



# **Controllo del moto e robotica industriale**

## **Richiami di cinematica**

**Prof. Paolo Rocco ([paolo.rocco@polimi.it](mailto:paolo.rocco@polimi.it))**

**Nota:**

**I disegni riportati in queste slide sono tratti dal testo:**

**L.Sciavicco, B.Siciliano**

**Robotica industriale –**

**Modellistica e controllo di robot manipolatori**

**(2a ed.) Mc Graw-Hill, 2000**

# Il sistema meccanico

Come è noto il manipolatore è costituito da una serie di corpi rigidi (*link*) connessi da *giunti*.

Un'estremità della catena è costituita dalla **BASE**, di norma fissata terra.

All'altra estremità è presente l'**END EFFECTOR** (pinza, strumento di lavoro).

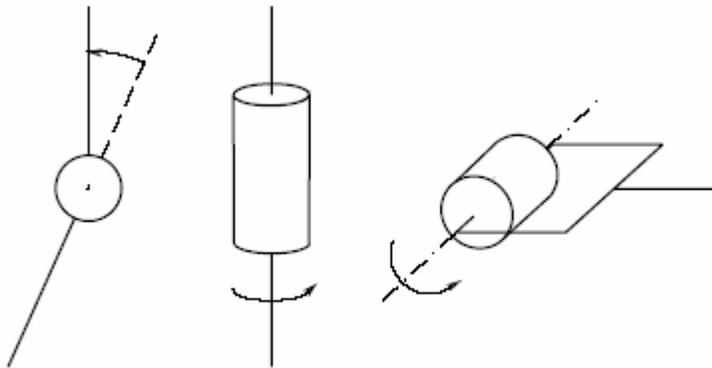
Nel manipolatore si individua una struttura portante che garantisce il posizionamento ed un **POLSO** che conferisce destrezza, dando i gradi di libertà di orientamento all'organo terminale.



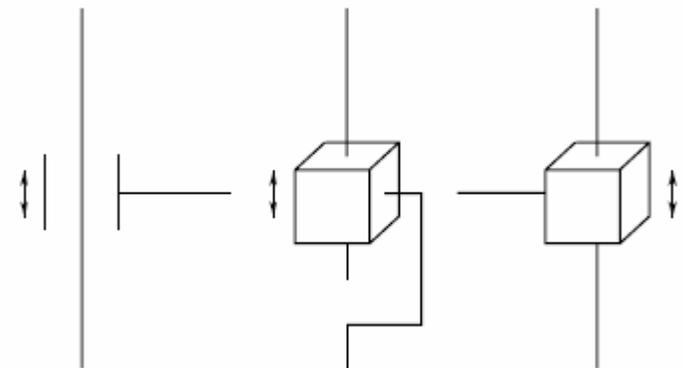
# I giunti

Ciascun giunto consente uno (e uno solo) *grado di mobilità* tra due bracci.  
Chiamiamo variabile di giunto la coordinata associata a questo grado di mobilità.

Schematizzazione dei giunti:



GIUNTI ROTOIDALI



GIUNTI PRISMATICI

# Terna base e terna utensile

Definiamo una terna di base ed una terna solidale con l'utensile.

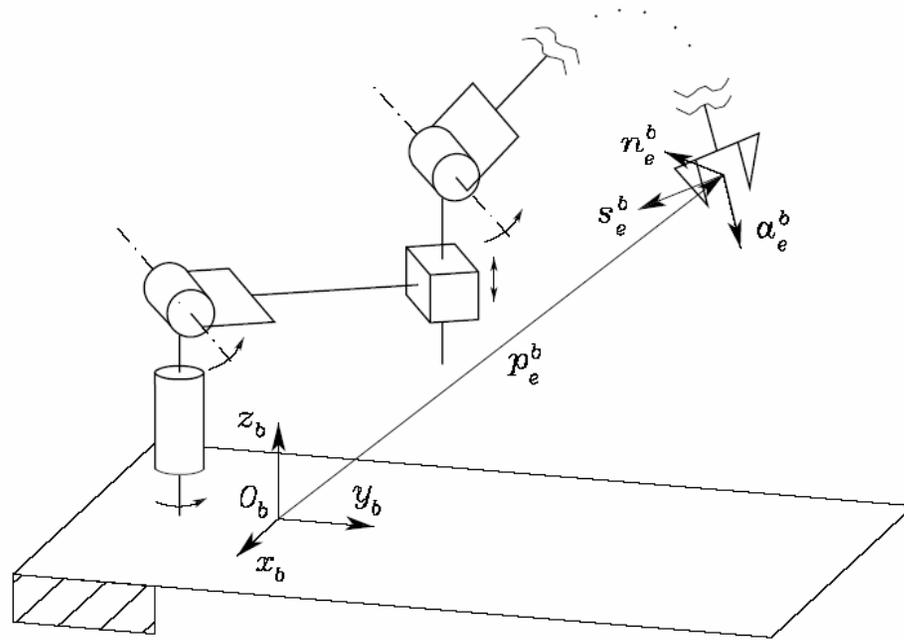
La terna utensile è definita per mezzo di 3 versori:

$\mathbf{a}_e$  (avvicino): direzione di avvicinamento al pezzo;

$\mathbf{s}_e$  (scivolamento): ortogonale ad  $\mathbf{a}_e$  nel piano di scorrimento della presa;

$\mathbf{n}_e$  (normale): ortogonale agli altri due.

$\mathbf{p}_e$  punta all'origine della terna utensile (punto centrale dell'organo di presa).



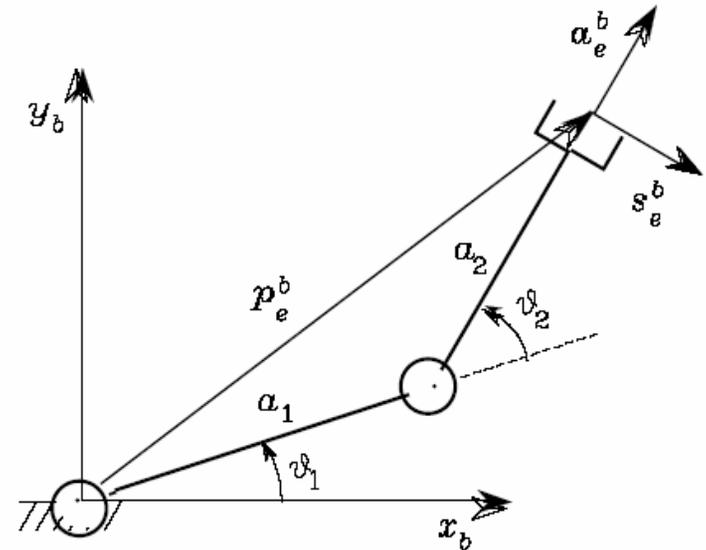
# Cinematica diretta

L'equazione cinematica diretta determina posizione ed orientamento della terna utensile rispetto alla terna base, in funzione delle variabili di giunto.

