Controlli automatici

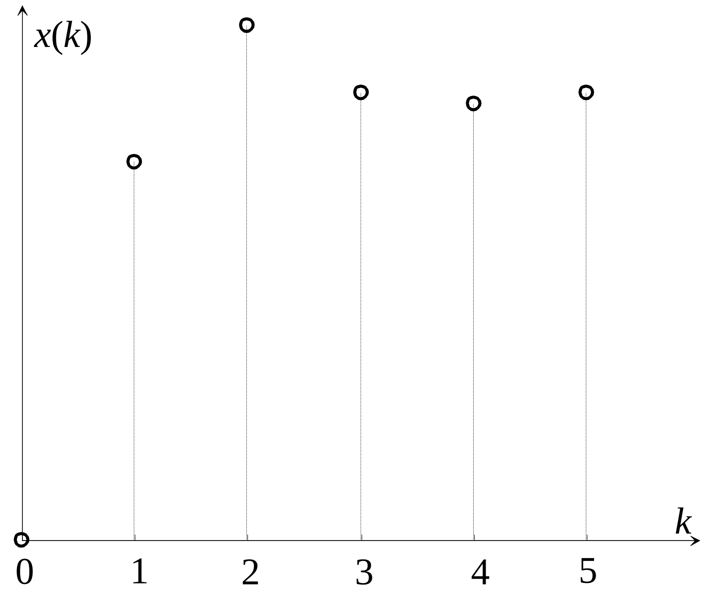
Sistemi a tempo discreto

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

Introduzione

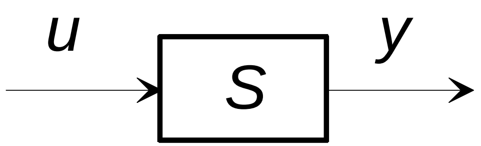
Un sistema dinamico a tempo discreto è caratterizzato dal fatto che tutte le variabili del sistema sono funzioni di una variabile temporale *k* che assume solo valori interi.



Le motivazioni dello studio dei sistemi a tempo discreto sono duplici:

- migliore comprensione di alcuni aspetti del controllo digitale (eseguito al calcolatore)
- studio di sistemi (economici, ecologici, sociologici, ecc.) che si lasciano naturalmente descrivere come sistemi a tempo discreto

Sistema dinamico a tempo discreto



variabili di ingresso

variabili di uscita

Il sistema dinamico a tempo discreto è caratterizzato da un certo numero (*m*) di ingressi e un certo numero (*p*) di uscite.

Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite del sistema, noti gli andamenti degli ingressi a partire dall'istante iniziale, prende il nome di ordine del sistema: lo si indica con *n*.
Il sistema si lascia descrivere per mezzo di *n* equazioni alle differenze, cui si aggiungono *p* equazioni algebriche per determinare le uscite.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

Si usano le stesse classificazioni viste per i sistemi a tempo continuo: sistemi SISO e MIMO, strettamente propri e no, lineari e non lineari, tempo invarianti e varianti.

Movimento ed equilibrio

Assegnata una condizione iniziale all'istante k_0 ed un ingresso a partire da k_0, definiamo movimento dello stato la soluzione delle equazioni di stato corredate dalla condizione iniziale assegnata e movimento dell'uscita la conseguente uscita, ricavabile dalla trasformazione d'uscita.

L'equilibrio è un particolare movimento costante nel tempo a seguito di un ingresso costante nel tempo.

Per determinare gli stati di equilibrio corrispondenti a un ingresso $\bar{\boldsymbol{u}}$ si impone che:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) = \bar{\boldsymbol{x}}$$

Pertanto gli stati di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione implicita:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}})$$

Si danno le stesse definizioni, viste a tempo continuo, di movimento stabile, instabile, asintoticamente stabile.

Esempio: algoritmo numerico

Si supponga di dover risolvere numericamente l'equazione scalare

$$z = f(z)$$

con *f* generica funzione non lineare. Un metodo per risolvere l'equazione può consistere nel partire da una certa soluzione iniziale di tentativo x_0 ed iterare secondo la formula:

$$x(k+1) = f(x(k))$$
$$x(0) = x_0$$

Sistema dinamico non lineare tempo invariante: l'indice temporale *k* scandisce le successive iterazioni dell'algoritmo

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

Gli equilibri del sistema sono le soluzioni dell'equazione data

Se $f(z) = -z^3$ $\Rightarrow$ $x(k+1) = -x(k)^3$

Partendo da $x(0) = 1/2$ $\Rightarrow$

$$x(1) = -(1/2)^3 = -1/8$$
$$x(2) = -(-1/8)^3 = 1/512$$
$$x(3) = -(1/512)^3 = -1/134217728$$

