Lezione 2

Assegnamento degli autovalori

Introduzione

Con la tecnica dell'assegnamento degli autovalori ci proponiamo, dato un sistema lineare tempo invariante, di progettare una legge di controllo in retroazione tale da posizionare gli autovalori del sistema in anello chiuso in punti desiderati del piano complesso. E' noto che gli autovalori di un sistema ne determinano le caratteristiche dei transitori, in particolare dei transitori associati al moto libero. Disporre della possibilità di posizionare gli autovalori del sistema in anello chiuso in punti diversi da quelli occupati dagli autovalori del sistema sotto controllo consente di risolvere due tipologie di problemi, entrambe di primaria importanza:

- **Stabilizzare** un sistema instabile, posizionando gli autovalori in anello chiuso nel semipiano sinistro aperto del piano complesso;
- **Modificare le caratteristiche dei transitori**, anche quelli associati ad autovalori a parte reale negativa, rendendoli più smorzati o rapidi.

Naturalmente i punti del piano complesso prescelti per gli autovalori del sistema in anello chiuso dovranno essere coerenti con il fatto che gli autovalori sono radici di un polinomio a coefficienti reali (il polinomio caratteristico), e quindi dovranno formare un insieme simmetrico rispetto all'asse reale (dovranno quindi essere reali o a coppie complessi e coniugati).

Per la soluzione del problema distinguiamo due scenari:

A) **Informazione completa (stato accessibile)**

Si assume che il controllore abbia a disposizione le misure di tutte le variabili di stato.

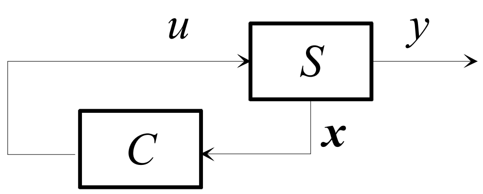

Fig. 1 : Assegnamento degli autovalori con informazione completa

B) **Informazione parziale (stato non accessibile)**

Si assume che il controllore abbia a disposizione le misure solo delle variabili di uscita, non delle variabili di stato.

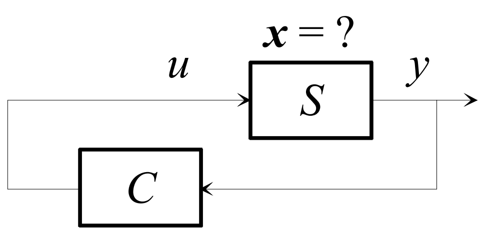

Fig. 2 : Assegnamento degli autovalori con informazione parziale

Supporremo inoltre, salvo esplicita indicazione contraria, che il sistema sotto controllo sia SISO (un ingresso ed un'uscita).

Assegnamento con stato accessibile

Ipotizziamo che il controllore abbia accesso a tutte le variabili di stato. Per quanto noto sul significato dello stato del sistema, la cui conoscenza costituisce un'informazione completa sull'evoluzione della dinamica del sistema, è ragionevole supporre che il problema possa essere risolto da un **regolatore non dinamico**, ovvero da una legge di controllo puramente proporzionale tra stato e variabile di controllo:

$u(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$.

Siano dunque:

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$

le equazioni di stato del sistema sotto controllo.

Osserviamo che sarà possibile spostare gli autovalori solo della parte raggiungibile del sistema, dal momento che la parte non raggiungibile non è influenzata dall'ingresso.

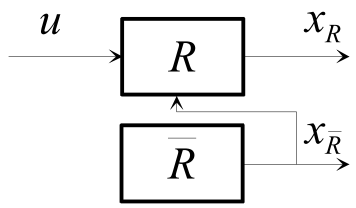

Fig. 3 : Parti raggiungibile e non raggiungibile

Possiamo quindi direttamente assumere la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) **raggiungibile**.

A questo punto dobbiamo operare una distinzione a seconda che la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) sia in forma canonica di controllo o no.

<u>1) ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) in forma canonica di controllo</u>

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$ è quindi:

$$\chi_A(s) = \det(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

Sia $u(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ con $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$ la legge di controllo. Le equazioni del sistema in anello chiuso si ottengono sostituendo la legge di controllo nelle equazioni del sistema sotto controllo. Si ottiene immediatamente:

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$.