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{matrice di trasformazione omogenea})$$

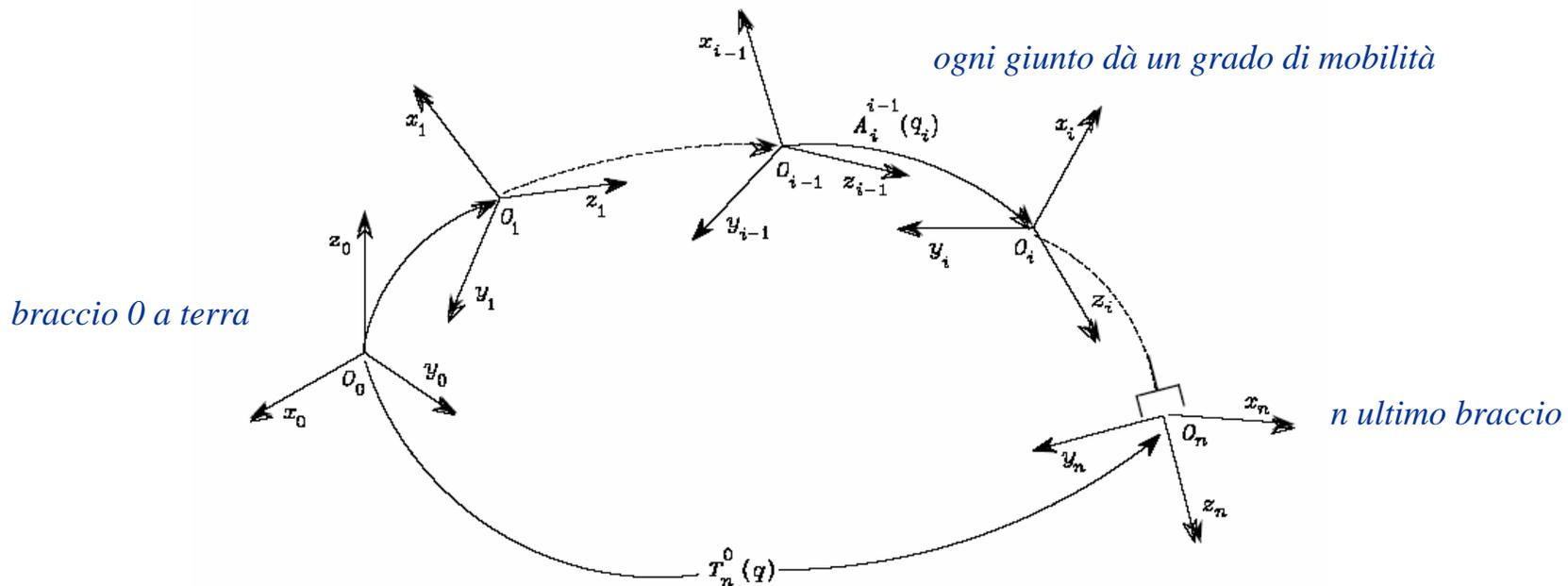
Esempio: manipolatore planare a due bracci

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Cinematica diretta

Per procedere in modo sistematico nella determinazione della cinematica diretta, occorre definire una terna solidale con ciascun braccio:



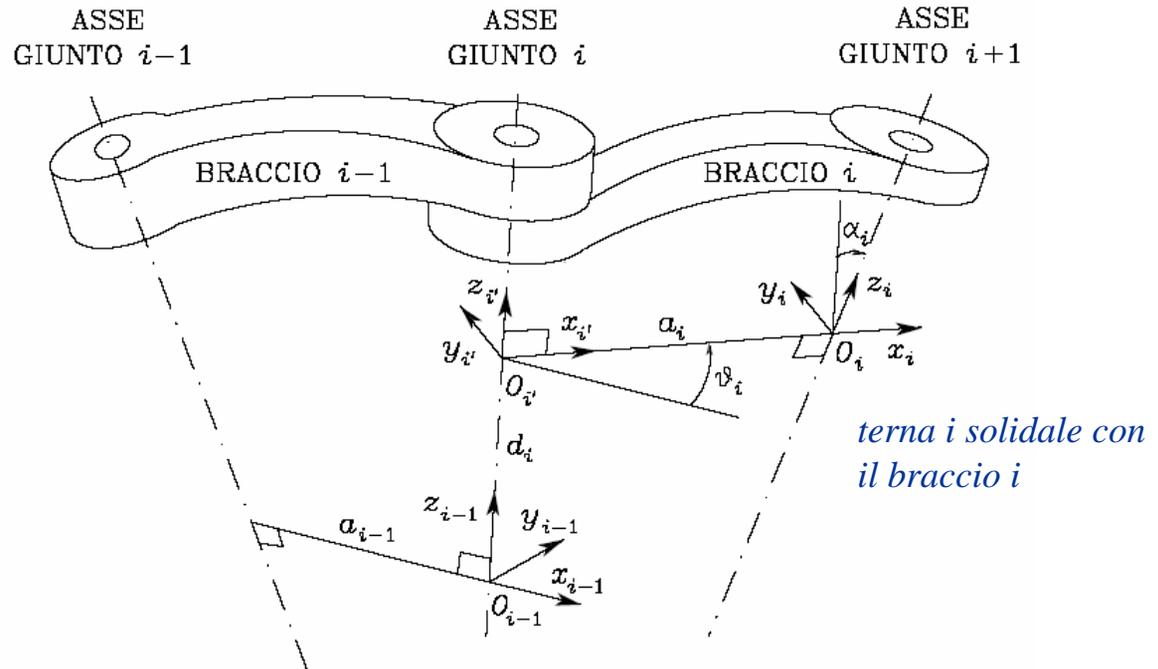
Procedendo iterativamente:

$$T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0(q_1)A_2^1(q_2)\dots A_n^{n-1}(q_n) \quad T_e^b(\mathbf{q}) = T_0^b T_n^0(\mathbf{q}) T_e^n$$

# Convenzione di Denavit-Hartenberg



È una convenzione per la scelta delle terne solidali ai bracci:



- $z_i$  giace lungo l'asse del giunto  $i+1$
- $O_i$  è all'intersezione dell'asse  $z_i$  con la normale comune agli assi  $z_i$  e  $z_{i-1}$ ; si indica con  $O_i'$  l'intersezione della normale comune con  $z_{i-1}$
- $x_i$  è diretto lungo la normale comune agli assi  $z_i$  e  $z_{i-1}$ , con verso positivo dal giunto  $i$  al giunto  $i+1$
- $y_i$  completa una terna destra