Esempio: sistema economico

Consideriamo un sistema economico in cui definiamo le variabili:

- $y(k)$: reddito nazionale nell'anno k
- $c(k)$: consumi nell'anno k
- $i(k)$: investimenti privati nell'anno k
- $u(k)$: spesa pubblica nell'anno k

Il sistema può essere descritto dalle equazioni:

$$y(k) = c(k) + i(k) + u(k)$$
$$c(k) = \alpha y(k-1)$$
$$i(k) = \beta(c(k) - c(k-1))$$

Rappresentiamo queste equazioni in termini di sistema dinamico, introducendo le variabili di stato:

$$x_1(k) = c(k)$$
$$x_2(k) = i(k)$$

Esempio: sistema economico

Traslando le ultime due equazioni di un passo in avanti, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= c(k+1) = \alpha y(k) = \alpha\left(c(k) + i(k) + u(k)\right) = \\
&= \alpha x_1(k) + \alpha x_2(k) + \alpha u(k) \\
x_2(k+1) &= i(k+1) = \beta\left(c(k+1) - c(k)\right) = \beta\left(\alpha\left(c(k) + i(k) + u(k)\right) - c(k)\right) = \\
&= \beta(\alpha - 1)x_1(k) + \beta\alpha x_2(k) + \beta\alpha u(k) \\
y(k) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k)
\end{aligned}
$$

Il sistema è SISO, lineare, tempo invariante, non strettamente proprio.

Sistemi LTI

Quando tutte le equazioni del sistema sono lineari nelle variabili di stato e di ingresso e non dipendono esplicitamente dal tempo, il sistema si definisce lineare tempo invariante (LTI) ed è descritto dalle equazioni:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k) \\
\boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)
\end{aligned}
$$

Calcoliamo iterativamente il movimento dello stato a partire da una condizione iniziale, assegnato un ingresso:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) \\
\boldsymbol{x}(2) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) \\
\boldsymbol{x}(3) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(2) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2) = \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Per induzione possiamo trovare la formula del movimento dello stato e quindi dell’uscita.

Moto libero e forzato

$$
x(k) = \boxed{A^k x_0} + \boxed{\sum_{i=0}^{k-1} \left[A^{k-i-1} B u(i) \right]}
$$

$$
y(k) = \boxed{C A^k x_0} + \boxed{\sum_{i=0}^{k-1} \left[C A^{k-i-1} B u(i) \right] + D u(k)}
$$

Moto libero   Moto forzato

Poiché il moto libero è lineare nello stato iniziale e il moto forzato è lineare nell'ingresso vale il principio di sovrapposizione degli effetti.

Equilibri nei sistemi LTI

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

Gli equilibri in un sistema LTI si individuano con l'equazione:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}}$$

Se la matrice ***I***–***A*** è invertibile, ossia se ***A*** non ha autovalori in s=1, esiste un solo stato di equilibrio, dato dall'espressione:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}}$$

Inoltre risulta:

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \mu\bar{\boldsymbol{u}}$$

con:

$$\mu = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$ guadagno statico del sistema

Altre proprietà dei sistemi LTI

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{Cx}(k) + \boldsymbol{Du}(k)$$

- Cambiamento di variabili di stato: valgono le stesse formule dei sistemi a tempo continuo

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k) = \boldsymbol{Tx}(k), \quad \det(\boldsymbol{T}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(k) & \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{TAT}^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{TB}, \\ \boldsymbol{y}(k) = \hat{\boldsymbol{C}}\hat{\boldsymbol{x}}(k) + \hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{u}(k) & \hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{CT}^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D} \end{array}$$

- Raggiungibilità: definizione e test sono gli stessi dei sistemi a tempo continuo

$$\boldsymbol{K}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Sistema completamente raggiungibile se e solo se rank($\boldsymbol{K}_r$) = n

- Osservabilità: definizione e test sono gli stessi dei sistemi a tempo continuo

$$\boldsymbol{K}_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^T & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{C}^T & \cdots & {\boldsymbol{A}^T}^{n-1}\boldsymbol{C}^T \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

Sistema completamente osservabile se e solo se rank($\boldsymbol{K}_o$) = n

Stabilità nei sistemi LTI

Per i sistemi LTI a tempo discreto valgono considerazioni sulla stabilità del tutto analoghe a quelle fatte a tempo continuo:

- la stabilità è una proprietà del sistema (tutti i movimenti sono asintoticamente stabili, stabili o instabili).
- la stabilità si può valutare studiando i moti liberi del sistema

Introdotte le variabili $\delta\boldsymbol{x}$ (differenza tra movimento perturbato e movimento nominale):