Vediamo che struttura assume la matrice $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{BK}$:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1+k_1 & -a_2+k_2 & \cdots & \cdots & -a_n+k_n \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{BK}$ è in forma canonica di controllo, il suo polinomio caratteristico è immediatamente determinabile:

$$\chi_{A+BK}(s)=\det(s\boldsymbol{I}_n-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}))=s^n+(a_n-k_n)s^{n-1}+\cdots+(a_2-k_2)s+(a_1-k_1).$$

Siano ora λ_i^o, i=1,…,n gli autovalori desiderati per il sistema in anello chiuso, radici del **polinomio caratteristico desiderato**:

$$\chi^o(s)=\prod_{i=1}^{n}\left(s-\lambda_i^o\right)=s^n+b_n s^{n-1}+\cdots+b_2 s+b_1.$$

Uguagliando questo polinomio a quello già determinato per la matrice dinamica del sistema in anello chiuso $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{BK}$, si ottengono le relazioni:

$$b_i=a_i-k_i,\quad i=1\cdots n$$

Pertanto esiste una e una sola legge di controllo $u(t)=\boldsymbol{Kx}(t)$ che risolve il problema dell'assegnamento degli autovalori, i cui coefficienti sono:

$$\boxed{k_i=a_i-b_i,\quad i=1\cdots n}$$

2) ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) coppia raggiungibile generica

In questo caso occorre effettuare un **cambiamento di variabili di stato** per riportare il sistema in forma canonica di controllo:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Tx}(t).$$

Le matrici del sistema nelle nuove variabili di stato sono, come è noto, le seguenti:

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{TAT}^{-1},\quad \hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{TB}.$$

La matrice $\boldsymbol{T}$ si ottiene a partire dalle matrici di raggiungibilità prima e dopo il cambiamento di variabili di stato. Infatti la matrice di raggiungibilità originaria è:

$$\boldsymbol{K}_r=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots\end{bmatrix},$$

mentre quella del sistema in forma canonica di controllo è:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{K}}_r &= \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{B}} & \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}} & \hat{\boldsymbol{A}}^2\hat{\boldsymbol{B}} & \cdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{TB} & \boldsymbol{TAT}^{-1}\boldsymbol{TB} & \boldsymbol{TAT}^{-1}\boldsymbol{TAT}^{-1}\boldsymbol{TB} & \cdots\end{bmatrix} = \\ &= \boldsymbol{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots\end{bmatrix} = \boldsymbol{TK}_r\end{aligned}.$$

Pertanto la matrice del cambiamento di variabili è:

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{K}}_r \boldsymbol{K}_r^{-1}.$$

A questo punto si risolve il problema dell'assegnamento degli autovalori per il sistema in forma canonica di controllo con la metodologia indicata al punto precedente, trovando:

$$u(t) = \hat{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{x}}(t).$$

Tornando alle variabili di stato originarie (che per ipotesi sono anche quelle direttamente misurabili), si ottiene la legge di controllo:

$$u(t) = \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{Tx}(t) = \boldsymbol{Kx}(t),$$

con:

$$\boxed{\boldsymbol{K} = \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}}$$

Conclusione: Se lo stato del sistema è completamente accessibile, esiste **una e una sola** legge di controllo che consente di assegnare arbitrariamente gli n autovalori del sistema in anello chiuso se e solo se il sistema è **completamente raggiungibile**.

Esempio

Dato il sistema:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 2u\end{cases}$$
$$y = x_1 + x_2$$

in cui si suppone lo stato completamente misurabile, si vuole progettare una legge di controllo che sposti l'autovalore positivo nella stessa posizione dell'autovalore negativo del sistema.

Risulta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}-1 & 3 \\ 0 & 2\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix}.$$

Verifichiamo la raggiungibilità:

$$\boldsymbol{K}_r = \begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 5 \\ 2 & 4\end{bmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{K}_r) = -6 \neq 0.$$

Il sistema è quindi completamente raggiungibile. Inoltre gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono in -1 e 2. Il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$ è quindi:

$\chi_A(s)=(s+1)(s-2)=s^2-s-2$.

Pertanto la forma canonica di controllo del sistema è:

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

cui corrisponde la matrice di raggiungibilità:

$$\hat{\boldsymbol{K}}_r=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{B}} & \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

che è non singolare per costruzione.

La matrice del cambiamento di variabili di stato che porta il sistema in forma canonica di controllo è quindi:

$$\boldsymbol{T}=\hat{\boldsymbol{K}}_r\boldsymbol{K}_r^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{4}{6} & \frac{5}{6}\\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Poiché si vogliono entrambi gli autovalori nel punto -1, il polinomio caratteristico desiderato è:

$\chi^o(s)=(s+1)(s+1)=s^2+2s+1$.

La legge di controllo per il sistema in forma canonica di controllo è quindi costituita dalla matrice con coefficienti:

$$\begin{aligned}\hat{k}_1&=a_1-b_1=-2-1=-3\\ \hat{k}_2&=a_2-b_2=-1-2=-3\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \hat{\boldsymbol{K}}=\begin{bmatrix}-3 & -3\end{bmatrix}.$$

Infine la legge di controllo nelle originarie variabili di stato è data da:

$$\boldsymbol{K}=\hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

Si può facilmente verificare che gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$ sono effettivamente entrambi nel punto -1.

Osservazione

Se il sistema ha più di un ingresso, si può comunque procedere all'assegnamento degli autovalori con stato accessibile con argomentazioni simili a quelle fin qui sviluppate.