# Definizione non univoca della terna

---



Vi sono alcuni casi in cui la terna non è univocamente definita:

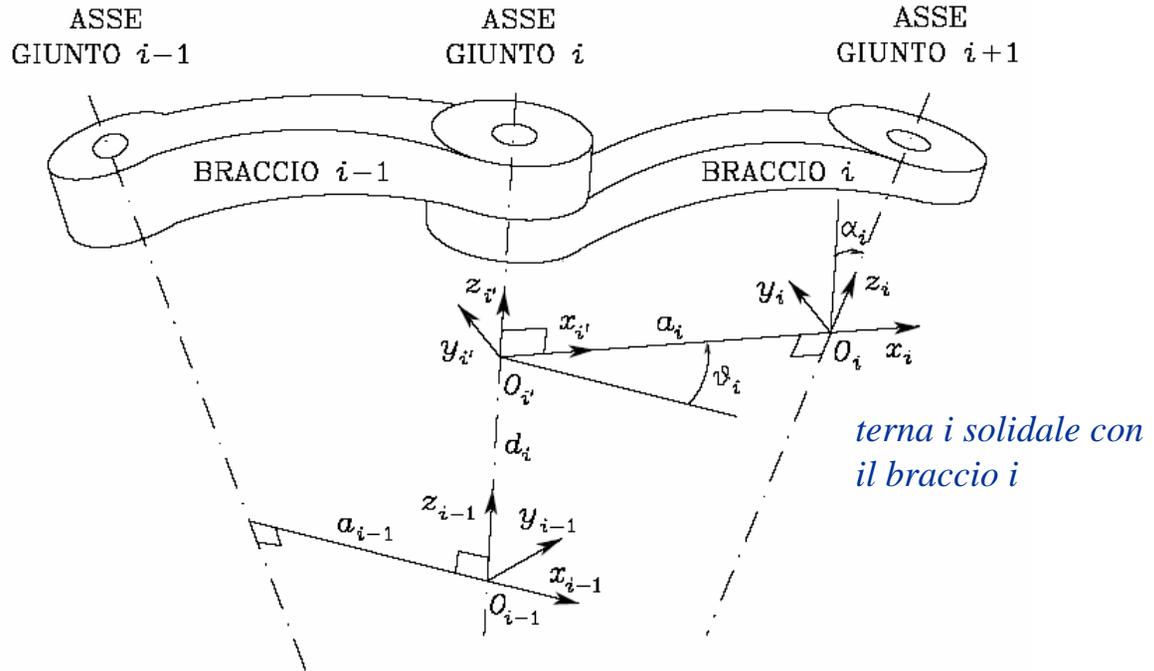
- Nella terna 0 solo la direzione di  $z_0$  è specificata: si possono scegliere arbitrariamente origine ed asse  $x_0$
- Nella terna  $n$  è specificato solo l'asse  $x_n$  che deve essere normale a  $z_{n-1}$
- Quando due assi consecutivi sono paralleli non è univocamente definita la normale comune
- Quando due assi consecutivi si intersecano, non è definito il verso di  $x_i$
- Quando il giunto  $i$  è prismatico solo la direzione di  $z_{i-1}$  è determinata

L'indeterminazione può essere usata per semplificare la procedura.

# Parametri di Denavit-Hartenberg



Per definire una terna rispetto alla precedente sono sufficienti 4 parametri:



- $a_i$  distanza di  $O_i$  da  $O_i'$
- $d_i$  coordinata su  $z_{i-1}$  di  $O_i$
- $\alpha_i$  angolo intorno all'asse  $x_i$  tra l'asse  $z_{i-1}$  e l'asse  $z_i$  valutato positivo in senso antiorario
- $\vartheta_i$  angolo intorno all'asse  $z_{i-1}$  tra l'asse  $x_{i-1}$  e l'asse  $x_i$  valutato positivo in senso antiorario

$a_i$  e  $\alpha_i$  sono sempre costanti  
 $\vartheta_i$  o  $d_i$  è variabile

# Matrice di trasformazione omogenea



Costruzione della matrice di trasformazione dalla terna  $i-1$  alla terna  $i$ :

I) Per sovrapporre la terna  $i-1$  alla terna  $i'$  si trasla la terna lungo l'asse  $z_{i-1}$  di una lunghezza  $d_i$  ruotandola di un angolo  $\vartheta_i$  intorno a  $z_{i-1}$ :

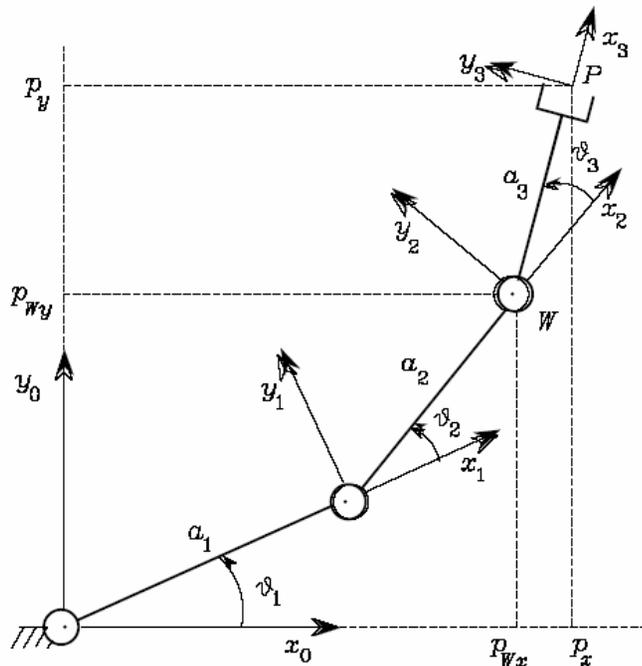
$$A_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II) Per sovrapporre la terna  $i'$  alla terna  $i$  si trasla la terna lungo l'asse  $x_i'$  per una lunghezza  $a_i$ , ruotandola di un angolo  $\alpha_i$  intorno a  $x_i'$ :

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_{i'}^{i-1} A_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Manipolatore planare a tre bracci

