo passi per il punto $-2$: è immediato dedurre che il nuovo polo va posto nel punto $-6$.

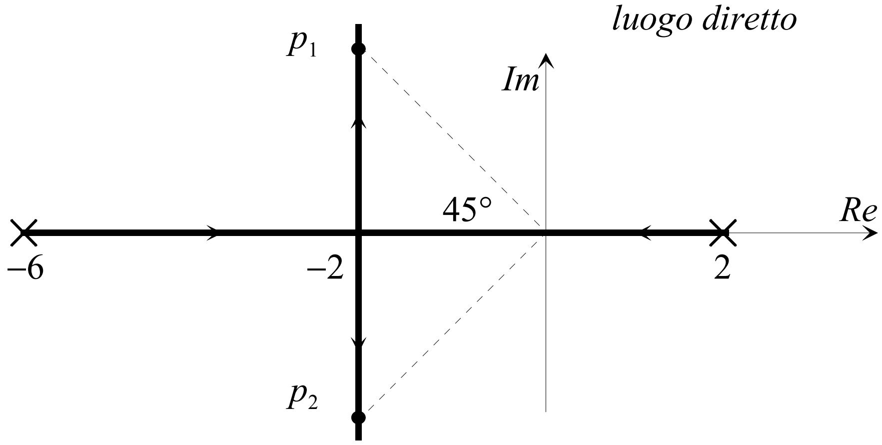


*Fig. 7 : Luogo delle radici modificato*

Il regolatore è quindi:

$$R(s) = \rho_R \frac{s+1}{s+6} \quad \Rightarrow \quad L(s) = \frac{\rho_R}{(s+6)(s-2)}$$

Punteggiando nel punto $-2$ si ottiene:

$$\rho_R = |-2-2||-2+6| = 4 \times 4 = 16$$

Pertanto il regolatore che risolve il problema ha funzione di trasferimento:

$$R(s) = 16\frac{s+1}{s+6}.$$

Se viceversa si volessero posizionare i poli in anello chiuso nei punti $p_1$ e $p_2$ (sull'asse del luogo, a smorzamento $\zeta = 1/\sqrt{2}$), si eseguirebbe la punteggiatura del luogo in uno dei due punti, ottenendo (valutando le distanze dai poli di $L$ con il teorema di Pitagora):

$$\rho_R = \sqrt{2^2+4^2}^{\,2} = 20.$$