Nel caso generale infatti la matrice $\boldsymbol{B}$ ha n righe e m colonne, m essendo il numero delle variabili di ingresso. Può succedere che da uno o più degli m ingressi il sistema sia completamente raggiungibile, ossia che, detta $\boldsymbol{B}_i$ la i-sima colonna di $\boldsymbol{B}$, la coppia $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}_i)$ risulti raggiungibile per qualche i.

In questo caso è possibile ricondursi al problema monovariabile appena risolto, agendo su uno di questi ingressi, senza utilizzare gli altri, ovvero progettare una matrice riga di guadagni $\boldsymbol{K}_i$ in modo che gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i$ siano in posizioni desiderate del piano complesso.

Se così non è, occorre dapprima assicurarsi che la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) sia completamente raggiungibile nel senso dei sistemi multivariabili, ovvero che presa la matrice:

$$\boldsymbol{K}_r = \begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

di n righe e $n\times m$ colonne, essa abbia *rango* n, ossia sia possibile estrarne n colonne linearmente indipendenti (tali da formare una matrice quadrata non singolare).

Se questa ipotesi è verificata, è possibile dimostrare che esiste sempre almeno una matrice $\boldsymbol{K}$ di dimensioni $m\times n$ per cui gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$ sono in posizioni desiderate del piano complesso.

Si osservi che, contrariamente al caso di sistema a singolo ingresso, per i sistemi a più ingressi esiste una **pluralità di soluzioni** al problema dell'assegnamento degli autovalori. Ne consegue che è possibile stabilire dei criteri (delle cifre di merito) in base ai quali scegliere una soluzione piuttosto che un'altra. Uno dei possibili criteri, utilizzato per esempio dalla funzione `place` del Contol Systems Toolbox di Matlab, mira a massimizzare la robustezza del posizionamento degli autovalori, a fronte di incertezze sui parametri del modello.

Stima dello stato

Poniamoci ora nella situazione in cui lo stato del sistema non sia accessibile, ma si disponga solo di misure delle uscite (oltre ovviamente a disporre degli ingressi di controllo). Ci proponiamo di progettare un sistema che, alimentato da ingressi ed uscite del sistema oggetto dello studio, fornisca una stima delle variabili di stato del sistema.

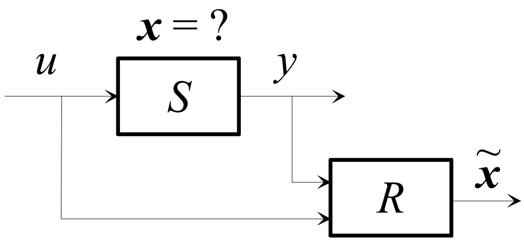

Fig. 4 : Stima dello stato

Chiameremo il sistema che fornisce la stima dello stato **ricostruttore (asintotico)** dello stato o anche, con lieve abuso di terminologia, **osservatore dello stato**.

Supporremo il sistema sotto controllo, oltre che lineare tempo invariante, anche strettamente proprio e SISO, per cui le sue equazioni si potranno scrivere come:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)\\
&\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0\\
&y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)
\end{aligned}
$$

con u e y variabili scalari.

Supporremo inoltre di conoscere senza incertezza le matrici $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$.

Costruiamo ora una **replica** del sistema, cioè un sistema con le stesse equazioni ed alimentato dallo stesso ingresso:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t)\\
&\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0\\
&\tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}
$$

La replica differisce dal sistema originario solo per lo stato iniziale, che non è noto. Se lo stato iniziale fosse noto senza incertezza, l'uscita vera y e la sua replica $\tilde{y}$ coinciderebbero. In presenza di incertezza sullo stato iniziale si forma un errore tra le due uscite. Appare allora ragionevole **correggere** le equazioni dinamiche della replica del sistema con un termine che pesi la differenza tra $\tilde{y}$ e y:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}(\tilde{y}(t) - y(t))\\
&\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \qquad .\\
&\tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}
$$

Se, come ipotizzato, il sistema è a singola uscita, $\boldsymbol{L}$ è dimensionalmente un vettore colonna di n componenti.

Uno schema a blocchi del sistema comprensivo del ricostruttore è riportato di seguito:

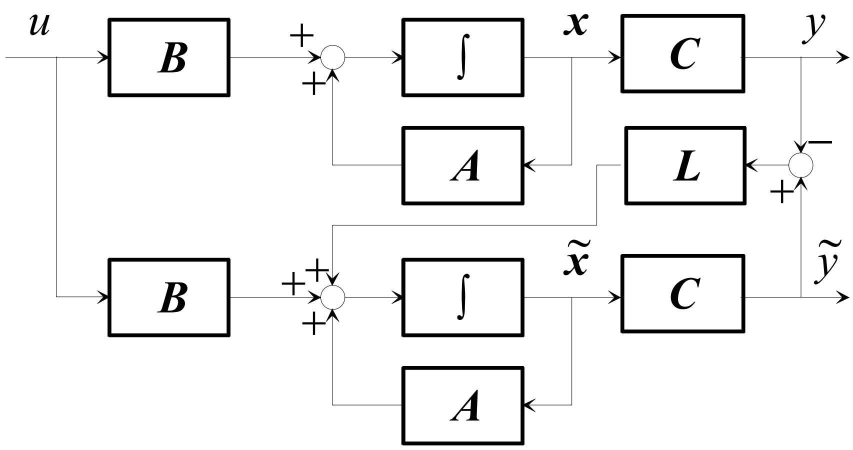

Fig. 5 : Sistema con ricostruttore

Si osservi che non abbiamo introdotto ipotesi di stabilità per il sistema dato. Dobbiamo invece trovare sotto quali condizioni il ricostruttore opera correttamente, ossia produce una stima $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dello stato che differisce dallo stato vero $\boldsymbol{x}$ per un errore limitato nel tempo e asintoticamente nullo.

Per questo, riscriviamo le equazioni del sistema e del ricostruttore, sostituendo in queste ultime le trasformazioni di uscita:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\right).$$

Sottraiamo membro a membro le equazioni:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t))$$

Introducendo quindi la variabile:

$$\varepsilon(t) = \boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t),$$

errore nella stima dello stato, si ottiene l'equazione dinamica:

$$\dot{\varepsilon}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\varepsilon(t).$$

L'errore è quindi governato da un sistema privo di ingresso di matrice dinamica $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{LC}$. Se quindi fossimo in grado di scegliere la matrice $\boldsymbol{L}$ in modo tale da posizionare arbitrariamente gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{LC}$, potremmo anzitutto assegnarli nel semipiano sinistro, in modo da rendere la dinamica dell'errore asintoticamente stabile, e anche scegliere arbitrariamente la velocità con cui l'errore di stima tende a zero.

E' già stato dimostrato che, data una coppia di matrici ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) raggiungibile, è possibile determinare una matrice $\boldsymbol{K}$ in modo tale che gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{BK}$ siano in punti desiderati del piano complesso.

Se ora indichiamo con la notazione $\lambda_i[\boldsymbol{X}]$ l'i-simo autovalore di una matrice quadrata $\boldsymbol{X}$, è immediato convincersi che:

$$\lambda_i[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}] = \lambda_i\left[(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^T\right] = \lambda_i\left[\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{L}^T\right].$$

Ne consegue che, se la coppia ($\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{C}^T$) è raggiungibile, saremo in grado di risolvere il problema dell'assegnamento degli autovalori, che è uguale a quello già risolto pur di porre $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}^T$. D'altra parte la coppia ($\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{C}^T$) è raggiungibile se e solo se la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$) è osservabile, come si deduce dal fatto che la matrice di raggiungibilità della prima coppia coincide con la matrice di osservabilità della seconda coppia.

Conclusione: Esiste **una e una sola** matrice di guadagni che consente di assegnare arbitrariamente gli n autovalori della dinamica dell'errore di stima dello stato se e solo se il sistema è **completamente osservabile**.

La procedura per ricavare la matrice dei guadagni $\boldsymbol{L}$ si ottiene facilmente per dualità di quella già illustrata per ricavare la matrice $\boldsymbol{K}$ dell'assegnamento degli autovalori. Si ricorda che, data una terna ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$) che definisce un sistema dinamico strettamente proprio, si definisce **sistema duale** il sistema definito dalla terna ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$), con $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}^T$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}^T$. E' facile verificare che i due sistemi ammettono la stessa funzione di trasferimento.

Scritta quindi la coppia $(\hat{\boldsymbol{F}},\hat{\boldsymbol{G}})$ del sistema duale in forma canonica di controllo [1]:

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{A}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{G}} = \hat{\boldsymbol{C}}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e posto:

$$\hat{\boldsymbol{L}}^T = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 & \hat{l}_2 & \cdots & \hat{l}_n \end{bmatrix},$$

si ricava:

$$\hat{\boldsymbol{F}} + \hat{\boldsymbol{G}}\hat{\boldsymbol{L}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1+\hat{l}_1 & -a_2+\hat{l}_2 & \cdots & \cdots & -a_n+\hat{l}_n \end{bmatrix}.$$

Se il polinomio caratteristico desiderato per la dinamica dell'errore è:

$$\chi^o(s) = s^n + b_n s^{n-1} + \cdots + b_2 s + b_1,$$

si ottengono le relazioni:

$$b_i = a_i - \hat{l}_i, \quad \Rightarrow \quad \hat{l}_i = a_i - b_i \qquad i = 1 \cdots n.$$

Detta quindi $\boldsymbol{K}_o$ la matrice di osservabilità della coppia originaria di matrici ($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$), coincidente come detto con la matrice di raggiungibilità della coppia ($\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}$) del sistema

[1] Il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{F}$ coincide con il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$.