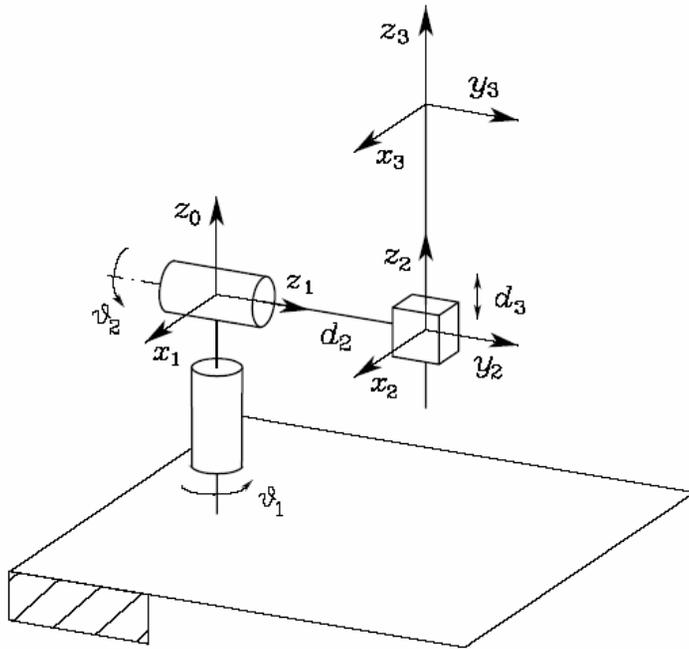


	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	$a_1$	0	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile non coincide con la terna 3

# Manipolatore sferico

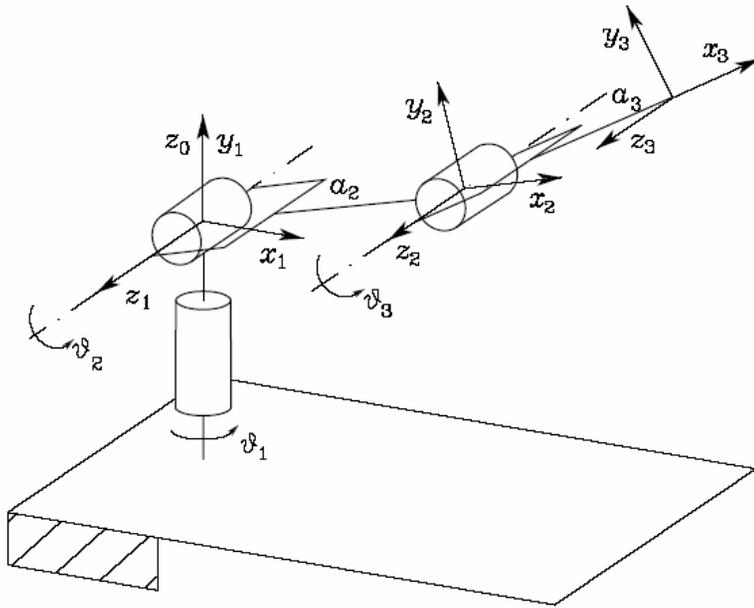


	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	0	$\pi/2$	$d_2$	$\vartheta_2$
3	0	0	$d_3$	0

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile coincide con la terna 3

# Manipolatore antropomorfo

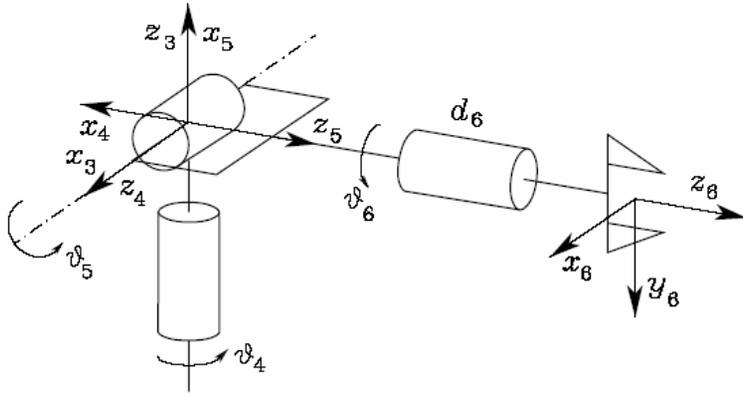


	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile non coincide con la terna 3

# Polso sferico



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
4	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

$\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$  sono gli angoli di Eulero ZYZ della terna 6 rispetto alla 3

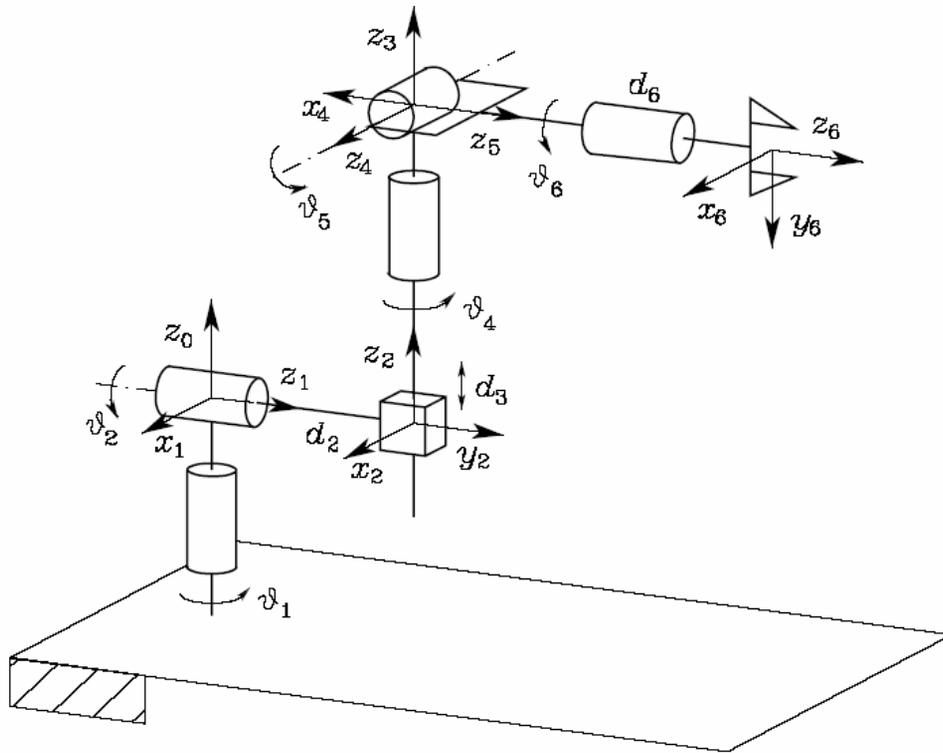
$$T_6^3 = A_4^3 A_5^4 A_6^5 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La terna utensile coincide con la terna 6

# Manipolatore di Stanford



Il manipolatore di Stanford è un manipolatore sferico con polso sferico



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	0	$\pi/2$	$d_2$	$\vartheta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	$-\pi/2$	0	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3$$

