



Controllo del moto e robotica industriale

Richiami di cinematica

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Nota:

I disegni riportati in queste slide sono tratti dal testo:

L.Sciavicco, B.Siciliano

Robotica industriale –

Modellistica e controllo di robot manipolatori

(2a ed.) Mc Graw-Hill, 2000

Il sistema meccanico

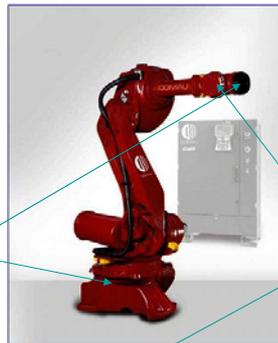


Come è noto il manipolatore è costituito da una serie di corpi rigidi (*link*) connessi da *giunti*.

Un'estremità della catena è costituita dalla **BASE**, di norma fissata terra.

All'altra estremità è presente l'**END EFFECTOR** (pinza, strumento di lavoro).

Nel manipolatore si individua una struttura portante che garantisce il posizionamento ed un **POLSO** che conferisce destrezza, dando i gradi di libertà di orientamento all'organo terminale.

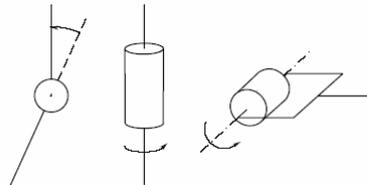


I giunti

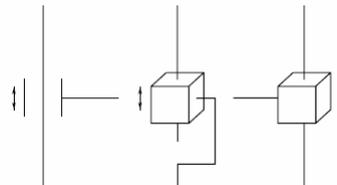


Ciascun giunto consente uno (e uno solo) *grado di mobilità* tra due bracci. Chiamiamo variabile di giunto la coordinata associata a questo grado di mobilità.

Schematizzazione dei giunti:



GIUNTI ROTOIDALI



GIUNTI PRISMATICI

Terna base e terna utensile

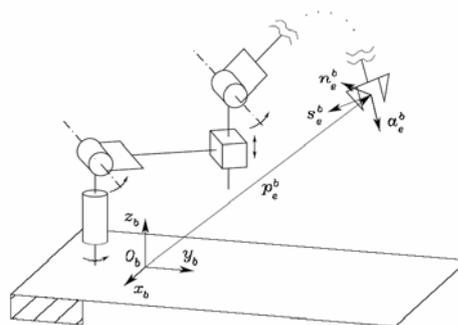


Definiamo una terna di base ed una terna solidale con l'utensile.

La terna utensile è definita per mezzo di 3 versori:

- a_e (avvicino): direzione di avvicinamento al pezzo;
- s_e (scivolamento): ortogonale ad a_e nel piano di scorrimento della presa;
- n_e (normale): ortogonale agli altri due.

p_e punta all'origine della terna utensile (punto centrale dell'organo di presa).



Cinematica diretta

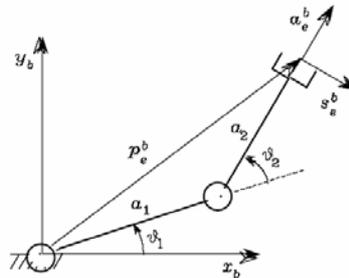


L'equazione cinematica diretta determina posizione ed orientamento della terna utensile rispetto alla terna base, in funzione delle variabili di giunto.

$$T_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} n_e^b(\mathbf{q}) & s_e^b(\mathbf{q}) & a_e^b(\mathbf{q}) & p_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{matrice di trasformazione omogenea})$$

Esempio: manipolatore planare a due bracci

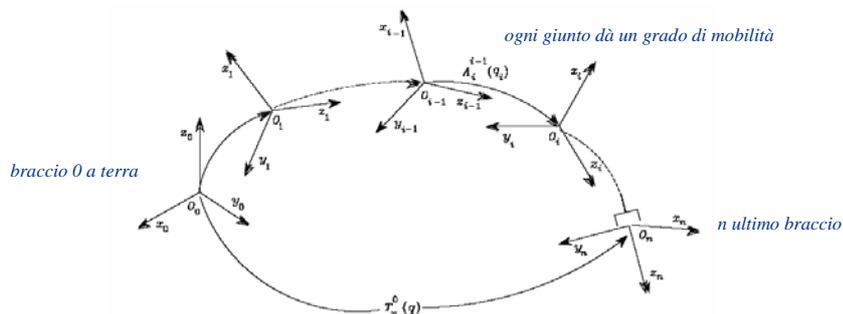
$$T_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinematica diretta



Per procedere in modo sistematico nella determinazione della cinematica diretta, occorre definire una terna solidale con ciascun braccio:



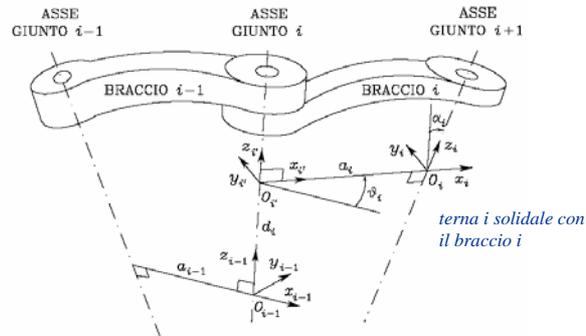
Procedendo iterativamente:

$$T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)\dots A_n^{n-1}(q_n) \quad T_e^b(\mathbf{q}) = T_0^b T_n^0(\mathbf{q}) T_e^n$$

Convenzione di Denavit-Hartenberg



È una convenzione per la scelta delle terne solidali ai bracci:



- z_i giace lungo l'asse del giunto $i+1$
- O_i è all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_i e z_{i-1} ; si indica con O_i l'intersezione della normale comune con z_{i-1}
- x_i è diretto lungo la normale comune agli assi z_i e z_{i-1} , con verso positivo dal giunto i al giunto $i+1$
- y_i completa una terna destra

Controllo del moto e robotica industriale - Richiami di cinematica - P. Rocco [7]

Definizione non univoca della terna



Vi sono alcuni casi in cui la terna non è univocamente definita:

- Nella terna 0 solo la direzione di z_0 è specificata: si possono scegliere arbitrariamente origine ed asse x_0
- Nella terna n è specificato solo l'asse x_n che deve essere normale a z_{n-1}
- Quando due assi consecutivi sono paralleli non è univocamente definita la normale comune
- Quando due assi consecutivi si intersecano, non è definito il verso di x_i
- Quando il giunto i è prismatico solo la direzione di z_{i-1} è determinata

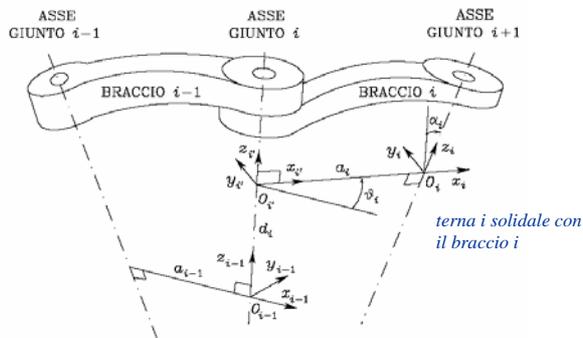
L'indeterminazione può essere usata per semplificare la procedura.

Controllo del moto e robotica industriale - Richiami di cinematica - P. Rocco [8]

Parametri di Denavit-Hartenberg



Per definire una terna rispetto alla precedente sono sufficienti 4 parametri:



- a_i distanza di O_i da O_i'
- d_i coordinata su z_{i-1} di O_i
- α_i angolo intorno all'asse x_i tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i valutato positivo in senso antiorario
- ϑ_i angolo intorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i valutato positivo in senso antiorario

a_i e α_i sono sempre costanti

ϑ_i o d_i è variabile

Matrice di trasformazione omogenea



Costruzione della matrice di trasformazione dalla terna $i-1$ alla terna i :

- I) Per sovrapporre la terna $i-1$ alla terna i' si trasla la terna lungo l'asse z_{i-1} di una lunghezza d_i ruotandola di un angolo ϑ_i intorno a z_{i-1} :

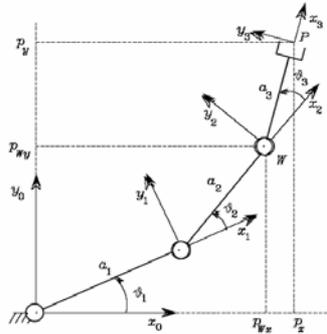
$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- II) Per sovrapporre la terna i' alla terna i si trasla la terna lungo l'asse x_i' per una lunghezza a_i , ruotandola di un angolo α_i intorno a x_i' :

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_{i'}^{i-1} A_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a tre bracci

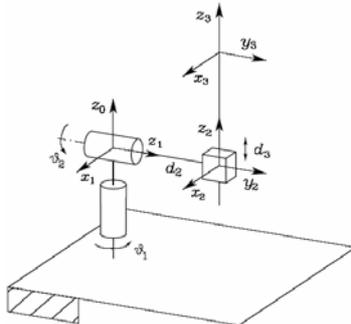


| | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | a_1 | 0 | 0 | ϑ_1 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | ϑ_2 |
| 3 | a_3 | 0 | 0 | ϑ_3 |

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile non coincide con la terna 3

Manipolatore sferico

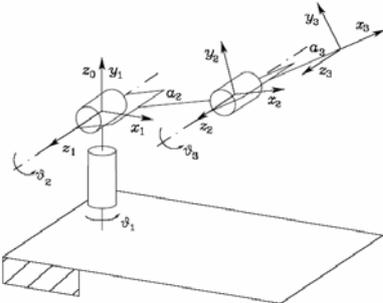


| | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $-\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | 0 | $\pi/2$ | d_2 | ϑ_2 |
| 3 | 0 | 0 | d_3 | 0 |

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile coincide con la terna 3

Manipolatore antropomorfo

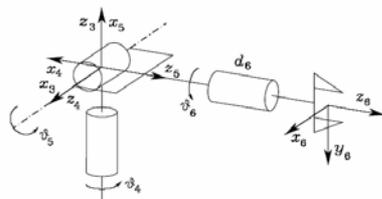


| | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | ϑ_2 |
| 3 | a_3 | 0 | 0 | ϑ_3 |

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile non coincide con la terna 3

Polso sferico



| | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---|-------|------------|-------|---------------|
| 4 | 0 | $-\pi/2$ | 0 | ϑ_4 |
| 5 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_5 |
| 6 | 0 | 0 | d_6 | ϑ_6 |

$\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$ sono gli angoli di Eulero ZYZ della terna 6 rispetto alla 3

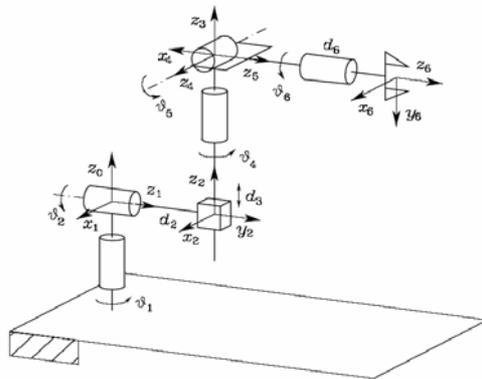
$$T_6^3 = A_4^3 A_5^4 A_6^5 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile coincide con la terna 6

Manipolatore di Stanford



Il manipolatore di Stanford è un manipolatore sferico con polso sferico



| | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $-\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | 0 | $\pi/2$ | d_2 | ϑ_2 |
| 3 | 0 | 0 | d_3 | 0 |
| 4 | 0 | $-\pi/2$ | 0 | ϑ_4 |
| 5 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_5 |
| 6 | 0 | 0 | d_6 | ϑ_6 |

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3$$

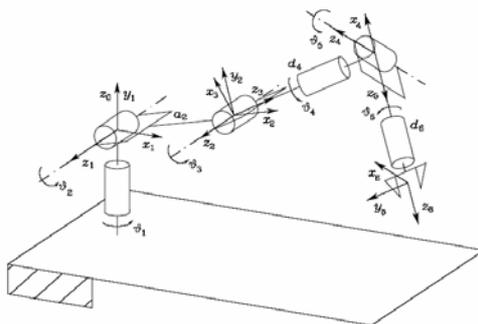
Già calcolata per il polso sferico

Già calcolata per il manipolatore sferico

Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Montiamo un polso sferico sul manipolatore antropomorfo



| | a_i | α_i | d_i | ϑ_i |
|---|-------|------------|-------|---------------|
| 1 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_1 |
| 2 | a_2 | 0 | 0 | ϑ_2 |
| 3 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_3 |
| 4 | 0 | $-\pi/2$ | d_4 | ϑ_4 |
| 5 | 0 | $\pi/2$ | 0 | ϑ_5 |
| 6 | 0 | 0 | d_6 | ϑ_6 |

La terna 3 del manipolatore antropomorfo non era orientata correttamente per il successivo polso sferico, per cui per calcolare la cinematica diretta occorre rifare i conti (non basta semplicemente moltiplicare le due matrici di trasformazione parziali)

Spazio dei giunti e spazio operativo



Lo **spazio dei giunti** è definito dal vettore delle variabili di giunto:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_i = \theta_i \text{ (giunto rotoidale)} \\ q_i = d_i \text{ (giunto prismatico)} \end{array}$$

Lo **spazio operativo** è lo spazio in cui è specificata l'operazione che il manipolatore deve compiere. È definito dalla postura \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p} \text{ (posizione)} \\ \phi \text{ (rappresentazione minima dell'orientamento)} \end{array}$$

m componenti

Equazione cinematica diretta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

Problema cinematico inverso

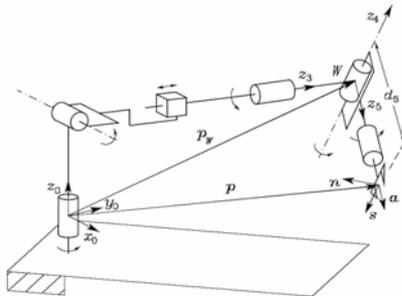


$\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{q}$ Assegnati posizione ed orientamento della terna utensile,
 $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{q}$ trovare le corrispondenti variabili di giunto.

- Il problema può non ammettere soluzione (se posizione ed orientamento non appartengono allo spazio di lavoro destro)
- La soluzione analitica (in forma chiusa) può non esistere, nel qual caso si ricorre a tecniche numeriche
- Possono esserci soluzioni multiple
- Possono esserci infinite soluzioni

In generale la soluzione si ricava senza un procedimento sistematico, ma sulla base di intuizione nella manipolazione delle equazioni.

Manipolatore con polso sferico



Se il manipolatore ha polso sferico, si può disaccoppiare la soluzione del problema cinematico inverso per la posizione da quella per l'orientamento

Posizione del centro polso:

$$p_W = p - d_6 a$$

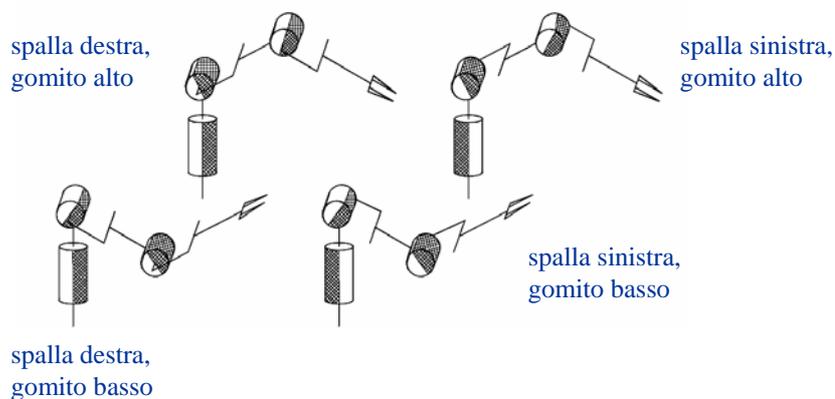
Procedura operativa

- si calcola la posizione del centro polso p_W
- si risolve la cinematica inversa per (q_1, q_2, q_3)
- si calcola la matrice $R_3^0(q_1, q_2, q_3)$
- si calcola $R_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = R_3^{0T} R$
- si risolve la cinematica inversa per l'orientamento, ricavando $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$

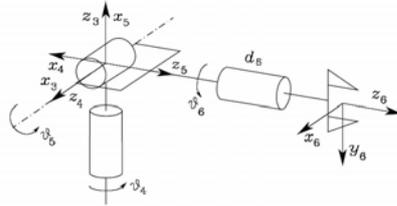
Manipolatore antropomorfo



Esistono quattro configurazioni ammissibili:



Polso sferico



Il dato del problema è la matrice:

$$R_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix}$$

Per la soluzione, si utilizzano le formule note per gli angoli di Eulero ZYZ:

$$\begin{aligned} \vartheta_4 &= \text{Atan} 2(a_y^3, a_x^3) \\ \vartheta_5 \in (0, \pi): \quad \vartheta_5 &= \text{Atan} 2\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan} 2(s_z^3, -n_z^3) \\ \vartheta_4 &= \text{Atan} 2(-a_y^3, -a_x^3) \\ \vartheta_5 \in (-\pi, 0): \quad \vartheta_5 &= \text{Atan} 2\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 &= \text{Atan} 2(-s_z^3, n_z^3) \end{aligned}$$

Jacobiano geometrico



Analizziamo ora il moto della terna utensile (solidale con l'organo terminale) per un manipolatore robotico.

Possiamo definire la velocità lineare e la velocità angolare di tale terna: \dot{p} e ω .

Obiettivo della **cinematica differenziale** è di esprimere queste velocità in funzione delle velocità delle variabili di giunto.

$$\begin{aligned} \dot{p} &= J_P(q)\dot{q} \\ \omega &= J_O(q)\dot{q} \end{aligned}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

La matrice (6×n): $J(q) = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix}$

Prende il nome di **Jacobiano geometrico** del manipolatore.

Calcolo dello Jacobiano



Partizioniamo lo Jacobiano in n colonne, ciascuna delle quali, a sua volta, partizionata in due:

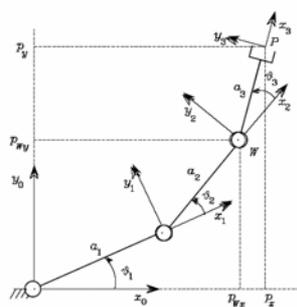
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{P1} & \mathbf{j}_{Pn} \\ \dots & \dots \\ \mathbf{j}_{O1} & \mathbf{j}_{On} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dot{q}_i \mathbf{j}_{Pi}: \text{contributo del giunto } i \text{ alla velocità lineare} \\ \dot{q}_i \mathbf{j}_{Oi}: \text{contributo del giunto } i \text{ alla velocità angolare} \end{array}$$

Risulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{Pi} \\ \mathbf{j}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{giunto prismatico} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

Gli elementi per il calcolo di queste colonne si ricavano da relazioni cinematiche dirette.

Manipolatore planare a tre bracci



$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

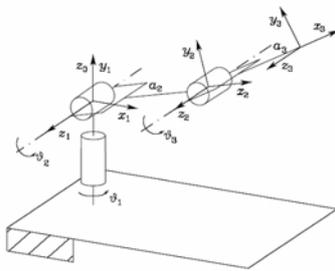
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

N.B.:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo



$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

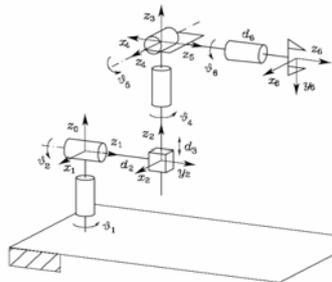
$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix} \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ \hline 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Controllo del moto e robotica industriale - Richiami di cinematica - P. Rocco [25]

Manipolatore di Stanford



$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ z_0 & z_1 & \mathbf{0} & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_3 = p_4 = p_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6(c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6(c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2) \\ c_2 d_3 + d_6(c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5) \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = z_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad z_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix} \quad z_5 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5 \\ c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2 \\ c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5 \end{bmatrix}$$

Controllo del moto e robotica industriale - Richiami di cinematica - P. Rocco [26]

Jacobiano analitico



Consideriamo l'equazione cinematica diretta di un manipolatore:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{q}) \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

dove $\boldsymbol{\phi}$ costituisce una rappresentazione minima dell'orientamento. Derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

D'altra parte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ (\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

La matrice:
$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

Prende il nome di **Jacobiano analitico** del manipolatore.

Jacobiano analitico e Jacobiano geometrico



Il legame tra la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e la derivata del vettore $\boldsymbol{\phi}$ che esprime l'orientamento è il seguente:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}) \dot{\boldsymbol{\phi}}$$

dove \mathbf{T} è una matrice dipendente dalla rappresentazione utilizzata per l'orientamento.

Esprimiamo quindi la velocità (lineare ed angolare) della terna utensile in termini delle derivate di \mathbf{p} e $\boldsymbol{\phi}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\boldsymbol{\phi}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\phi}) \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\phi}) \mathbf{J}_A \dot{\mathbf{q}}$$

Ne consegue:

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}_A(\boldsymbol{\phi}) \mathbf{J}_A$$

Singularità cinematiche



Riprendiamo la relazione che definisce lo Jacobiano geometrico:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

I valori di \mathbf{q} per cui la matrice \mathbf{J} diminuisce di rango prendono il nome di **singularità cinematiche**. In presenza di singularità cinematiche si ha:

1. Perdita di mobilità (non è possibile imporre leggi di moto arbitrarie)
2. Possibilità di infinite soluzioni al problema cinematico inverso
3. Velocità elevate nello spazio dei giunti (nell'intorno di singularità)

Le singularità possono essere:

1. **Ai confini** dello spazio di lavoro raggiungibile
2. **All'interno** dello spazio di lavoro raggiungibile

Queste ultime sono più problematiche, perché ci si può incorrere con traiettorie pianificate nello spazio operativo.

Singularità cinematiche: esempio

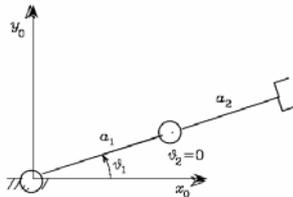


Consideriamo un manipolatore planare a due bracci:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Determiniamone le singularità:

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2 = 0 \Leftrightarrow \vartheta_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$



Si tratta di singularità ai confini dello spazio di lavoro.

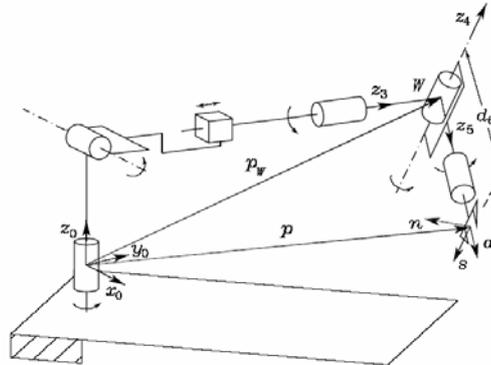
In queste configurazioni, le due colonne dello Jacobiano non sono indipendenti.

Disaccoppiamento di singolarità



Consideriamo un manipolatore con polso sferico:

Si può articolare la ricerca delle singolarità in due sottoproblemi:



1. Calcolo delle singolarità della **struttura portante**
2. Calcolo delle singolarità del **polso**

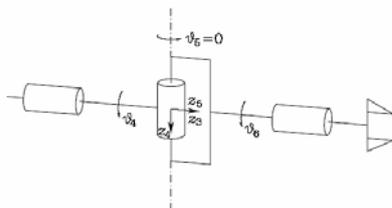
$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \det(\mathbf{J}_{11}) = 0 & \text{singolarità di struttura portante} \\ \det(\mathbf{J}_{22}) = 0 & \text{singolarità di polso} \end{cases}$$

Singolarità di polso



$$\mathbf{J}_{22} = [z_3 \quad z_4 \quad z_5]$$

Lo Jacobiano è singolare se z_3 è parallelo a z_5 ($\vartheta_5=0, \vartheta_5=\pi$):



Rotazioni uguali e opposte di ϑ_4 e ϑ_6 non producono alcuna rotazione dell'organo terminale. Inoltre il polso non è in grado di effettuare rotazioni attorno all'asse ortogonale a z_3 e z_4 .

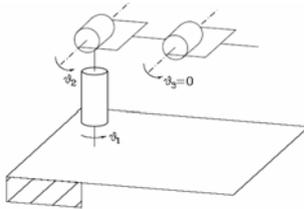
È una singolarità difficile da individuare in una pianificazione del moto nello spazio operativo.

Singularità di struttura portante

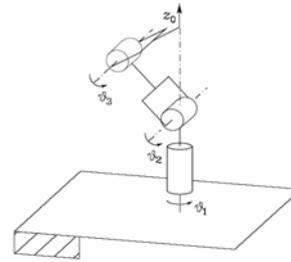


In un manipolatore antropomorfo:

Singularità di gomito



Singularità di spalla



Sono singularità che si caratterizzano facilmente nello spazio operativo.

Inversione della cinematica differenziale



L'equazione cinematica differenziale è **lineare** per un dato valore di q :

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Data la velocità \mathbf{v} nello spazio operativo e una condizione iniziale su \mathbf{q} possiamo allora pensare di risolvere il problema della cinematica inversa invertendo la cinematica differenziale ed integrando. Se lo Jacobiano è quadrato ($n = r$, numero di coordinate dello spazio operativo necessarie per descrivere il compito):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{q}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma + \mathbf{q}(0)$$

Utilizzando direttamente questa formula si incorre in **derive** della soluzione.

Si introduce allora l'errore, nello spazio operativo, commesso dall'algorithmo di inversione cinematica:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$$

Inversa dello Jacobiano



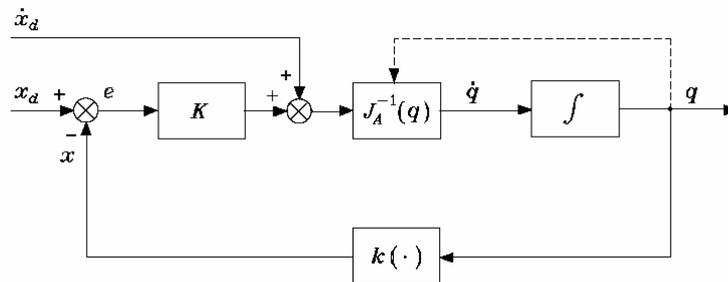
Se adottiamo la seguente legge di dipendenza di \dot{q} da e :

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke)$$

otteniamo:

$$\dot{e} + Ke = 0$$

e lo schema:



Controllo del moto e robotica industriale - Richiami di cinematica - P. Rocco [35]

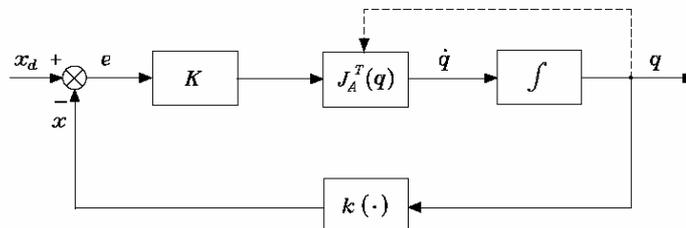
Trasposta dello Jacobiano



Se adottiamo la seguente legge di dipendenza (più semplice):

$$\dot{q} = J_A^T(q)Ke$$

otteniamo lo schema:



Controllo del moto e robotica industriale - Richiami di cinematica - P. Rocco [36]