duale, e $\hat{\boldsymbol{K}}_o$ la matrice di osservabilità della coppia $\left(\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{C}}\right)$, a sua volta coincidente con la matrice di raggiungibilità della coppia $\left(\hat{\boldsymbol{F}},\hat{\boldsymbol{G}}\right)$ del sistema duale in forma canonica di controllo, la matrice del cambio di variabili di stato (che porta il sistema duale in forma canonica di controllo) è:

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{K}}_o \boldsymbol{K}_o^{-1}.$$

Pertanto, sempre procedendo in stretta analogia con il problema dell'assegnamento autovalori, si avrà:

$$\boldsymbol{L}^T = \hat{\boldsymbol{L}}^T \boldsymbol{T},$$

e quindi, in definitiva:

$$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T}^T \hat{\boldsymbol{L}}}.$$

Esempio

Si riprenda il sistema dell'esempio precedente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 2u \end{cases}$$
$$y = x_1 + x_2$$

Si vuole progettare un ricostruttore asintotico dello stato in modo tale che la dinamica dell'errore sia caratterizzata da due autovalori reali coincidenti nel punto -10.

Risulta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo l'osservabilità:

$$\boldsymbol{K}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det\left(\boldsymbol{K}_o\right) = 6 \neq 0.$$

Il sistema è quindi completamente osservabile. Il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$ è:

$$\chi_A(s) = (s+1)(s-2) = s^2 - s - 2.$$

Pertanto la forma canonica di controllo per il sistema duale è:

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{A}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{G}} = \hat{\boldsymbol{C}}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cui corrisponde la matrice di raggiungibilità (di osservabilità per la coppia $\left(\hat{\boldsymbol{A}},\hat{\boldsymbol{C}}\right)$):

$$\hat{\boldsymbol{K}}_o = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{G}} & \hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{G}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{C}}^T & \hat{\boldsymbol{A}}^T\hat{\boldsymbol{C}}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

che è non singolare per costruzione.

La matrice di cambiamento di variabili di stato che porta il sistema duale in forma canonica di controllo è quindi:

$$\boldsymbol{T}=\hat{\boldsymbol{K}}_o\boldsymbol{K}_o^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

Poiché si vogliono entrambi gli autovalori nel punto -10, il polinomio caratteristico desiderato è:

$$\chi^o(s)=(s+10)(s+10)=s^2+20s+100.$$

La matrice dei guadagni per il sistema duale in forma canonica di controllo è quindi costituita dai coefficienti:

$$\begin{aligned}\hat{l}_1&=a_1-b_1=-2-100=-102\\ \hat{l}_2&=a_2-b_2=-1-20=-21\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \hat{\boldsymbol{L}}^T=\begin{bmatrix}-102 & -21\end{bmatrix}.$$

Infine la matrice dei guadagni nelle originarie variabili di stato è data da:

$$\boldsymbol{L}^T=\hat{\boldsymbol{L}}^T\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-102 & -21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -24\end{bmatrix},$$

e quindi ovviamente:

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}3\\ -24\end{bmatrix}.$$

Si può facilmente verificare che gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}$ sono effettivamente entrambi nel punto -10.

Osservazioni

1) Come il problema dell'assegnamento degli autovalori, anche il problema della stima dello stato può essere risolto con strumenti analoghi a quelli qui sviluppati anche nel caso di **sistema multivariabile** (con più uscite).
2) Si è supposto che il ricostruttore dello stato avesse lo stesso ordine n del sistema sotto controllo, ovvero che tutte le variabili di stato venissero ricostruite. E' evidente che in questa operazione c'è una certa ridondanza, in quanto l'uscita può coincidere essa stessa con una variabile di stato e comunque è sempre uguale ad una combinazione lineare delle variabili di stato. E' allora possibile progettare, con tecniche che non vengono affrontate in questo corso, dei **ricostruttori di ordine ridotto**, che forniscono la stima di un sottoinsieme di variabili di stato.

Assegnamento con stato non accessibile

Una volta progettato il ricostruttore dello stato, ci si chiede se sia possibile risolvere il problema dell'assegnamento degli autovalori con una legge di controllo agente sulla stima dello stato:

$u(t) = \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$.

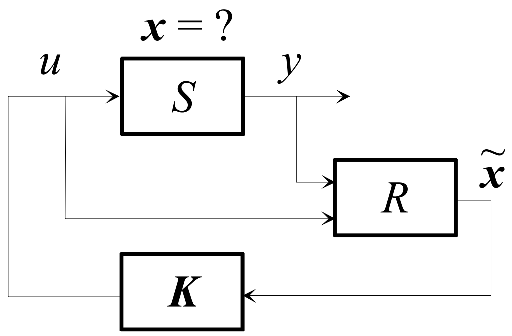

Fig. 6 : Legge di controllo sulla stima dello stato

Ci poniamo nelle ipotesi che la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) sia raggiungibile e la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$) osservabile.