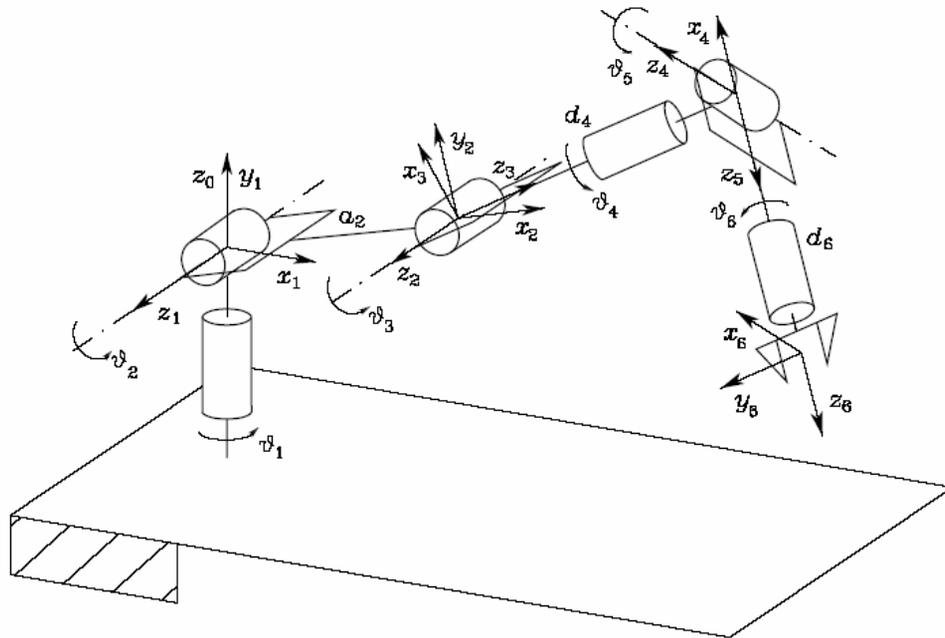
Già calcolata per il polso sferico

Già calcolata per il manipolatore sferico

# Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Montiamo un polso sferico sul manipolatore antropomorfo



	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\vartheta_i$
1	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_1$
2	$a_2$	0	0	$\vartheta_2$
3	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_3$
4	0	$-\pi/2$	$d_4$	$\vartheta_4$
5	0	$\pi/2$	0	$\vartheta_5$
6	0	0	$d_6$	$\vartheta_6$

La terna 3 del manipolatore antropomorfo non era orientata correttamente per il successivo polso sferico, per cui per calcolare la cinematica diretta occorre rifare i conti (non basta semplicemente moltiplicare le due matrici di trasformazione parziali)

# Spazio dei giunti e spazio operativo



Lo **spazio dei giunti** è definito dal vettore delle variabili di giunto:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} q_i = \vartheta_i \text{ (giunto rotoidale)} \\ q_i = d_i \text{ (giunto prismatico)} \end{array}$$

Lo **spazio operativo** è lo spazio in cui è specificata l'operazione che il manipolatore deve compiere. È definito dalla postura  $\mathbf{x}$  :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{p} \text{ (posizione)} \\ \phi \text{ (rappresentazione minima dell'orientamento)} \end{array}$$

$m$  componenti

Equazione cinematica diretta:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

# Problema cinematico inverso

---



$T \Rightarrow q$       Assegnati posizione ed orientamento della terna utensile,  
 $x \Rightarrow q$       trovare le corrispondenti variabili di giunto.

- Il problema può non ammettere soluzione (se posizione ed orientamento non appartengono allo spazio di lavoro destro)
- La soluzione analitica (in forma chiusa) può non esistere, nel qual caso si ricorre a tecniche numeriche
- Possono esserci soluzioni multiple
- Possono esserci infinite soluzioni

In generale la soluzione si ricava senza un procedimento sistematico, ma sulla base di intuizione nella manipolazione delle equazioni.

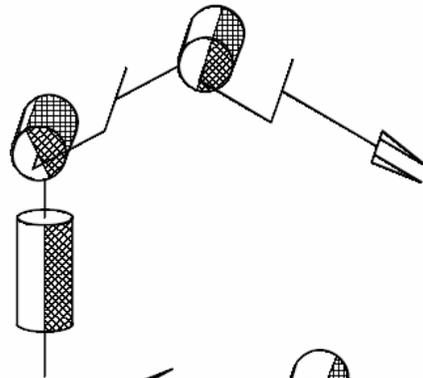


# Manipolatore antropomorfo

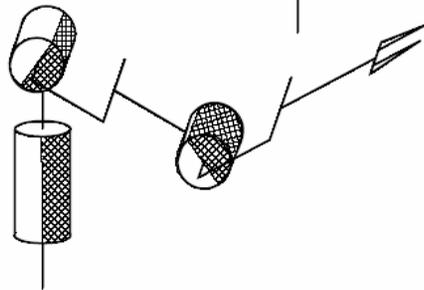
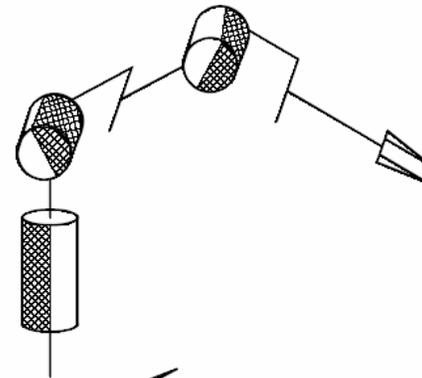


Esistono quattro configurazioni ammissibili:

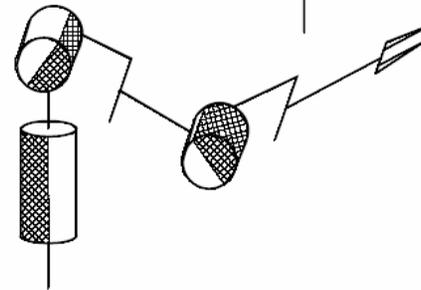
spalla destra,  
gomito alto



spalla sinistra,  
gomito alto

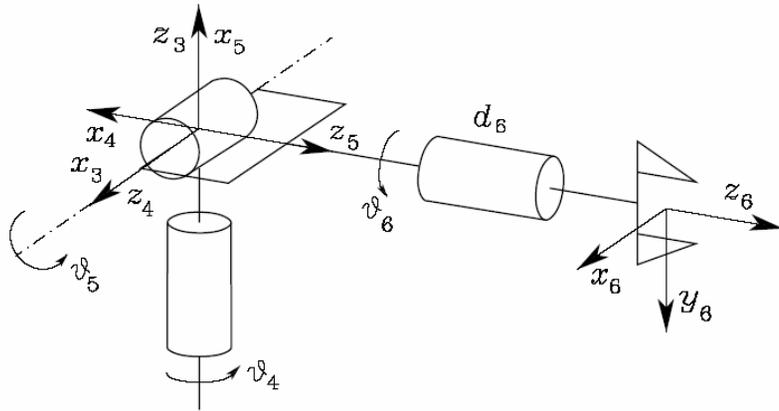


spalla destra,  
gomito basso



spalla sinistra,  
gomito basso

# Polso sferico



Il dato del problema è la matrice:

$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix}$$

Per la soluzione, si utilizzano le formule note per gli angoli di Eulero ZYZ:

$$\vartheta_4 = \text{Atan } 2(a_y^3, a_x^3)$$

$$\vartheta_5 \in (0, \pi): \quad \vartheta_5 = \text{Atan } 2\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right)$$

$$\vartheta_6 = \text{Atan } 2(s_z^3, -n_z^3)$$

$$\vartheta_4 = \text{Atan } 2(-a_y^3, -a_x^3)$$

$$\vartheta_5 \in (-\pi, 0): \quad \vartheta_5 = \text{Atan } 2\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right)$$

$$\vartheta_6 = \text{Atan } 2(-s_z^3, n_z^3)$$

# Jacobiano geometrico



Analizziamo ora il moto della terna utensile (solidale con l'organo terminale) per un manipolatore robotico .

Possiamo definire la velocità lineare e la velocità angolare di tale terna:  $\dot{\mathbf{p}}$  e  $\boldsymbol{\omega}$ .

Obiettivo della **cinematica differenziale** è di esprimere queste velocità in funzione delle velocità delle variabili di giunto.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

In forma compatta possiamo scrivere:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

La matrice ( $6 \times n$ ):

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

Prende il nome di **Jacobiano geometrico** del manipolatore.

# Calcolo dello Jacobiano



Partizioniamo lo Jacobiano in  $n$  colonne, ciascuna delle quali, a sua volta, partizionata in due:

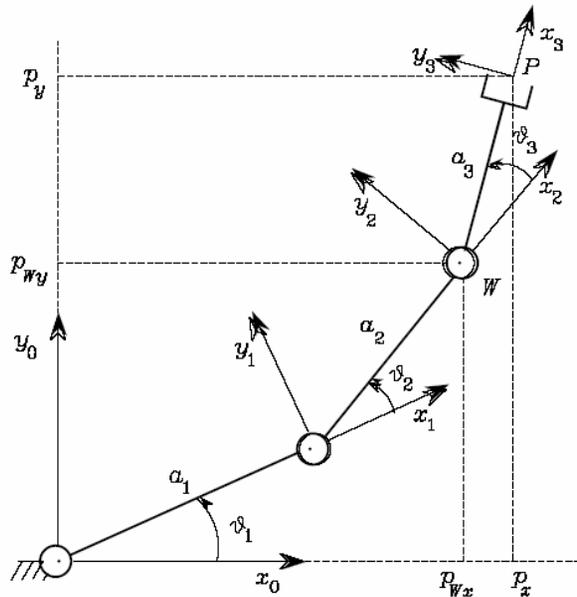
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{P1} & & \mathbf{j}_{Pn} \\ & \dots & \\ \mathbf{j}_{O1} & & \mathbf{j}_{On} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \dot{q}_i \mathbf{j}_{Pi}: \text{ contributo del giunto } i \text{ alla velocità lineare} \\ \dot{q}_i \mathbf{j}_{Oi}: \text{ contributo del giunto } i \text{ alla velocità angolare} \end{array}$$

Risulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{Pi} \\ \mathbf{j}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{giunto prismatico} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{giunto rotoidale} \end{cases}$$

Gli elementi per il calcolo di queste colonne si ricavano da relazioni cinematiche dirette.

# Manipolatore planare a tre bracci



$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

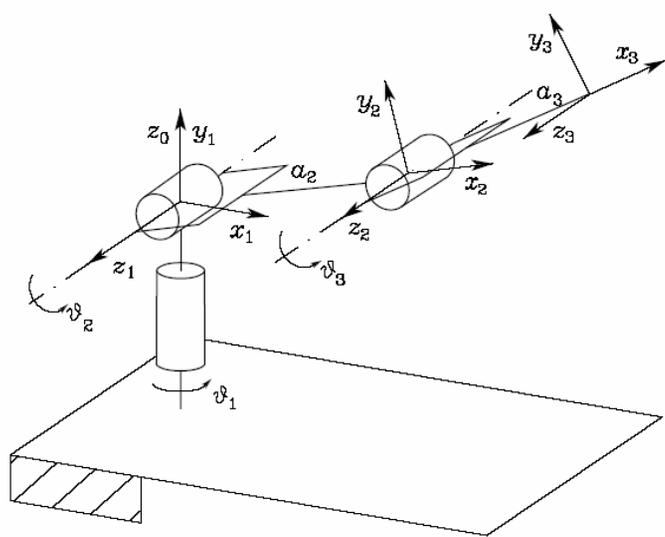
$$p = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad z_0 = z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

N.B.:

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

# Manipolatore antropomorfo



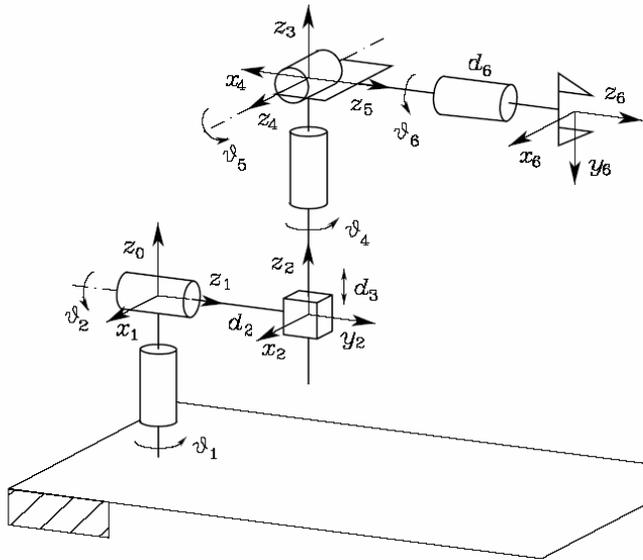
$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix} \quad z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & a_2 c_2 + a_3 c_{23} & a_3 c_{23} \\ \hline 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Manipolatore di Stanford



$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & \mathbf{0} \\ z_3 \times (p - p_3) & z_4 \times (p - p_4) & z_5 \times (p - p_5) \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_3 = p_4 = p_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2) \\ c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5) \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_2 = z_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad z_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix} \quad z_5 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5 \\ c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2 \\ c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5 \end{bmatrix}$$



# Jacobiano analitico

Consideriamo l'equazione cinematica diretta di un manipolatore:

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{q}) \\ \phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

dove  $\phi$  costituisce una rappresentazione minima dell'orientamento. Derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

D'altra parte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\partial \mathbf{p}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ (\partial \phi(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

La matrice: 
$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

Prende il nome di **Jacobiano analitico** del manipolatore.