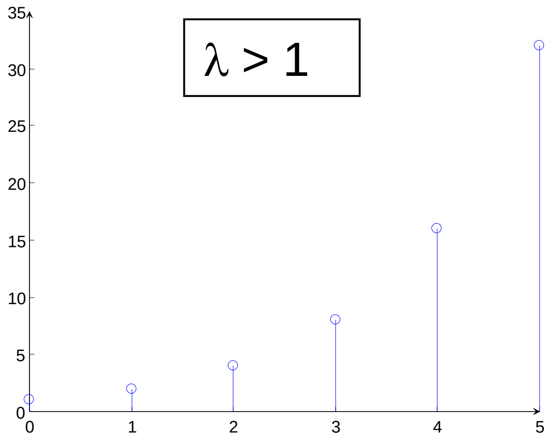
$$\delta\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}(k) \quad \Longrightarrow \quad \delta\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\delta\boldsymbol{x}(0)$$

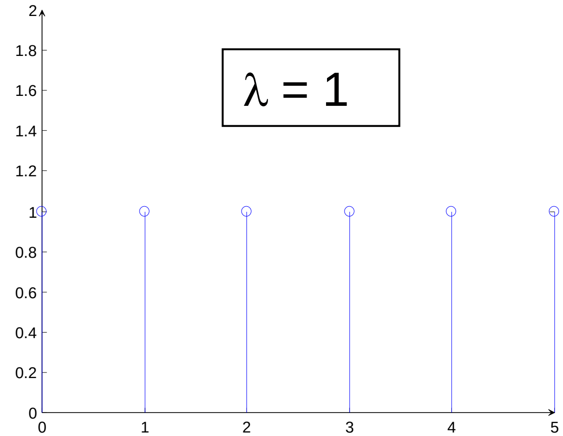
Se $\boldsymbol{A}$ è diagonalizzabile, cioè: $\exists \boldsymbol{T} : \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} = \hat{\boldsymbol{A}} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$

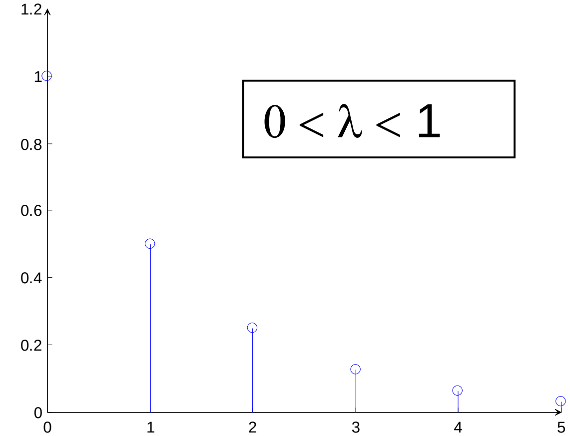
$$\delta\boldsymbol{x}(k) = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\right)^k \delta\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}^k\boldsymbol{T}\delta\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}\boldsymbol{T}\delta\boldsymbol{x}(0)$$

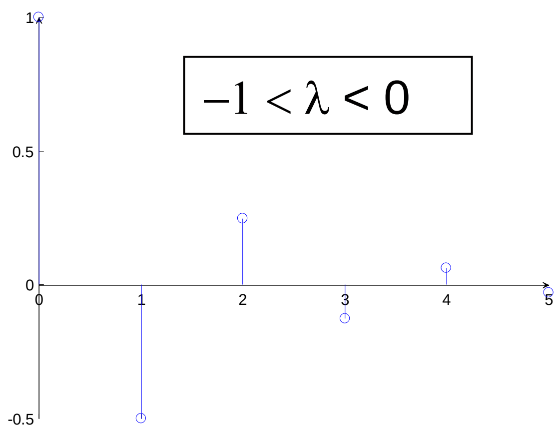
Modi

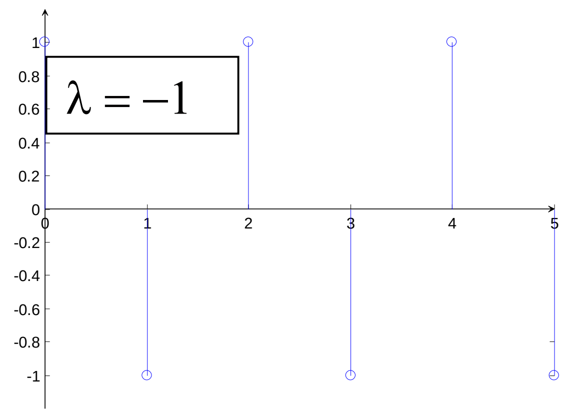
Le componenti del moto libero del sistema sono quindi combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori (modi). Di seguito sono riportati gli andamenti di λ^k al variare di λ reale:

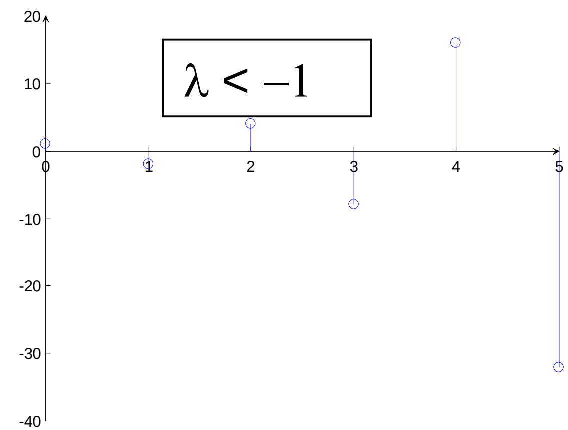












Criterio degli autovalori

Naturalmente, accanto ad un autovalore complesso $\lambda_i=\rho_i e^{j\vartheta i}$ ci sarà anche il coniugato e la combinazione dei due termini darà luogo ad un termine reale del tipo $\rho_i^k\cos(\vartheta_i k+\varphi_i)$.

Possiamo quindi osservare che:

- se tutti gli autovalori hanno modulo minore di 1, tutti i moti liberi sono limitati e decadono a zero
- se non ci sono autovalori a modulo maggiore di 1, ma ce ne sono a modulo unitario, nessun moto libero diverge, ma vi sono moti liberi che non decadono a zero
- se c'è almeno un autovalore a modulo maggiore di 1, almeno un moto libero non è limitato.

Criterio degli autovalori

Dall'analisi dei modi del sistema si possono trarre le seguenti conclusioni (valide per matrice ***A*** diagonalizzabile):

Un sistema dinamico LTI a tempo discreto è:

- asintoticamente stabile**:** se e solo se tutti gli autovalori di ***A*** hanno modulo minore di 1
- stabile**:** se e solo se tutti gli autovalori di ***A*** hanno modulo minore o uguale a 1 e ne esistono a modulo uguale a 1
- instabile**:** se e solo se esistono autovalori di ***A*** a modulo maggiore di 1

Regione di asintotica stabilità

tempo continuo
semipiano sinistro

tempo discreto
cerchio di centro l'origine
e raggio unitario

Criterio degli autovalori

Due osservazioni:

1) L'analisi della stabilità è del tutto indipendente dalla scelta delle variabili di stato: la proprietà di stabilità è una proprietà strutturale del sistema dinamico

2) Se la matrice A non è diagonalizzabile, l'enunciato precedentemente va precisato:

   se vi sono autovalori multipli a modulo unitario (e non vi sono autovalori a modulo maggiore di 1), il sistema è instabile se per almeno uno degli autovalori a modulo unitario la molteplicità geometrica (numero degli autovettori linearmente indipendenti associati all'autovalore) è inferiore alla molteplicità algebrica (molteplicità con cui l'autovalore è radice del polinomio caratteristico)

Esempio: sistema economico

Torniamo all'esempio economico, in cui:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \alpha \\ \beta(\alpha-1) & \beta\alpha\end{bmatrix}$$

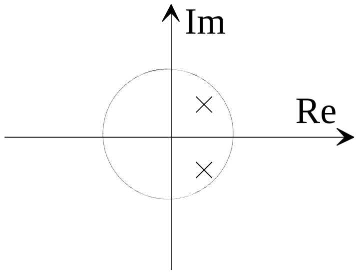
Posto α=0.5, β=1:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-0.5 & -0.5 \\ 0.5 & \lambda-0.5\end{vmatrix}=(\lambda-0.5)^2+0.25=\lambda^2-\lambda+0.5$$

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{2}=\frac{1\pm j}{2}$$



Gli autovalori hanno modulo minore di 1: il sistema è asintoticamente stabile

Stabilità: analisi del polinomio caratteristico

Anche per i sistemi a tempo discreto è possibile studiare la stabilità evitando il calcolo diretto degli autovalori, ma studiando i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$:

$$\varphi(z) = \det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \varphi_0 z^n + \varphi_1 z^{n-1} + \varphi_2 z^{n-2} + \cdots + \varphi_n$$

Si può procedere in due modi:

- introdurre un criterio (criterio di Jury) che fornisce direttamente le condizioni per cui il polinomio ha tutte le radici a modulo minore di 1
- ricondursi con un cambiamento di variabili a un polinomio che ha radici a parte reale negativa se e solo se il polinomio originario le ha a modulo minore di 1, e quindi usare il criterio di Routh