Scriviamo le equazioni del sistema sotto controllo, dell'osservatore e della legge di controllo:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\
y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \\
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}(\tilde{y}(t) - y(t)) \\
\tilde{y}(t) &= \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\
u(t) &= \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}$$

Eliminando u, y e $\tilde{y}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= -\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}.$$

Nulla vieta, a questo punto, di effettuare un cambiamento di variabili di stato, esprimendo il sistema nelle variabili $\boldsymbol{x}(t)$ e $\varepsilon(t) = \boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$. Sottraendo membro a membro le equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\varepsilon(t) \\
\dot{\varepsilon}(t) &= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\varepsilon(t)
\end{aligned}.$$

La matrice dinamica del sistema in anello chiuso è quindi:

$$\boldsymbol{A}_c = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{array}\right],$$

e risulta triangolare a blocchi.

Ne consegue che gli autovalori della matrice sono la riunione degli autovalori delle due sottomatrici, $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$, sulla diagonale. Sappiamo che se la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) è raggiungibile, siamo in grado di posizionare arbitrariamente gli autovalori della matrice

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$ e che, se la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$) è osservabile, siamo in grado di posizionare arbitrariamente gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}$.

Conclusione: E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori del sistema in anello chiuso misurando la sola uscita del sistema se e solo se il sistema è **raggiungibile e osservabile**.

Osservazioni

1. Di fatto se il sistema è di ordine n si perviene ad un sistema dinamico in anello chiuso di ordine $2n$ i cui autovalori sono posizionabili arbitrariamente. Naturalmente se si usassero ricostruttori di ordine ridotto si perverrebbe ad un sistema in anello chiuso di ordine ridotto.
2. Si osservi che vige un importante **principio di separazione**: si può progettare la legge di controllo $\boldsymbol{K}$ come se lo stato fosse misurabile e si può progettare il ricostruttore dello stato (matrice $\boldsymbol{L}$) come se il sistema sotto controllo fosse in anello aperto.
3. Il fatto che gli autovalori del sistema in anello chiuso possano essere scelti in modo arbitrario è naturalmente da intendersi come un risultato di notevolissima valenza concettuale, ma al quale vanno associate anche delle **limitazioni di ordine pratico** che non emergono dalla trattazione formale dell'argomento. Apparirebbe infatti possibile rendere un sistema in anello chiuso arbitrariamente più veloce del sistema in anello aperto, spostando gli autovalori in posizioni arbitrariamente lontane. E' evidente che ciò comporta conseguenze sulla variabile di controllo, che può risultare sollecitata in modo del tutto incompatibile con i limiti fisici degli attuatori e comunque con criteri di moderazione del controllo essenziali per l'economicità complessiva del progetto. Una metodologia di controllo nello spazio di stato analoga a quella qui trattata ma in grado di tenere esplicitamente conto dello sforzo del controllo è il **controllo ottimo**, trattato in corsi più avanzati.

Proprietà del controllore

Riprendiamo le equazioni del ricostruttore e della legge di controllo:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}(\tilde{y}(t) - y(t)) \\
\tilde{y}(t) &= \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\
u(t) &= \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}\quad .$$

Eliminiamo $\tilde{y}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{L}y(t) \\
u(t) &= \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}$$

Riconosciamo in queste equazioni un sistema dinamico SISO di ordine n, con ingresso y, uscita u e stato $\tilde{\boldsymbol{x}}$. La matrice dinamica è $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC}$.

Si osservi che, poiché dalla stabilità delle matrici $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$ e $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}$ non si evince la stabilità della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC}$, non c'è alcuna garanzia a priori che questo sistema dinamico sia asintoticamente stabile.

Definendo poi le due funzioni di trasferimento, rispettivamente del sistema sotto controllo e del controllore:

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$
$$R(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC}))^{-1}\boldsymbol{L}$$

si riconosce che la connessione tra G e R è in retroazione negativa, come la connessione dei regolatori progettati con i metodi classici nel dominio della frequenza.

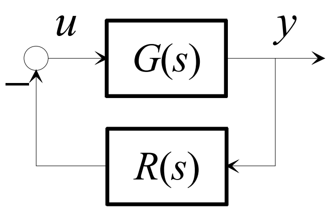

Fig. 7 : Connessione tra sistema sotto controllo e controllore

Ci si chiede a questo punto se non sia possibile progettare la funzione di trasferimento $R(s)$ direttamente nel dominio della frequenza, ossia determinare una funzione di trasferimento razionale (rapporto di polinomi) in modo tale che le radici del polinomio caratteristico in anello chiuso siano in punti desiderati del piano complesso. In effetti questa strada è percorribile (con i metodi cosiddetti polinomiali) ma, oltre a non prestarsi al caso multivariabile, comporta dei problemi di natura numerica (cattivo condizionamento di alcune matrici usate per risolvere il problema).