# Jacobiano analitico e Jacobiano geometrico

---



Il legame tra la velocità angolare  $\omega$  e la derivata del vettore  $\phi$  che esprime l'orientamento è il seguente:

$$\omega = T(\phi)\dot{\phi}$$

dove  $T$  è una matrice dipendente dalla rappresentazione utilizzata per l'orientamento.

Esprimiamo quindi la velocità (lineare ed angolare) della terna utensile in termini delle derivate di  $p$  e  $\phi$ :

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi) \end{bmatrix} \dot{x} = T_A(\phi)\dot{x} = T_A(\phi)J_A\dot{q}$$

Ne consegue:

$$J = T_A(\phi)J_A$$

# Singularità cinematiche

---



Riprendiamo la relazione che definisce lo Jacobiano geometrico:

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

I valori di  $\mathbf{q}$  per cui la matrice  $\mathbf{J}$  diminuisce di rango prendono il nome di **singularità cinematiche**. In presenza di singularità cinematiche si ha:

1. Perdita di mobilità (non è possibile imporre leggi di moto arbitrarie)
2. Possibilità di infinite soluzioni al problema cinematico inverso
3. Velocità elevate nello spazio dei giunti (nell'intorno di singularità)

Le singularità possono essere:

1. **Ai confini** dello spazio di lavoro raggiungibile
2. **All'interno** dello spazio di lavoro raggiungibile

Queste ultime sono più problematiche, perché ci si può incorrere con traiettorie pianificate nello spazio operativo.

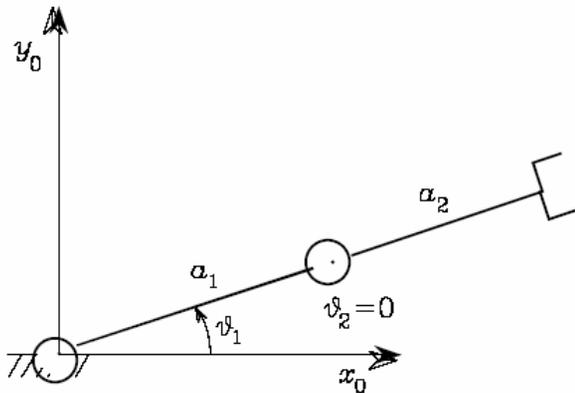
# Singularità cinematiche: esempio

Consideriamo un manipolatore planare a due bracci:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Determiniamone le singularità:

$$\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_2 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$



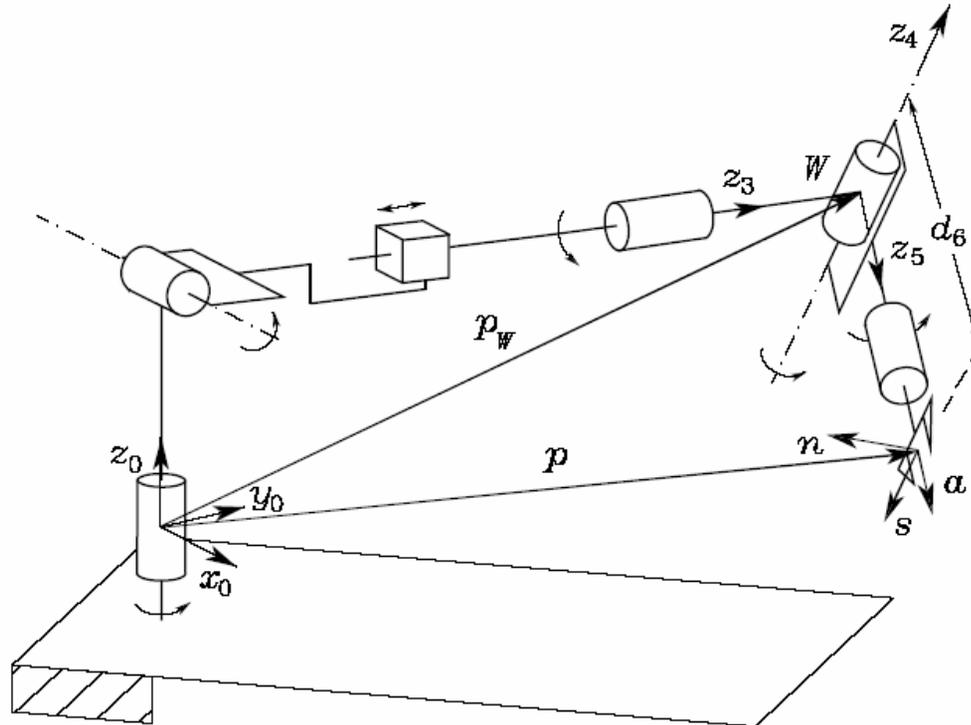
Si tratta di singularità ai confini dello spazio di lavoro.

In queste configurazioni, le due colonne dello Jacobiano non sono indipendenti.

# Disaccoppiamento di singolarità

Consideriamo un  
manipolatore con polso  
sferico:

Si può articolare la ricerca  
delle singolarità in due  
sottoproblemi:



1. Calcolo delle singolarità della **struttura portante**
2. Calcolo delle singolarità del **polso**

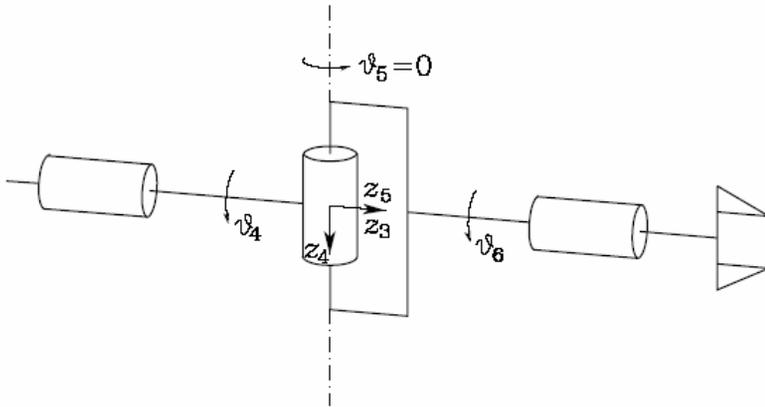
$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \det(\mathbf{J}_{11}) = 0 & \text{singolarità di struttura portante} \\ \det(\mathbf{J}_{22}) = 0 & \text{singolarità di polso} \end{cases}$$