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$ trasformazione bilineare

Trasformazione bilineare: esempio

Consideriamo il polinomio:

$$\varphi(z) = 8z^3 - 12z^2 + 6z - 1$$

Applicando la trasformazione bilineare ed uguagliando a zero si ottiene:

$$8\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 - 12\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + 6\left(\frac{1+s}{1-s}\right) - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$8(1+s)^3 - 12(1+s)^2(1-s) + 6(1+s)(1-s)^2 - (1-s)^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$27s^3 + 27s^2 + 9s + 1 = 0$$

Tabella di Routh:

27	9	0
27	1	0
8	0	
1		

$\Rightarrow$ polinomio in s ha tutte le radici a p.r. <0 $\Rightarrow$ polinomio in z ha tutte le radici a modulo < 1

Stabilità degli equilibri

Dato il sistema non lineare:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \qquad \mathbf{x} \in \Re^n \qquad \mathbf{u} \in \Re^m$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \qquad \mathbf{y} \in \Re^p$$

consideriamo l'equilibrio caratterizzato da:

$$\mathbf{u}(k) = \bar{\mathbf{u}},\ \mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}},\ \mathbf{y}(k) = \bar{\mathbf{y}} \qquad \forall k$$

Il comportamento del sistema nell'intorno dello stato di equilibrio è approssimabile con il sistema linearizzato:

$$\delta\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}(k) \qquad \delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}} \qquad \delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \bar{\mathbf{u}}$$

$$\delta\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\delta\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\delta\mathbf{u}(k) \qquad \delta\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(k) - \bar{\mathbf{y}}$$

dove:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}},\ \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}},\ \mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}},\ \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

Stabilità degli equilibri

Si consideri dunque la matrice $\boldsymbol{A}$ del sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio:

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}$$

Si dimostrano i seguenti risultati:

- Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha tutti autovalori a modulo minore di 1 (ossia se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile) lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile

- Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha almeno un autovalore a modulo maggiore di 1 lo stato di equilibrio è instabile

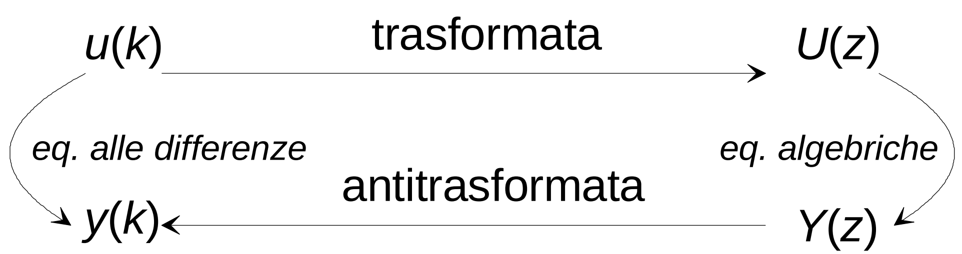
Se la matrice $\boldsymbol{A}$ ha autovalori a modulo uguale a 1 e non ne ha a modulo maggiore di 1, occorrono approssimazioni del sistema dinamico di ordine superiore rispetto al sistema linearizzato.

Approccio nel dominio delle trasformate

Si consideri nuovamente un sistema LTI:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

Analogamente a quanto fatto a tempo continuo, possiamo considerare una rappresentazione alternativa del sistema, ottenuta introducendo i vettori $\boldsymbol{U}(z)$ e $\boldsymbol{Y}(z)$, rispettivamente vettori delle trasformate degli ingressi e delle uscite del sistema dinamico:



Anche in questo caso il legame ingresso-uscita nel dominio delle trasformate è espresso da equazioni algebriche.

Per i sistemi a tempo discreto si usa la trasformata Zeta.

La trasformata Zeta

Si consideri una generica funzione reale $v(k)$, definita per k intero ≥ 0.
La funzione della variabile complessa z, definita dalla serie:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k}$$

si dice trasformata Zeta di v.

In generale la serie converge solo per valori di z esterni a un cerchio (ovvero nel *co-cerchio*) centrato nell'origine del piano complesso, cioè per $|z| > r > 0$.

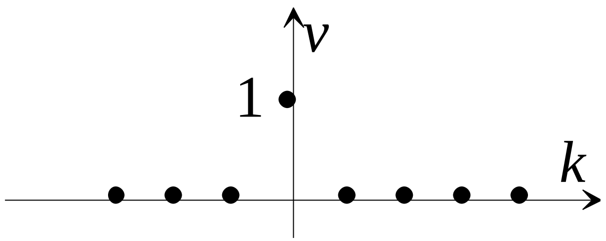
Tuttavia si assume come trasformata la funzione che, nel co-cerchio di convergenza della serie, coincide con la somma della serie stessa: in questo modo la trasformata è definita quasi ovunque nel piano complesso.

Esempi

Impulso

Consideriamo l'impulso unitario a tempo discreto (delta di Kronecker):

$$v(k) = \mathrm{imp}(k) = \delta_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$



risulta:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} = v(0) + v(1) z^{-1} + v(2) z^{-2} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

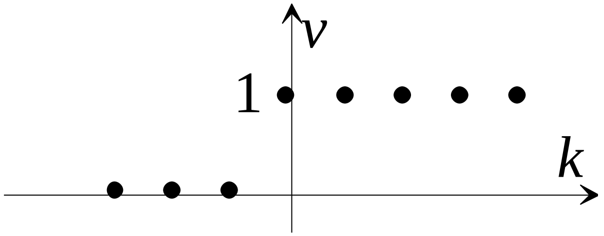
Esponenziale

Consideriamo l'esponenziale a tempo discreto $v(k) = a^k$. Risulta:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{per } \left|az^{-1}\right| < 1 \left(|z| > |a|\right)$$

Per a=1 si ha lo scalino a tempo discreto:

$$v(k) = \mathrm{sca}(k) \quad \Rightarrow \quad V(z) = \frac{z}{z-1}$$



Proprietà della trasformata

Linearità

$$v(k)=\alpha v_1(k)+\beta v_2(k) \quad \Rightarrow \quad V(z)=\alpha V_1(z)+\beta V_2(z)$$

Anticipi e ritardi

$$v_2(k)=v_1(k+1) \quad \Rightarrow \quad V_2(z)=z\left(V_1(z)-v_1(0)\right)$$

$$v_2(k)=v_1(k-1) \quad \Rightarrow \quad V_2(z)=z^{-1}V_1(z)$$

Derivazione in *z*

$$v_2(k)=kv_1(k) \quad \Rightarrow \quad V_2(z)=-z\frac{dV_1(z)}{dz}$$

Valore iniziale

$$v(0)=\lim_{z\to\infty}V(z)$$

Valore finale (applicabile se i poli di *V* sono a modulo < 1 o in *z*=1)

$$v(\infty)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)V(z)\right]$$

Esempi

Rampa

$$\mathrm{ram}(k) = k, \quad k \geq 0$$

Poiché ram(k) = $k$sca(k), si ha:

$$\mathcal{Z}[\mathrm{ram}(k)] = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[\mathrm{sca}(k)] = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Esponenziale

Consideriamo un segnale di trasformata: $V(z) = \dfrac{z}{z-a}$

Dai teoremi del valore iniziale e finale:

$$v(0) = \lim_{z\to\infty} V(z) = 1$$

Se $|a| < 1 \quad \Rightarrow \quad v(\infty) = \lim_{z\to 1}[(z-1)V(z)] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\dfrac{z}{z-a}\right] = 0$

Se $a = 1 \quad \Rightarrow \quad v(\infty) = \lim_{z\to 1}[(z-1)V(z)] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\dfrac{z}{z-1}\right] = 1$

coerente con il fatto che $v(k) = a^k$

Trasformate notevoli

Utilizzando le proprietà della trasformata, si può compilare la seguente tabella di trasformate notevoli:

$v(k)$	$V(z)$
$\mathrm{imp}(k)$	1
$\mathrm{sca}(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\mathrm{ram}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$\mathrm{par}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
ka^k	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$

dove par(k) = $k(k-1)/2$, $k \geq 0$

Antitrasformata

Per trasformate Zeta razionali (rapporti di polinomi), si può utilizzare per l'antitrasformata il metodo di Heaviside, ossia di scomposizione in frazioni semplici. Di fatto conviene scomporre $V(z)/z$, secondo il seguente schema (per poli semplici):

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z - p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{z - p_n}$$

$$V(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z - p_1} + \cdots + \alpha_n \frac{z}{z - p_n}$$

$$v(k) = \alpha_0 \,\mathrm{imp}(k) + \alpha_1 p_1^k + \cdots + \alpha_n p_n^k, \quad k \geq 0$$

In alternativa si può usare il metodo della lunga divisione, che consiste nel dividere il polinomio a numeratore e quello a denominatore, in modo da trovare i primi campioni dell'antitrasformata:

$$V(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v(0) &= \beta_0 \\ v(1) &= \beta_1 \\ v(2) &= \beta_2 \end{aligned}$$

Antitrasformata (esempio)

$$V(z)=\frac{3z+12}{z^2+5z+6}$$

Heaviside

$$\frac{V(z)}{z}=\frac{3z+12}{z(z+2)(z+3)}=\frac{\alpha_0}{z}+\frac{\alpha_1}{z+2}+\frac{\alpha_2}{z+3}=\frac{\alpha_0(z+2)(z+3)+\alpha_1 z(z+3)+\alpha_2 z(z+2)}{z(z+2)(z+3)}$$

Valutando il polinomio a numeratore in z=0, z=–2, z=–3, si ottiene:

$$\begin{cases}6\alpha_0=12\\-2\alpha_1=6\\3\alpha_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0=2\\\alpha_1=-3\\\alpha_2=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$V(z)=2-3\frac{z}{z+2}+\frac{z}{z+3}$$

$$\Downarrow$$

$$v(k)=2\mathrm{imp}(k)-3(-2)^k+(-3)^k$$

coerenti

Lunga divisione

$$\begin{array}{l|l}
3z+12 & z^2+5z+6\\
3z+15+18z^{-1} & 3z^{-1}-3z^{-2}-3z^{-3}\\
\hline
-3-18z^{-1} & \\
-3-15z^{-1}-18z^{-2} & \\
\hline
-3z^{-1}+18z^{-2} &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{l}
v(0)=0\\
v(1)=3\\
v(2)=-3\\
v(3)=-3
\end{array}$$

Funzione di trasferimento

Si consideri il sistema LTI:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}$$

Applichiamo la trasformata Zeta ad entrambi i membri delle equazioni, supponendo lo stato iniziale nullo ($\boldsymbol{x}(0)=0$):

$$\begin{aligned}z\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)\\ \boldsymbol{Y}(z) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(z)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\boldsymbol{X}(z) &= (z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z)\\ \boldsymbol{Y}(z) &= \left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{U}(z)\end{aligned}$$

Si è ottenuto:

$$\boldsymbol{Y}(z)=\boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{U}(z), \quad \boldsymbol{G}(z)=\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

La matrice a p righe e m colonne $\boldsymbol{G}(z)$ prende il nome di funzione di trasferimento del sistema e dà la trasformata dell'uscita forzata dall'ingresso.

Funzione di trasferimento: proprietà

La funzione di trasferimento a tempo discreto ha formalmente la stessa espressione di quella a tempo continuo.
Pertanto gode delle stesse proprietà:

- è invariante rispetto a cambiamenti di variabili di stato
- per sistemi SISO è il rapporto di due polinomi:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- le radici del polinomio a numeratore si chiamano zeri, le radici del polinomio a denominatore poli
- a meno di cancellazioni, i poli coincidono con gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$

Funzione di trasferimento: tipo

La definizione di tipo della funzione di trasferimento a tempo discreto è diversa da quella a tempo continuo. Esso infatti conta il numero di zeri o poli in $z = 1$. Precisamente:

- tipo $g \geq 1$: sono presenti g poli in $z = 1$
- tipo $g = 0$: non sono presenti né zeri, né poli in $z = 1$
- tipo $g \leq -1$: sono presenti $(-g)$ zeri in $z = 1$

Funzione di trasferimento: guadagno

Consideriamo una funzione di trasferimento priva di poli o zeri in z=1 (ovvero di tipo 0).
Definiamo guadagno della funzione di trasferimento il valore che assume per z=1:

$$\mu = G(1) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

Per g = 0, il guadagno della funzione di trasferimento coincide quindi con il guadagno statico del sistema, ossia con il rapporto uscita/ingresso all'equilibrio.

Per valori del tipo $g \neq 0$, la nozione di guadagno si generalizza:

$$\mu = \lim_{z \to 1}\left[(z-1)^g G(z)\right]$$

Funzione di trasferimento: guadagno

Si supponga il sistema asintoticamente stabile e lo si solleciti con un ingresso a scalino:

$$u(k) = \mathrm{sca}(k) \quad \Rightarrow \quad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

Risulta:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)Y(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)G(z)\frac{z}{z-1}\right] = G(1) = \mu$$

Pertanto il guadagno della funzione di trasferimento è il valore di regime della risposta allo scalino del sistema (come a tempo continuo).

Sistema del primo ordine

Consideriamo un sistema del primo ordine:

$$G(z) = \mu \frac{1-p}{z-p}$$

Calcoliamo la risposta allo scalino unitario:

$$u(k) = \text{sca}(k) \Rightarrow U(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y(z) = \mu \frac{1-p}{z-p} \frac{z}{z-1} = \mu \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-p} \right)$$

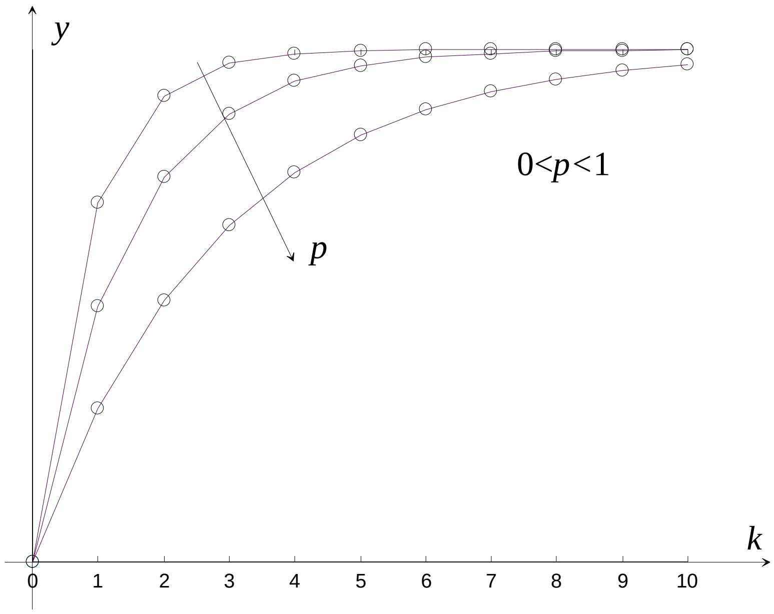
$$\Downarrow$$

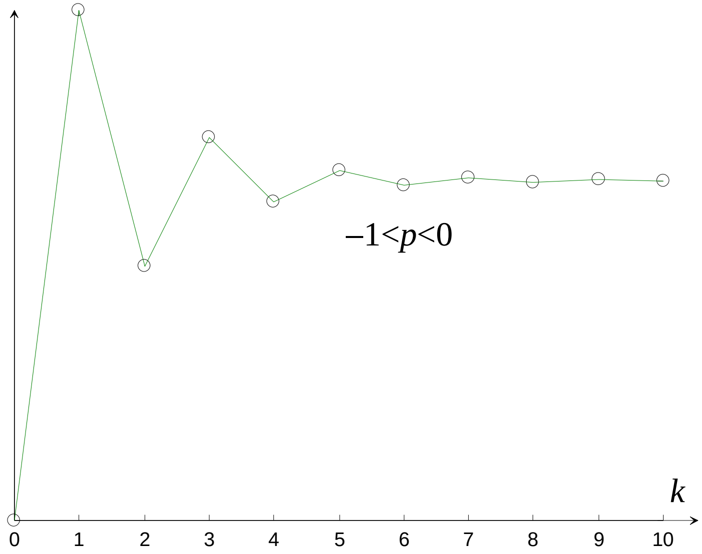
$$y(k) = \mu\left(1-p^k\right), \quad k \geq 0$$

Se $|p| < 1$ il sistema è asintoticamente stabile e la risposta converge a μ.

Sistema del primo ordine

$$y(k) = \mu\left(1 - p^k\right), \quad k \geq 0$$





Contrariamente ai sistemi a tempo continuo, anche un sistema del primo ordine, con polo compreso tra –1 e 0, può dare luogo ad una risposta allo scalino oscillante

Ritardo di tempo

Un ritardo di tempo a tempo discreto si esprime mediante la relazione:

$$y(k) = u(k-h)$$

con h intero e positivo.

Applicando iterativamente la regola della trasformata per il ritardo di un passo:

$$Y(z) = z^{-h}U(z)$$

Funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-h} = \frac{1}{z^h}$$

Contrariamente al tempo continuo la funzione di trasferimento di un ritardo di tempo è una funzione razionale.
È un sistema a guadagno unitario con h poli in $z = 0$.

Risposta in frequenza

In un sistema LTI asintoticamente stabile, sollecitato dall'ingresso:

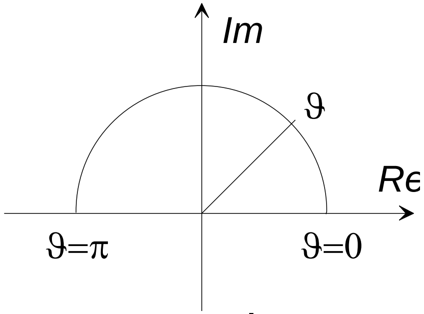
$$u(k) = U \sin(\bar{\theta}k + \phi)$$

esaurito un transitorio iniziale, l'uscita assume l'espressione:

$$y(k) = Y \sin(\bar{\theta}k + \psi)$$

con:

$$\begin{cases} Y = U\left|G\left(e^{j\bar{\theta}}\right)\right| \\ \psi = \phi + \angle G\left(e^{j\bar{\theta}}\right) \end{cases}$$



La funzione complessa della variabile reale θ definita da:

$$G\left(e^{j\theta}\right), \quad \theta \in [0, \pi]$$

prende il nome di risposta in frequenza del sistema e, come a tempo continuo, si definisce per qualsiasi sistema LTI, indipendentemente dalla sua stabilità.
Il suo uso, a tempo discreto, è in qualche misura limitato dalla difficoltà nel tracciamento dei diagrammi di Bode (non esiste un'approssimazione asintotica semplice).