Esempio

Si riprenda il sistema trattato negli esempi precedenti:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 2u \end{cases}$$

$$y = x_1 + x_2$$

per il quale:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo determinato le due matrici:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

La matrice dinamica del controllore è dunque:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ -24 & -25 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di questa matrice risulta:

$$\chi_{A+BK+LC}(s) = s^2 + 23s + 58,$$

per cui il controllore in questo caso risulta asintoticamente stabile. Calcolandone la funzione di trasferimento si ottiene:

$$R(s) = \frac{36s + 36}{s^2 + 23s + 58}.$$

La funzione di trasferimento del sistema sotto controllo è invece:

$$G(s) = \frac{3s + 6}{s^2 - s - 2},$$

da cui si ricava la funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{36s + 36}{s^2 + 23s + 58}\frac{3s + 6}{s^2 - s - 2}.$$

Il polinomio caratteristico in anello chiuso (somma di numeratore e denominatore di L) è quindi:

$$\chi(s) = (36s + 36)(3s + 6) + (s^2 + 23s + 58)(s^2 - s - 2) = s^4 + 22s^3 + 141s^2 + 220s + 100,$$

ed ha una radice doppia in -1 ed una doppia in -10 (come previsto).

In figura è riportato il diagramma di Nyquist associato a L, che compie un giro in senso antiorario intorno al punto -1 dell'asse reale, coerentemente con il fatto che L ha un polo nel semipiano destro e con l'enunciato del criterio di Nyquist.

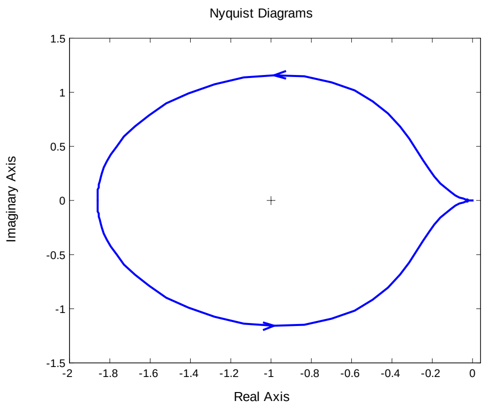

Fig. 8 : Diagramma di Nyquist associato a L

Regolazione a zero dell'errore

Il problema di assegnamento degli autovalori come lo abbiamo affrontato finora non prevede la presenza di un **segnale di riferimento** per l'uscita del sistema. Se viceversa assume rilevanza anche un problema di inseguimento del riferimento ("servo problem" in terminologia inglese) allora è noto che per garantire **precisione statica** in presenza di segnale di riferimento ed eventuale disturbo in linea d'andata costanti a regime è di norma necessario un integratore, ovvero un regolatore di tipo uno.

Uno schema per l'introduzione dell'integratore in un sistema di controllo ad assegnamento degli autovalori con stima dello stato può essere quello rappresentato in figura:

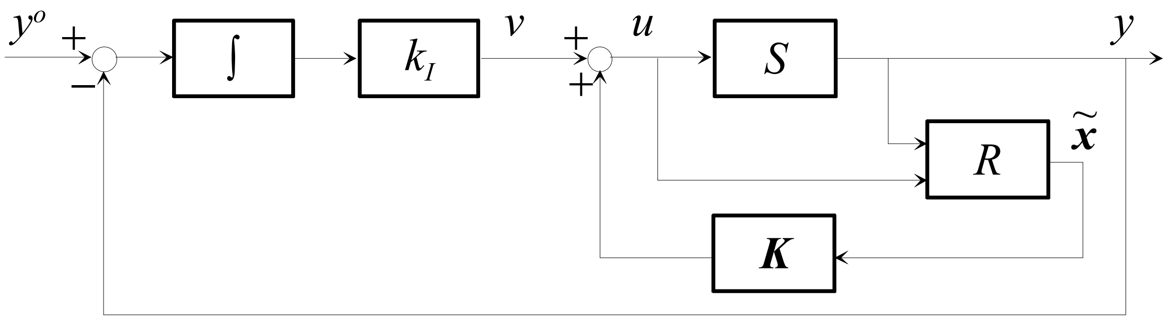

Fig. 9 : Introduzione dell'integratore

Il progetto del guadagno k_I dell'integratore può essere condotto congiuntamente a quello della matrice dei guadagni $\boldsymbol{K}$ in modo tale da allocare gli autovalori del sistema in anello chiuso comprensivo dello stato dell'integratore.

Detto x_I dello stato dell'integratore si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)\\ \dot{x}_I(t) &= y^o(t) - y(t) = y^o(t) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}.$$

Definiamo:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

lo stato del sistema "aumentato" con l'integratore. Si ha quindi:

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{G}_u u(t) + \boldsymbol{G}_{y^o} y^o(t),$$

con:

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}_{y^o} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che sarà possibile allocare arbitrariamente gli autovalori del sistema aumentato, previo stima dello stato $\boldsymbol{x}$, agendo sulla variabile di ingresso u se e solo se la coppia ($\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}_u$) è raggiungibile. Calcoliamone la matrice di raggiungibilità:

$$\boldsymbol{K}_{r(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}_u)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_u & \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}_u & \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G}_u & \cdots & \boldsymbol{F}^n\boldsymbol{G}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B} \\ 0 & -\boldsymbol{CB} & -\boldsymbol{CAB} & \cdots & -\boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{K}_r \\ 1 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix},$$

dove $\boldsymbol{K}_r$ è la matrice di raggiungibilità del sistema sotto controllo. Essendo il sistema raggiungibile per ipotesi, $\boldsymbol{K}_r$ è non singolare e non lo è neanche il secondo fattore del prodotto che forma la matrice di raggiungibilità di $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}_u)$. Per quanto riguarda il primo fattore, osserviamo che, se $\boldsymbol{A}$ è non singolare:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{CA}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix},$$

per cui:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right).$$

Nell'espressione $\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}$ riconosciamo, a meno del segno, il **guadagno statico** del sistema, ossia:

$$\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} = -G(0),$$

con $G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ funzione di trasferimento del sistema.

Ne consegue che il determinante è diverso da zero, e quindi il sistema aumentato è raggiungibile, se e solo se il sistema sotto controllo non ha zeri in s=0.

Se $\boldsymbol{A}$ è singolare si può dimostrare, con argomentazioni lievemente più avanzate, che se la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) è raggiungibile e la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$) è osservabile, la matrice:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}$$

è sempre non singolare.

Conclusione: Il problema dell'assegnamento degli autovalori con retroazione dall'uscita e regolazione a zero dell'errore è risolubile se e solo se il sistema sotto controllo è **raggiungibile e osservabile e non presenta zeri in s = 0**.

Elementi in feedforward

Per attribuire anche precisione dinamica al sistema di controllo progettato con l'assegnamento degli autovalori e regolazione a zero dell'errore si utilizzano elementi del sistema di controllo che agiscono solo sul riferimento e non sulla linea di retroazione. Questi elementi prendono il nome di elementi in **feedforward**.

Un possibile schema comprensivo degli elementi in feedforward è il seguente:

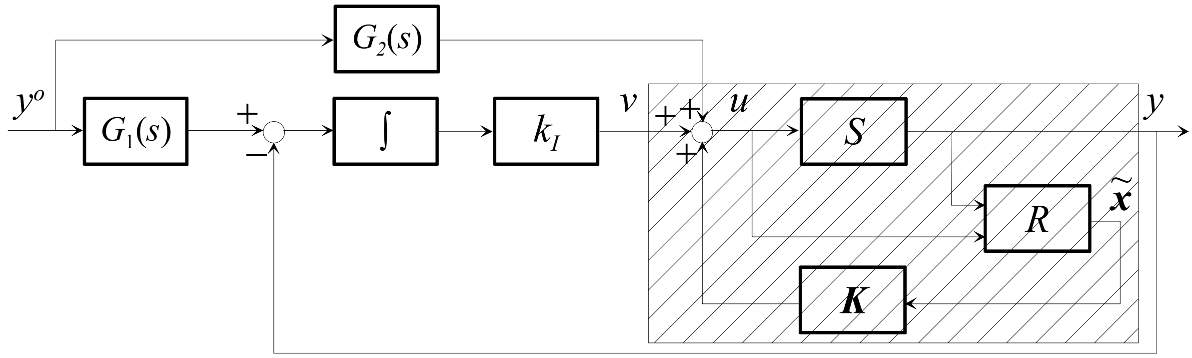

Fig. 10 : Introduzione degli elementi in feedforward

Sia:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

la funzione di trasferimento del sistema sotto controllo (dall'ingresso u all'uscita y). La funzione di trasferimento del sistema tratteggiato, comprensivo del sistema sotto controllo e della retroazione con guadagno $\boldsymbol{K}$ sulla stima dello stato è:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = G_k(s) = \frac{N(s)}{D_k(s)},$$

con:

$$D_k(s) = \det(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}))$$

(è immediato verificare che la dinamica del ricostruttore non compare in questa funzione di trasferimento).

La funzione di trasferimento dal riferimento y^o alla variabile controllata y è:

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = \frac{\left[G_1(s)\frac{k_I}{s} + G_2(s)\right]G_k(s)}{1 + \frac{k_I}{s}G_k(s)}.$$

Posto ora:

$$G_2(s) = G_1(s)G_k(s)^{-1}$$

risulta:

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = G_1(s).$$

G_1 costituisce quindi la funzione di trasferimento nominale dal riferimento alla variabile controllata: la si progetterà quindi a guadagno unitario e con una banda compatibile con le specifiche di precisione dinamica imposte.

Si osservi tuttavia che il progetto così come descritto non si può condurre se il sistema sotto controllo ha zeri (radici di N) a parte reale positiva, che implicherebbero una G_2 instabile. Inoltre la realizzabilità di G_2 richiede che G_1 abbia grado relativo almeno uguale a quello di G_k e quindi a quello del sistema sotto controllo G.