# Singularità di polso



$$J_{22} = [z_3 \quad z_4 \quad z_5]$$

Lo Jacobiano è singolare se  $z_3$  è parallelo a  $z_5$  ( $\vartheta_5=0, \vartheta_5=\pi$ ):



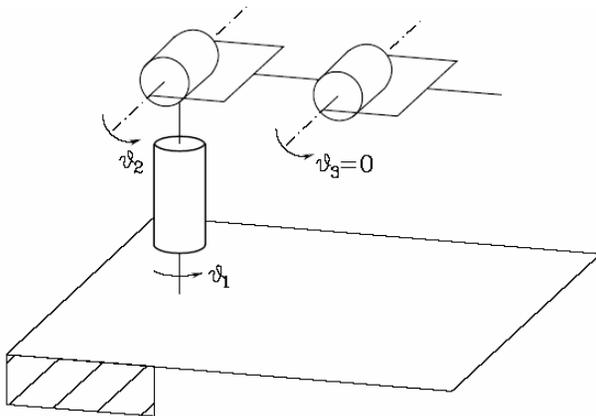
Rotazioni uguali e opposte di  $\vartheta_4$  e  $\vartheta_6$  non producono alcuna rotazione dell'organo terminale. Inoltre il polso non è in grado di effettuare rotazioni attorno all'asse ortogonale a  $z_3$  e  $z_4$ .

È una singolarità difficile da individuare in una pianificazione del moto nello spazio operativo.

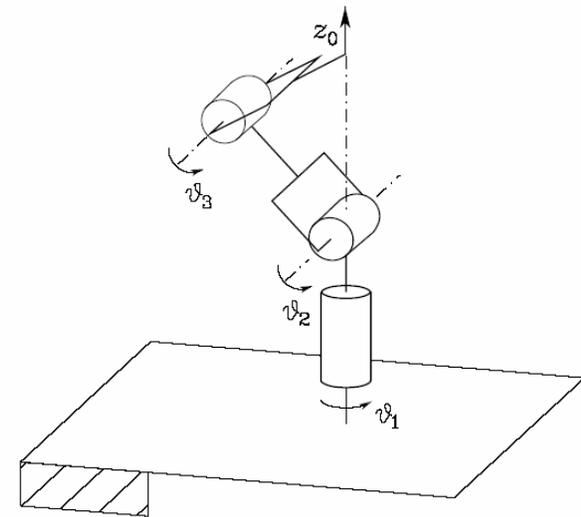
# Singularità di struttura portante

In un manipolatore antropomorfo:

## Singularità di gomito



## Singularità di spalla



Sono singularità che si caratterizzano facilmente nello spazio operativo.

# Inversione della cinematica differenziale



L'equazione cinematica differenziale è **lineare** per un dato valore di  $q$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Data la velocità  $\mathbf{v}$  nello spazio operativo e una condizione iniziale su  $\mathbf{q}$  possiamo allora pensare di risolvere il problema della cinematica inversa invertendo la cinematica differenziale ed integrando. Se lo Jacobiano è quadrato ( $n = r$ , numero di coordinate dello spazio operativo necessarie per descrivere il compito):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma + \mathbf{q}(0)$$

Utilizzando direttamente questa formula si incorre in **derive** della soluzione.

Si introduce allora l'errore, nello spazio operativo, commesso dall'algoritmo di inversione cinematica:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$$



# Inversa dello Jacobiano

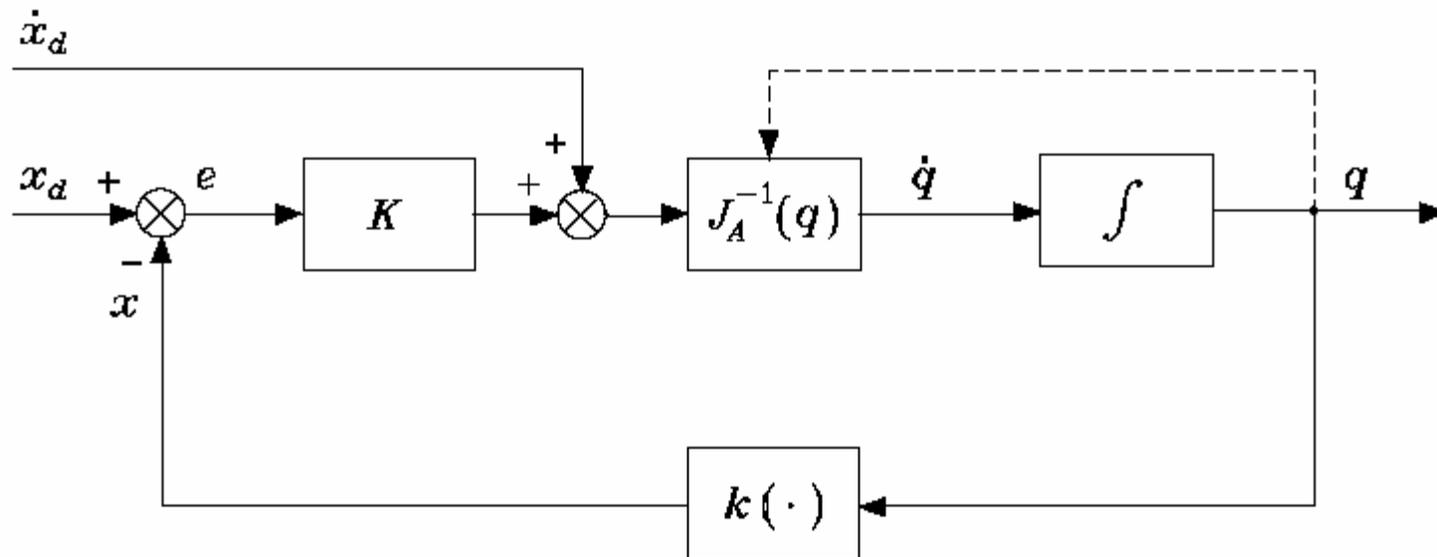
Se adottiamo la seguente legge di dipendenza di  $\dot{q}$  da  $e$ :

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke)$$

otteniamo:

$$\dot{e} + Ke = 0$$

e lo schema:





# Trasposta dello Jacobiano

Se adottiamo la seguente legge di dipendenza (più semplice):

$$\dot{q} = J_A^T(q)Ke$$

otteniamo lo schema:

