

# Controlli automatici

## Schemi classici di controllo del moto

**Prof. Paolo Rocco ([paolo.rocco@polimi.it](mailto:paolo.rocco@polimi.it))**

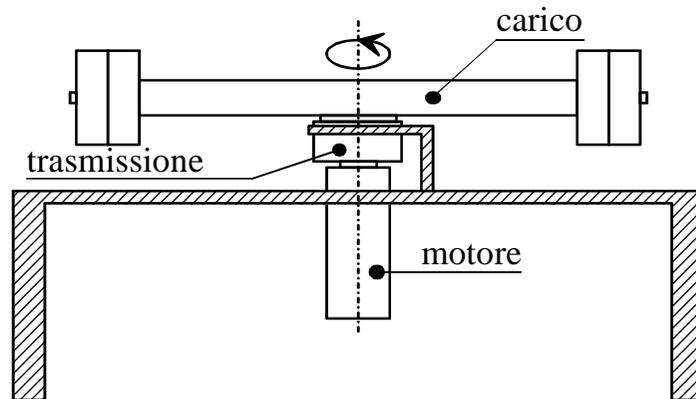
**Politecnico di Milano**

**Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria**

---



# Controllo di un servomeccanismo



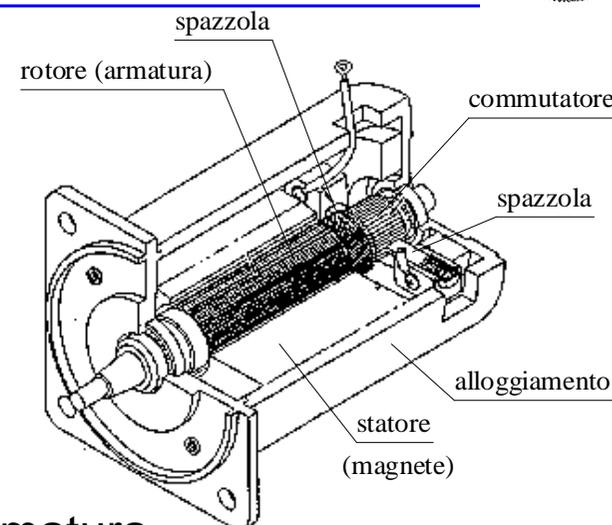
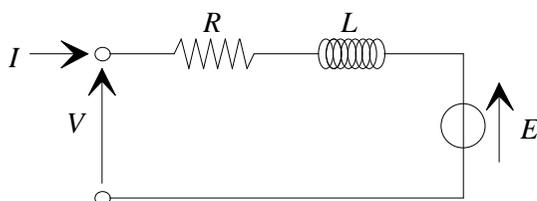
Come è noto, nei suoi tratti essenziali un **servomeccanismo** di posizione è costituito da un motore, un riduttore ed un carico.



- Il problema di controllo si pone nei termini di governare il moto del carico, modulando opportunamente la coppia erogata dal motore.
- Possono presentarsi diversi scenari per quanto riguarda la **disponibilità di sensori**: misure di posizione /velocità del motore e/o del carico.
- Tuttavia noi disponiamo anche di una misura di corrente del motore: nel seguito vedremo un modo intelligente per usare questa misura

# La dinamica elettrica

Supponiamo di adottare un **motore a corrente continua**, il cui circuito elettrico è, come è noto, il seguente:



- Applicando una tensione  $V$ , si genera nel circuito di armatura una corrente  $I$  legata a  $V$  dalla dinamica elettrica (circuito R-L). È anche presente una forza contro-elettromotrice  $E$ , proporzionale alla velocità  $\omega_m$  del motore
- Grazie al meccanismo di conversione elettromeccanica associato al sistema spazzole-collettore, il motore eroga una coppia  $\tau_m$  proporzionale alla corrente  $I$
- Nella robotica industriale si usano più comunemente **motori brushless**, per i quali tuttavia si può dare una descrizione simile, riferita all'asse in quadratura

# La dinamica elettrica



Il sistema è retto dalle seguenti equazioni:

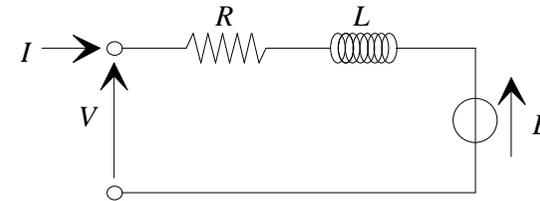
$$V(t) = RI(t) + Li(t) + E(t)$$

$$E(t) = K\omega_m(t)$$

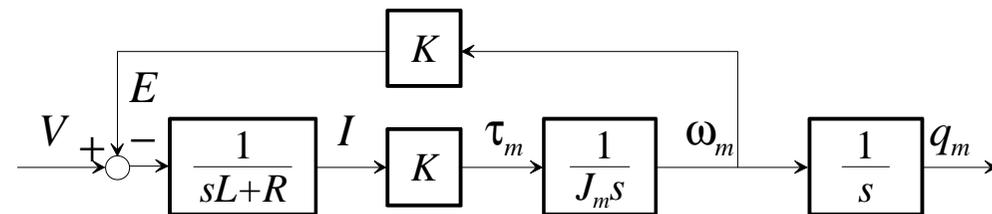
$$\tau(t) = KI(t)$$

$$\tau(t) = J_m \dot{\omega}_m(t)$$

$$\dot{q}_m(t) = \omega_m(t)$$



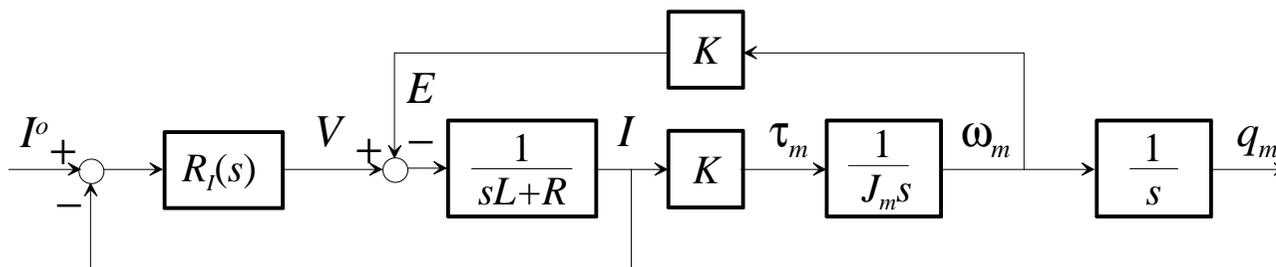
Traducibili nello schema a blocchi:



Si osservi che la forza controelettromotrice accoppia la dinamica elettrica con la dinamica meccanica.

# Il controllo di corrente

Disponendo della misura di corrente, si può chiudere un anello di controllo sulla corrente stessa:



- vista la dinamica veloce legata ai transistori elettrici si potrà progettare  $R_I(s)$  per ottenere una **banda passante molto ampia**, dell'ordine delle migliaia di  $rad/s$ .
- nel progetto del regolatore di corrente si potrà inoltre assumere la forza controelettrica come un disturbo di bassa frequenza.
- una volta chiuso l'anello di controllo della corrente, questo potrà ritenersi **praticamente istantaneo** ai fini del progetto del controllore di posizione esterno:

$$\tau_m(t) = KI(t) \approx KI^o(t)$$

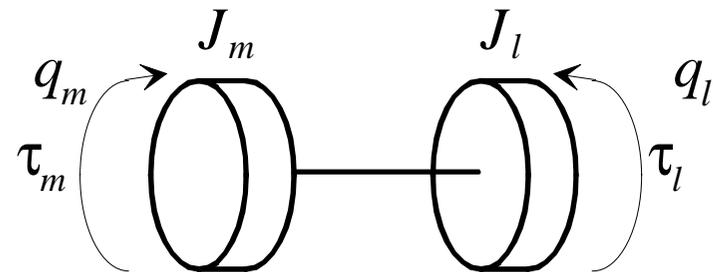
- potremo quindi assumere come **variabile di controllo** per il controllo posizione/velocità direttamente la **coppia motrice**  $\tau_m$

# L'approssimazione rigida



Un primo modo di affrontare il problema di controllo del moto consiste nell'assumere l'insieme motore, riduttore e carico come un sistema complessivamente **rigido**. In questo caso le equazioni del sistema sono le seguenti:

motore :	$J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm}$
carico :	$J_l \ddot{q}_l = n\tau_{lm} - \tau_l$
trasmissione :	$q_m = nq_l$



( $D_m$ : coefficiente di attrito viscoso motore,  $J_m$  e  $J_l$ : momento di inerzia di motore e carico,  $n$ : rapporto di trasmissione,  $\tau_{lm}$ : coppia trasmessa lato motore,  $\tau_l$ : coppia esterna lato carico).

Possiamo eliminare  $q_l$  e  $\tau_{lm}$  dalle equazioni, ottenendo:

$$(J_m + J_{lr}) \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lr}$$

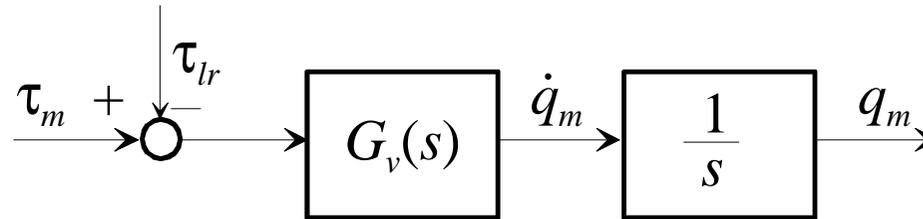
con:

$$J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad \tau_{lr} = \frac{\tau_l}{n}$$

# L'approssimazione rigida



Il sistema rigido si può quindi descrivere in termini di funzione di trasferimento:



con:

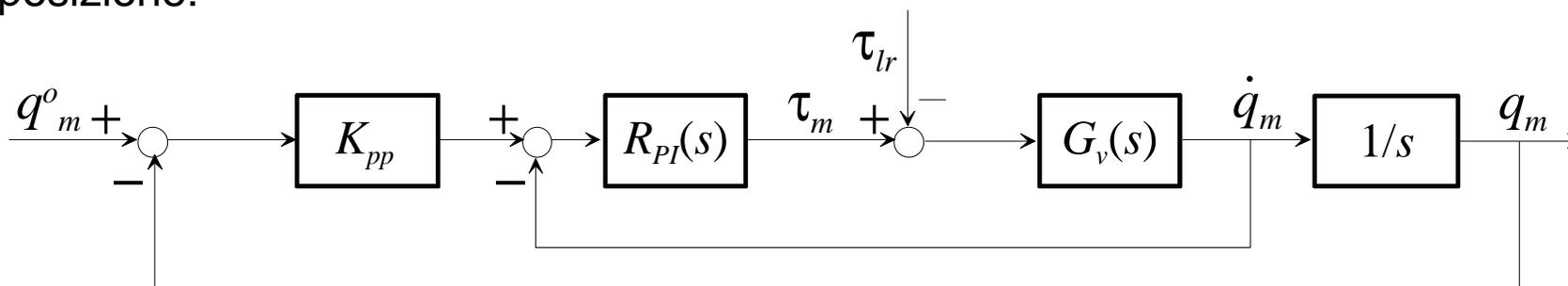
$$G_v(s) = \frac{1}{D_m + s(J_m + J_{lr})}$$

Se il coefficiente di attrito  $D_m$  è trascurabile (caso più sfavorevole, perché l'attrito dà un contributo stabilizzante), si ha:

$$G_v(s) = \frac{\mu}{s}$$
$$\mu = \frac{1}{J_m + J_{lr}}$$

# Il controllo P/PI

Chiudiamo un controllore PI sulla velocità, ed un controllore proporzionale sulla posizione:



Lo schema prevede di disporre di **due misure indipendenti** di posizione e velocità. Tipicamente la misura di velocità è fornita da una dinamo tachimetrica.

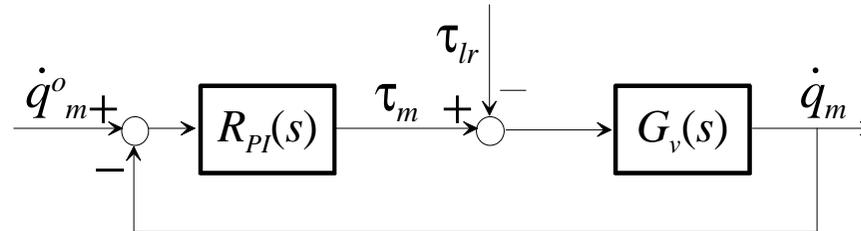
Si tratta di uno schema di **controllo in cascata**:

- si progetta dapprima l'anello interno di velocità su banda ampia, in modo da fornire anche una buona reiezione dei disturbi
- l'anello esterno, di posizione, si progetta su una banda più ristretta
- si osservi che di fatto gli anelli innestati sono tre (corrente, velocità, posizione)

# Progetto del regolatore PI di velocità



Controllore PI

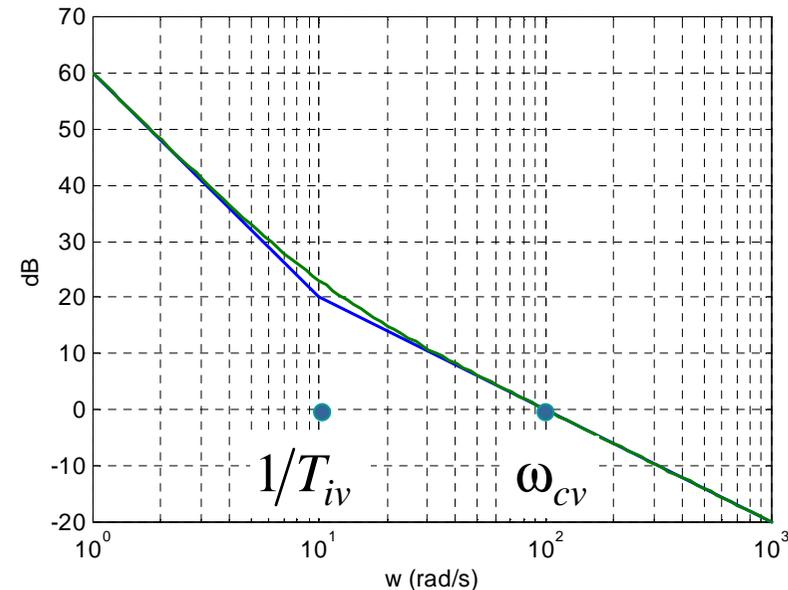


$$R_{PI}(s) = K_{pv} \left( 1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Funzione d'anello:

$$L_v(s) = R_{PI}(s)G_v(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Se  $T_{iv}$  è sufficientemente grande, ossia se lo zero del PI è sufficientemente in bassa frequenza, la pulsazione critica è ben approssimata prendendo l'approssimazione di alta frequenza di  $L$ :



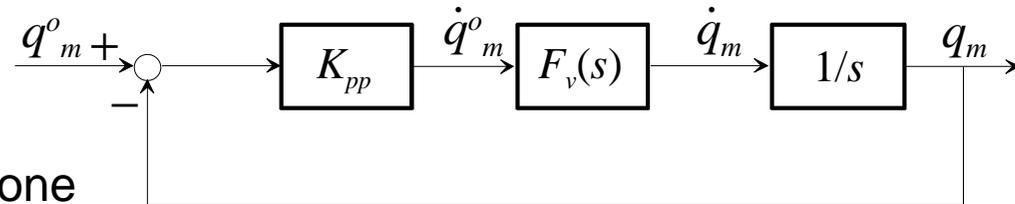
$$L_v(s) \approx \frac{\omega_{cv}}{s} \quad \omega_{cv} = K_{pv}\mu$$

$$\frac{1}{T_{iv}} = (0.1 \div 0.3)\omega_{cv}$$

posizionamento dello zero del PI

selezione del guadagno del PI

# Progetto del regolatore P di posizione

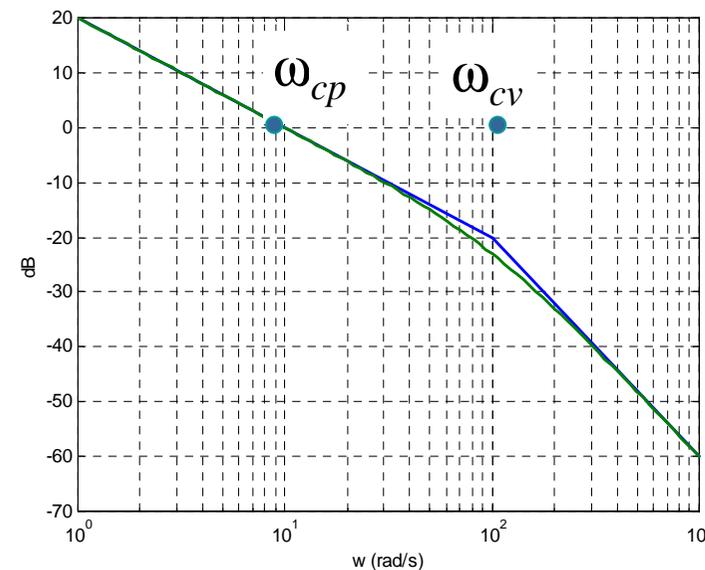


Il regolatore dell'anello di posizione "vede" l'anello chiuso di velocità, di funzione di trasferimento:

$$F_v(s) \approx \frac{1}{1 + s/\omega_{cv}}$$

La funzione d'anello è quindi:

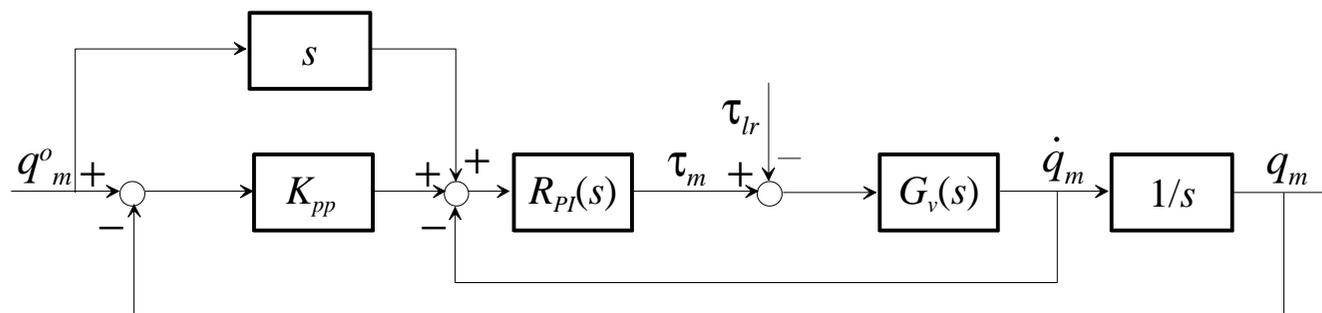
$$L_p(s) = K_{pp} F_v(s) \frac{1}{s} = \frac{K_{pp}}{s(1 + s/\omega_{cv})}$$



È sufficiente prendere  $K_{pp} \ll \omega_{cv}$  per garantire una pulsazione critica  $\omega_{cp} \approx K_{pp}$ .

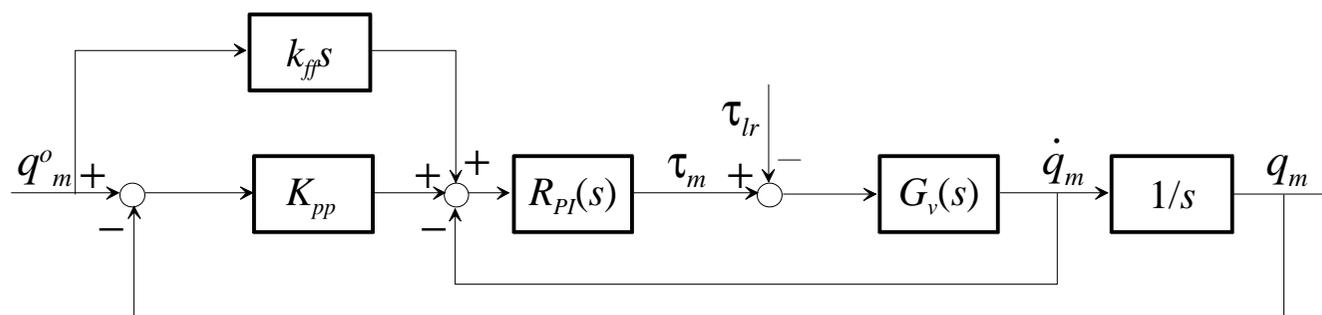
$$\boxed{\omega_{cp} = K_{pp}} \longleftarrow \text{selezione del guadagno P}$$

# Anticipo di velocità



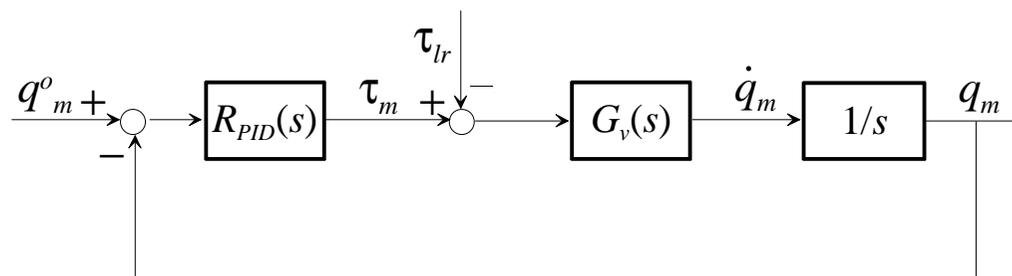
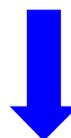
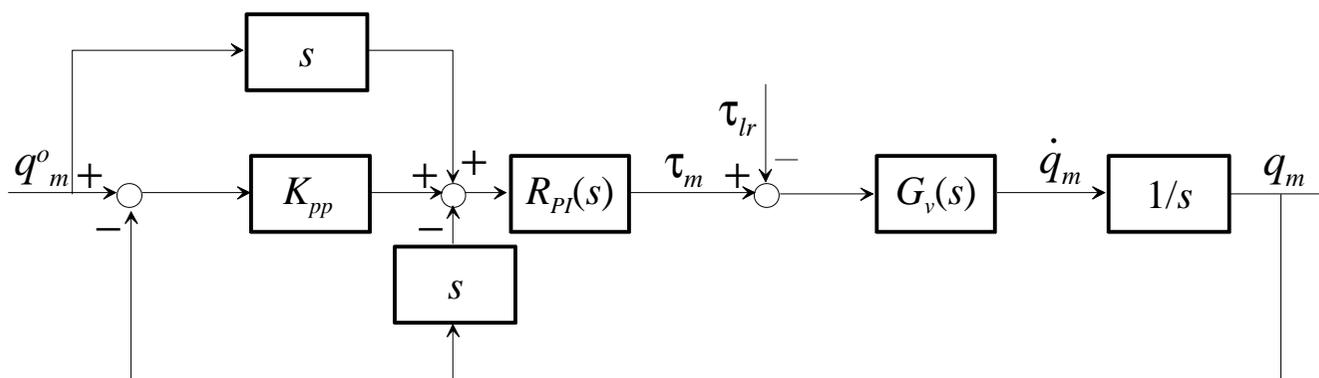
Per rendere la risposta al riferimento di posizione più pronta, è possibile inserire un contributo di feedforward, noto come “**anticipo di velocità**”: si deriva il riferimento e si somma questo contributo nel nodo sommatore dell’anello di velocità.

Spesso il contributo di feedforward viene pesato da un coefficiente  $k_{ff}$  compreso tra 0 e 1:



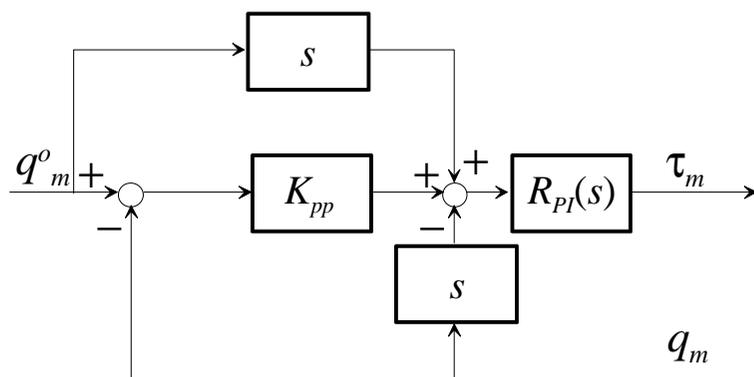
# Anticipo di velocità e PID

Se si usa un solo sensore sulla posizione motore e la velocità si ottiene differenziando la misura di posizione, si ottiene uno schema di controllo del tutto equivalente ad un **regolatore PID**:





# Anticipo di velocità e PID



Dimostriamo l'equivalenza con un PID:

$$\begin{aligned} \tau_m(s) &= R_{PI}(s) \left( s q_m^o(s) - s q_m(s) + K_{pp} (q_m^o(s) - q_m(s)) \right) = \\ &= K_{pv} \left( 1 + \frac{1}{s T_{iv}} \right) (s + K_{pp}) (q_m^o(s) - q_m(s)) = R_{PID}(s) (q_m^o(s) - q_m(s)) \end{aligned}$$

$$R_{PID}(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{s T_I} + s T_D \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_P = K_{pv} \left( K_{pp} + \frac{1}{T_{iv}} \right) \\ T_D = \frac{K_{pv}}{K_p} \\ T_I = \frac{K_p T_{iv}}{K_{pp} K_{pv}} \end{array} \right.$$

# Limitazioni del modello rigido

---



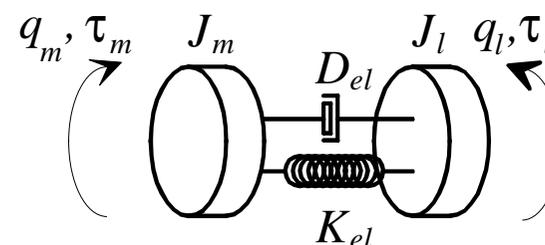
- Il modello rigido non mette in evidenza nessun significativo limite di banda. In linea di principio si potrebbe quindi rendere il sistema in anello chiuso arbitrariamente veloce.
- All'atto pratico tuttavia emergono chiaramente limitazioni, sotto forma di vibrazioni, rumore, saturazioni, ecc..
- Evidentemente il modello rigido non è in grado di spiegare bene come si comporta un servomeccanismo.
- Occorre quindi complicare il modello.



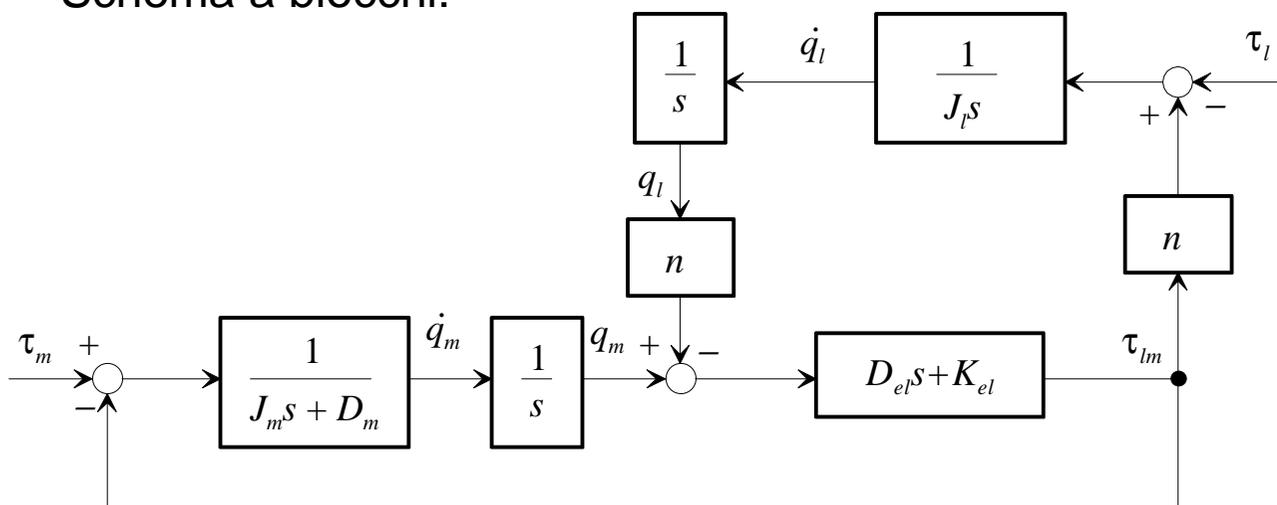
# L'approssimazione a due masse

Un secondo modo di affrontare il problema di controllo consiste nell'assumere l'insieme motore, riduttore e carico come un **accoppiamento elastico** tra due corpi rigidi. In questo caso le equazioni del sistema sono le seguenti:

motore	$J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm}$
carico	$J_l \ddot{q}_l = n\tau_{lm} - \tau_l$
trasmissione	$\tau_{lm} = K_{el}(q_m - nq_l) + D_{el}(\dot{q}_m - n\dot{q}_l)$



Schema a blocchi:



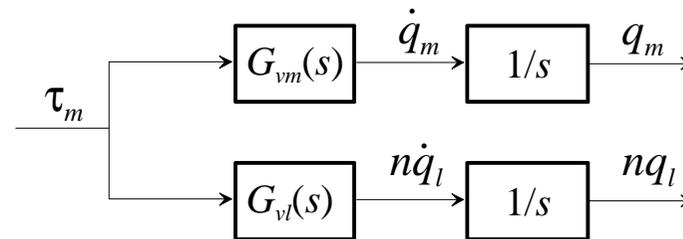
È un sistema di ordine 4 (ci sono 4 variabili di stato)

# Un sistema “SITO”



Concentriamoci sulla risposta del sistema al comando di coppia  $\tau_m$  (poniamo  $\tau_l = 0$ )

Il sistema è interpretabile come sistema ad un ingresso e due uscite (SITO: Single Input Two Outputs).



i numeratori sono diversi

Risolvendo lo schema a blocchi si ottiene:

$$G_{vm}(s) = \frac{J_{lr} s^2 + D_{el} s + K_{el}}{J_{lr} J_m s^3 + (J D_{el} + J_{lr} D_m) s^2 + (J K_{el} + D_m D_{el}) s + D_m K_{el}}$$

$$G_{vl}(s) = \frac{D_{el} s + K_{el}}{J_{lr} J_m s^3 + (J D_{el} + J_{lr} D_m) s^2 + (J K_{el} + D_m D_{el}) s + D_m K_{el}}$$

$$\left[ J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad J = J_{lr} + J_m \right]$$



# Parametri notevoli

Poniamo  $D_m=0$  ed introduciamo i seguenti parametri:

$$\rho = \frac{J_{lr}}{J_m} \quad (\text{rapporto di inerzia})$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}, \quad \zeta_z = \frac{D_{el}}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{lr}K_{el}}} \quad (\text{pulsazione naturale e smorzamento degli zeri})$$

$$\omega_p = \sqrt{1+\rho} \omega_z, \quad \zeta_p = \sqrt{1+\rho} \zeta_z \quad (\text{pulsazione naturale e smorzamento dei poli})$$

Si ottiene:

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2\frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2\frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

$$\left[ \mu = \frac{1}{J} \right]$$

modello rigido

$$G_{vl}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2\frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2\frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

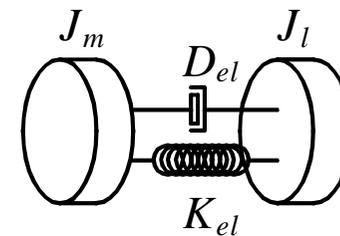
effetto elastico

# Natural frequency e locked frequency

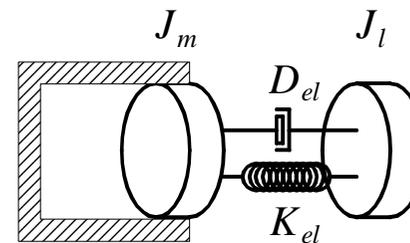


Le pulsazioni  $\omega_p$  e  $\omega_z$  hanno un'interpretazione fisica molto chiara:

Il sistema libero oscilla alla pulsazione dei poli di  $G_{vm}$ , ossia  $\omega_p$ : questa pulsazione è detta **natural frequency**.



Se invece si blocca meccanicamente il motore, il sistema oscilla alla pulsazione degli zeri di  $G_{vm}$ , ossia  $\omega_z$ : questa pulsazione è detta **locked frequency**.

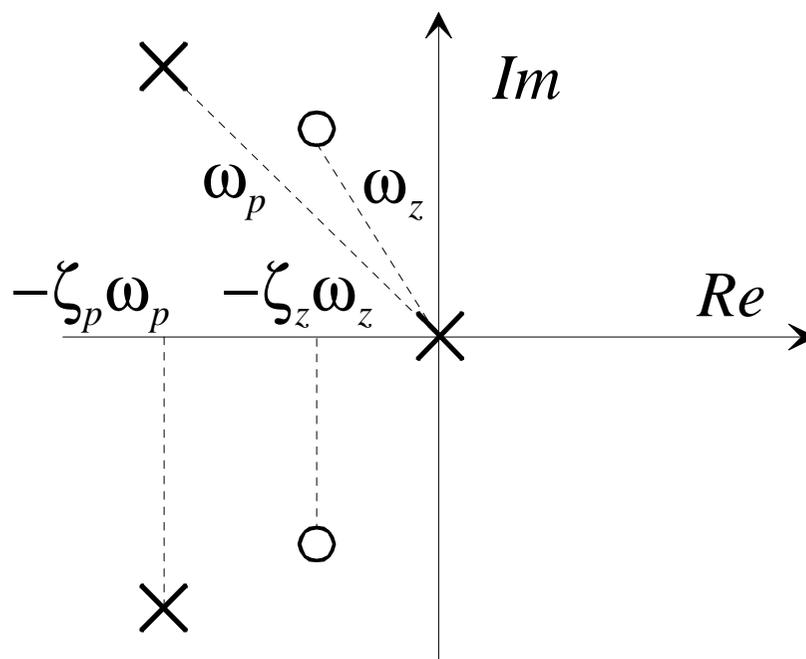




# Disposizione di poli e zeri

Come sono messi nel piano complesso poli e zeri di  $G_{vm}$ ?

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$



$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{\zeta_p}{\zeta_z} = \sqrt{1 + \rho} > 1$$



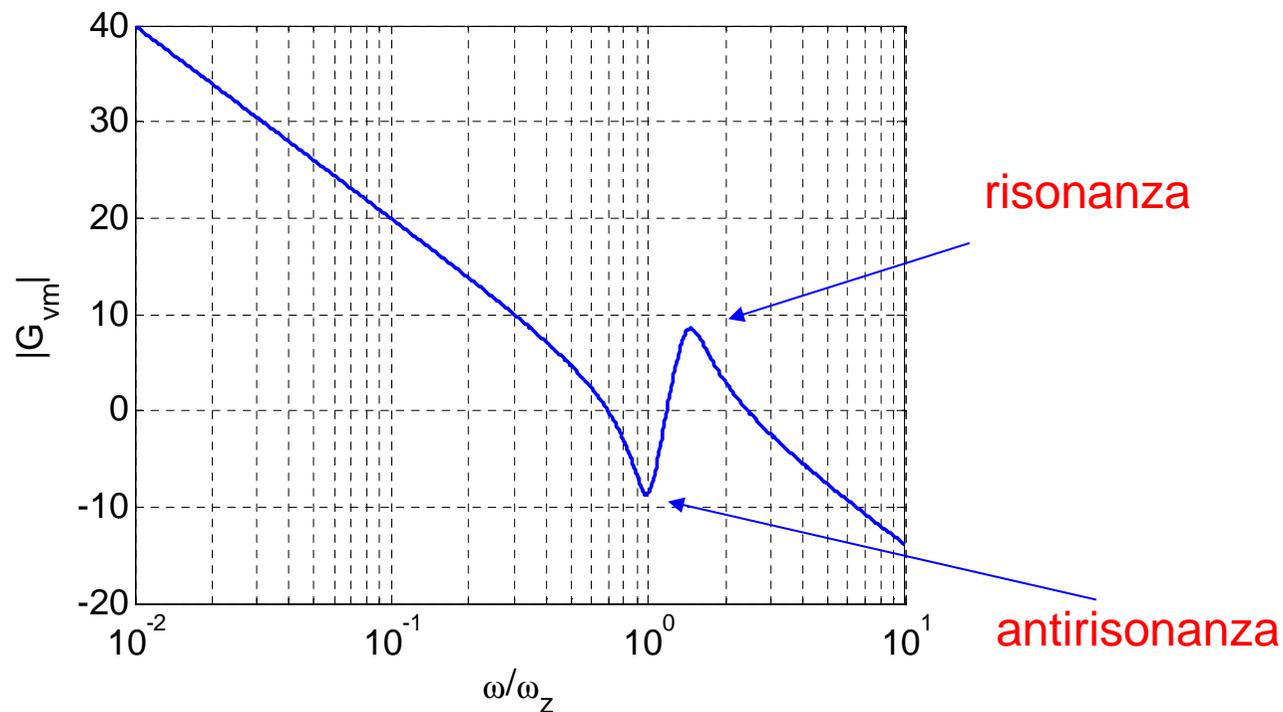
I poli sono a più alta frequenza e più smorzati

# Risposta in frequenza

Che aspetto assume la risposta in frequenza di  $G_{vm}$ ?

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

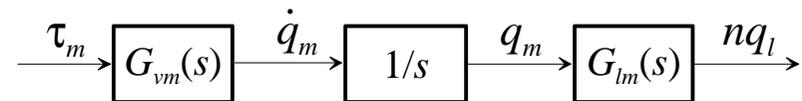
$$\rho=1$$
$$\zeta_z=0.1$$



# Una rappresentazione formale



Se  $\tau_l = 0$ , possiamo rappresentare il sistema con il seguente schema a blocchi:



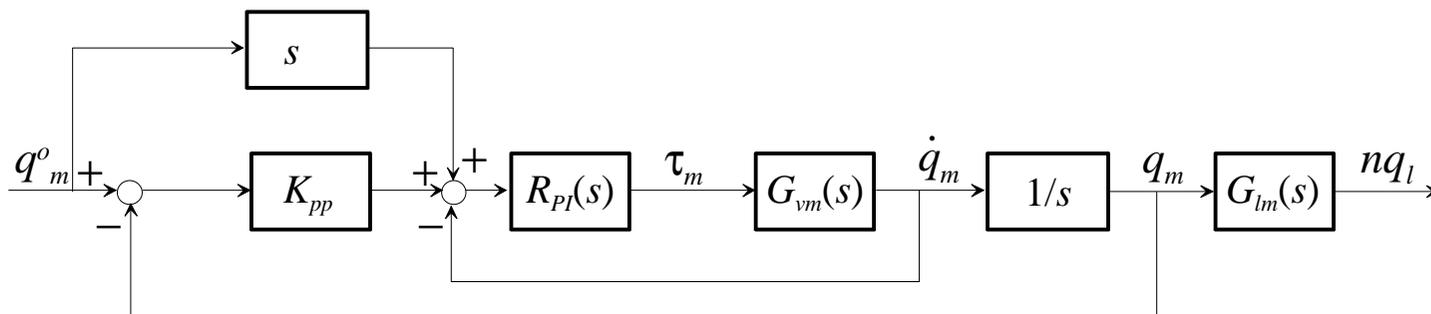
dove posizione del motore e posizione del carico (riportata all'asse motore) sono formalmente legate dalla funzione di trasferimento:

$$G_{lm}(s) = \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}$$

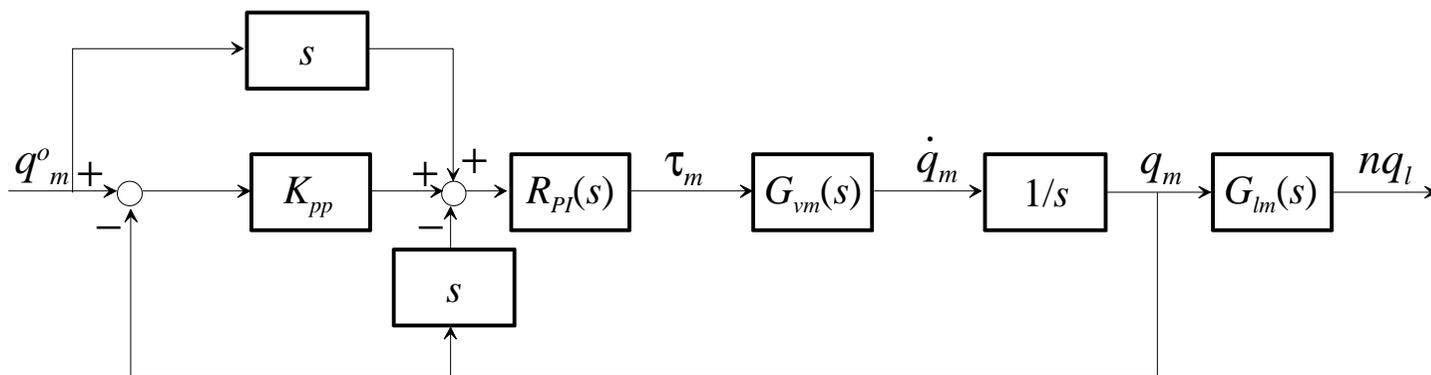
# Controllo P/PI sul motore



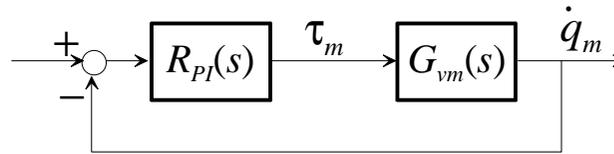
Nella robotica industriale i **sensori** sono di norma disposti solo dal **lato motore**. Concentrandoci sulla risposta al riferimento ( $\tau_f=0$ ) si ha:



Nel caso di velocità ottenuta per derivazione della posizione:



# Controllo PI di velocità motore



$$R_{PI}(s) = K_{pv} \left( 1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Funzione d'anello:

$$L_v(s) = R_{PI}(s)G_{vm}(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}} \frac{1 + 2\frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2\frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

Introduciamo il seguente parametro di progetto adimensionale:

$$\tilde{\omega}_{cv} = \frac{K_{pv}\mu}{\omega_z}$$

È la **pulsazione critica** di progetto, valutata sul modello rigido ( $K_{pv}\mu$ ), **normalizzata** alla pulsazione  $\omega_z$ :

- $\tilde{\omega}_{cv}$  elevato: progetto “aggressivo”
- $\tilde{\omega}_{cv}$  piccolo: progetto “prudente”



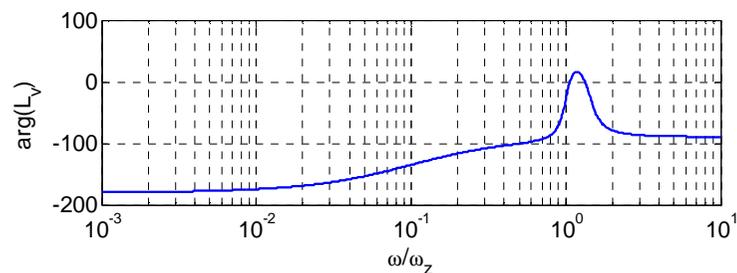
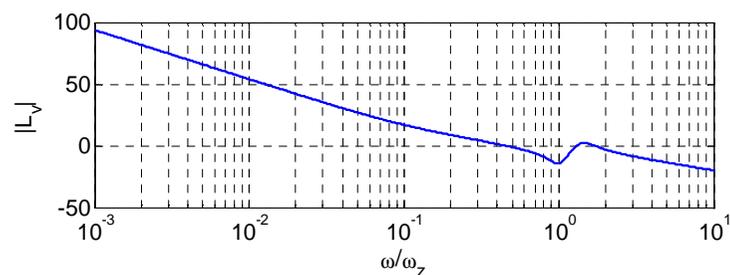
# Analisi in frequenza

Posizioniamo lo zero del PI una decade prima della pulsazione di antirisonanza  $\omega_z$ :

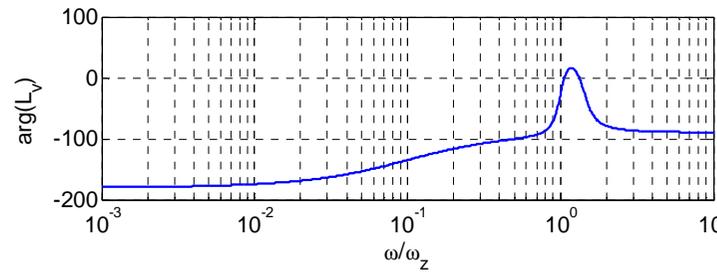
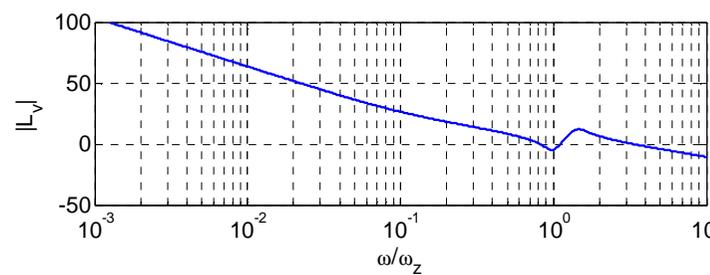
$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_z}$$

Tracciamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento d'anello:

$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$



Il margine di fase è elevato in entrambi i casi

$$\rho=1$$
$$\zeta_z=0.1$$

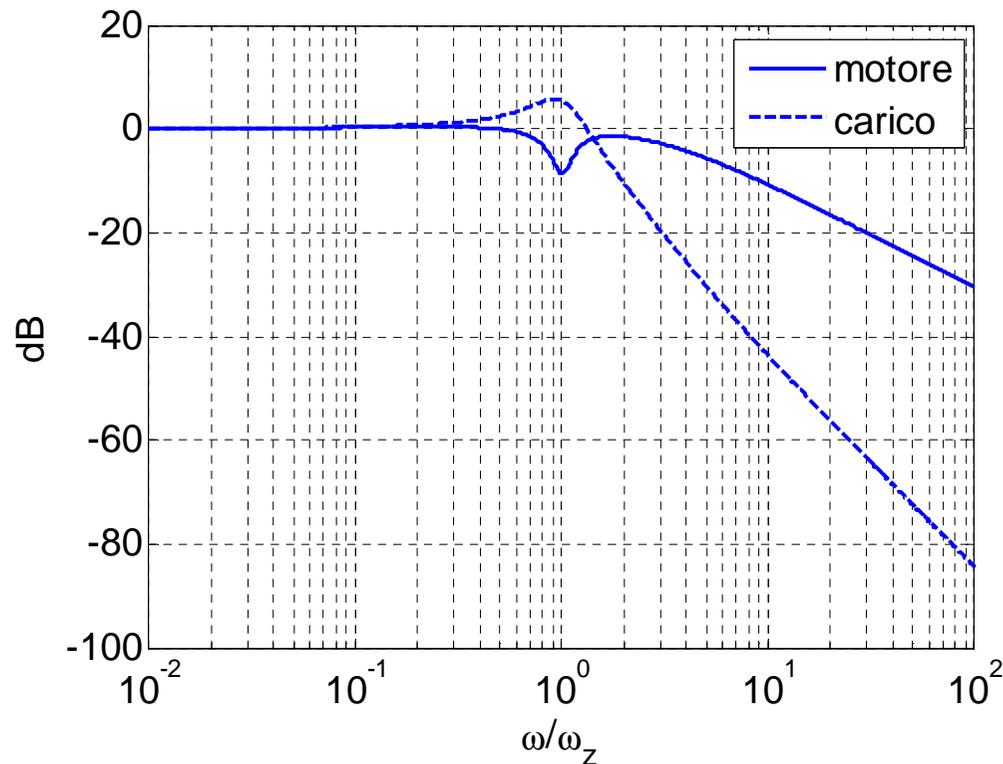
# Analisi in frequenza



Dal criterio di Bode non riusciamo a differenziare i due progetti. Entrambi sembrano condurre a un sistema di controllo con elevato grado di stabilità.

Tuttavia se guardiamo la **risposta in frequenza in anello chiuso**, lato motore e lato carico, nel caso di progetto “aggressivo”:

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

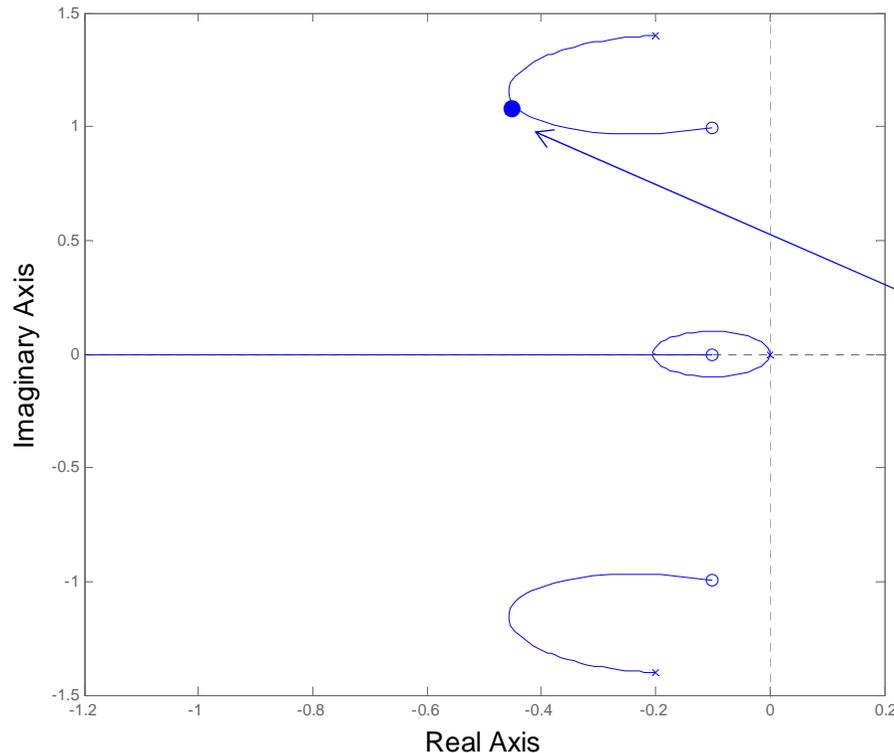


C'è una evidente risonanza lato carico, associata a oscillazioni.

# Anello di velocità: luogo delle radici



Tracciamo il luogo delle radici al variare di  $\tilde{\omega}_{cv}$ :



Ci sono dei poli complessi il cui smorzamento prima aumenta e poi diminuisce.

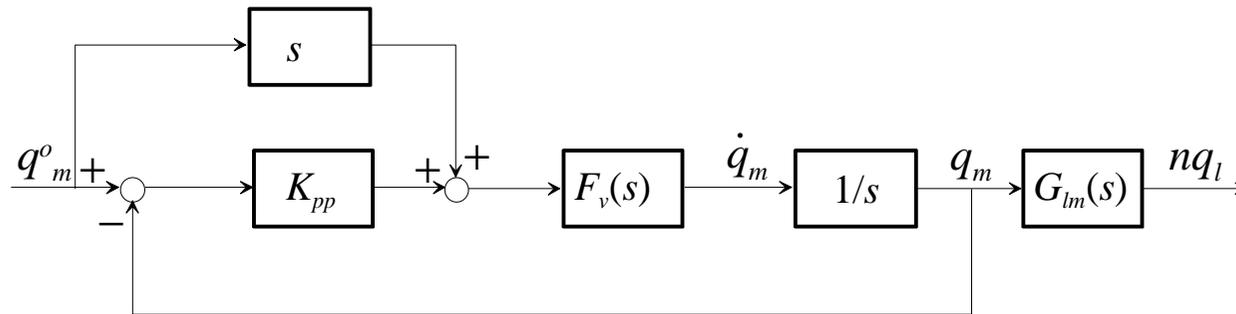
Lo **smorzamento massimo** si ottiene per:

$$\tilde{\omega}_{cv} \approx 0.7$$
$$(\omega_{cv} \approx 0.7\omega_z)$$

← linea guida di progetto

**N.B.** In questo e nei successivi luoghi, per maggiore generalità, gli assi sono **normalizzati** rispetto a  $\omega_z$

# Controllo P di posizione



$$F_v(s) = \frac{L_v(s)}{1 + L_v(s)} \quad \text{Anello chiuso di velocità}$$

La funzione d'anello per il controllo di posizione è:  $L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s}$

Introduciamo anche in questo caso un parametro di progetto normalizzato:

$$\tilde{\omega}_{cp} = \frac{K_{pp}}{\omega_z}$$

È la **pulsazione critica di progetto**, valutata sul modello rigido ( $K_{pp}$ ), **normalizzata** alla pulsazione  $\omega_z$ .

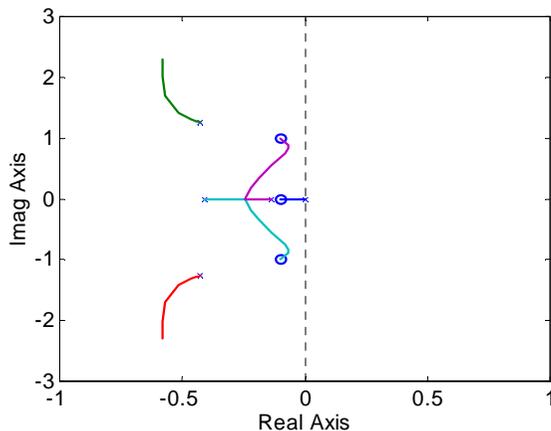
# Anello di posizione: luogo delle radici



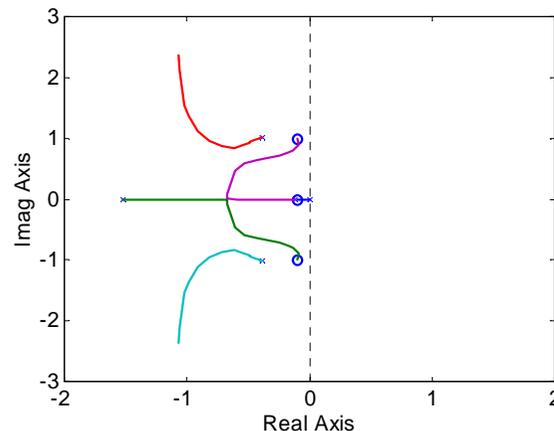
$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s}$$

Tracciamo il luogo delle radici al variare di  $\tilde{\omega}_{cp}$  (o  $K_{pp}$ ) per diversi valori di  $\tilde{\omega}_{cv}$ :

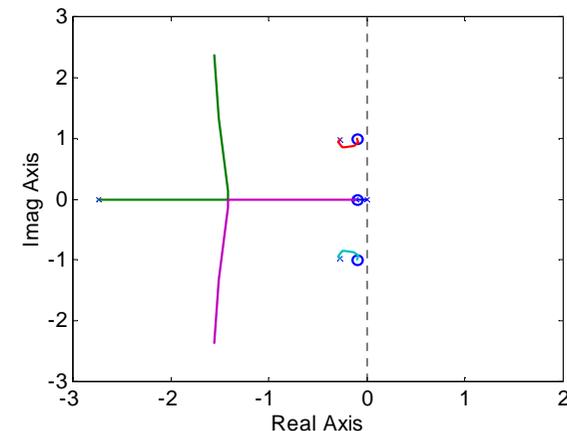
$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

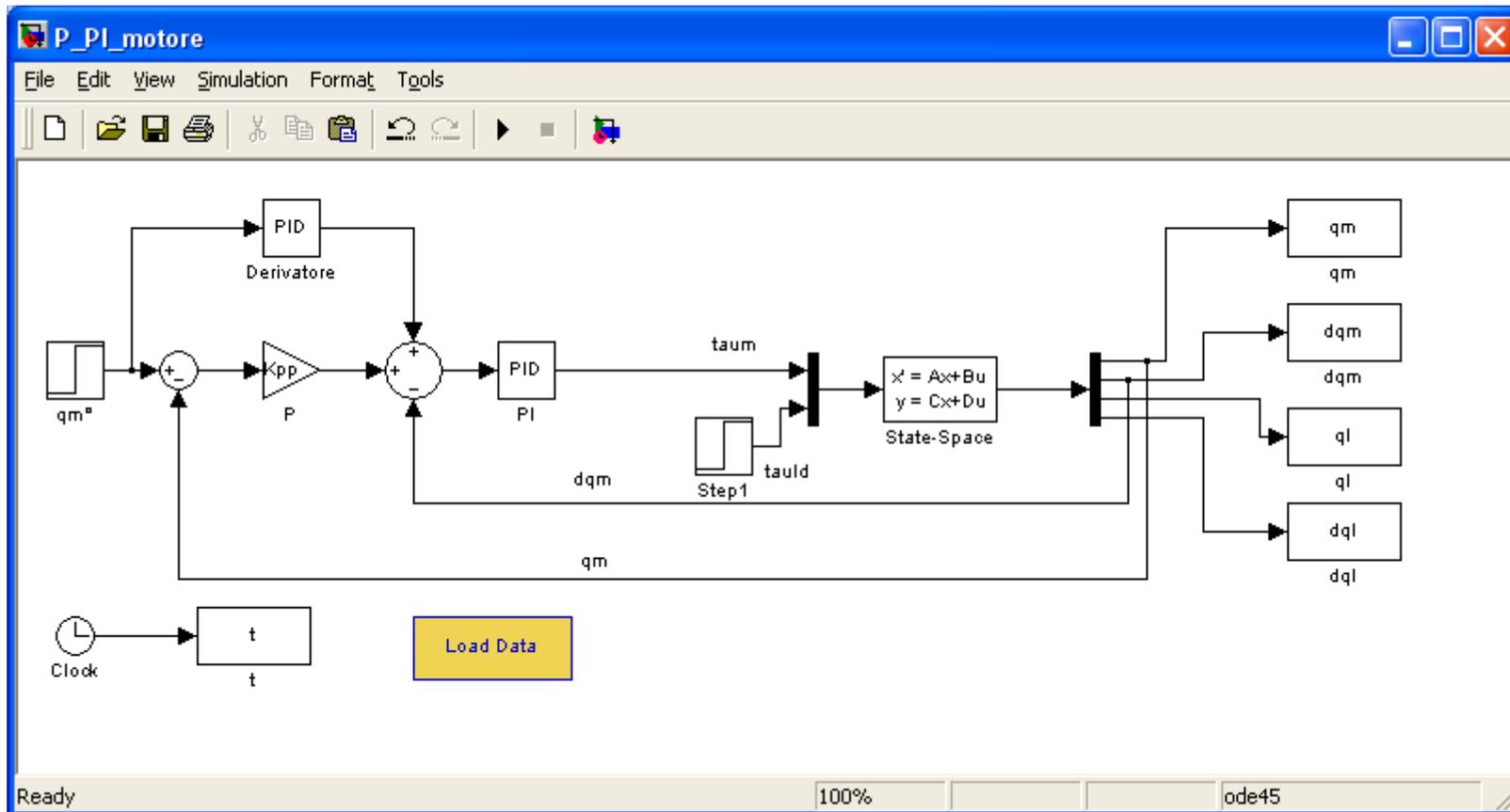


All'aumentare della banda dell'anello di velocità si generano dei poli in anello chiuso poco smorzati.

# Simulazioni



Simuliamo in Simulink il sistema completo, compreso un gradino di coppia esterna lato carico (disturbo di coppia):



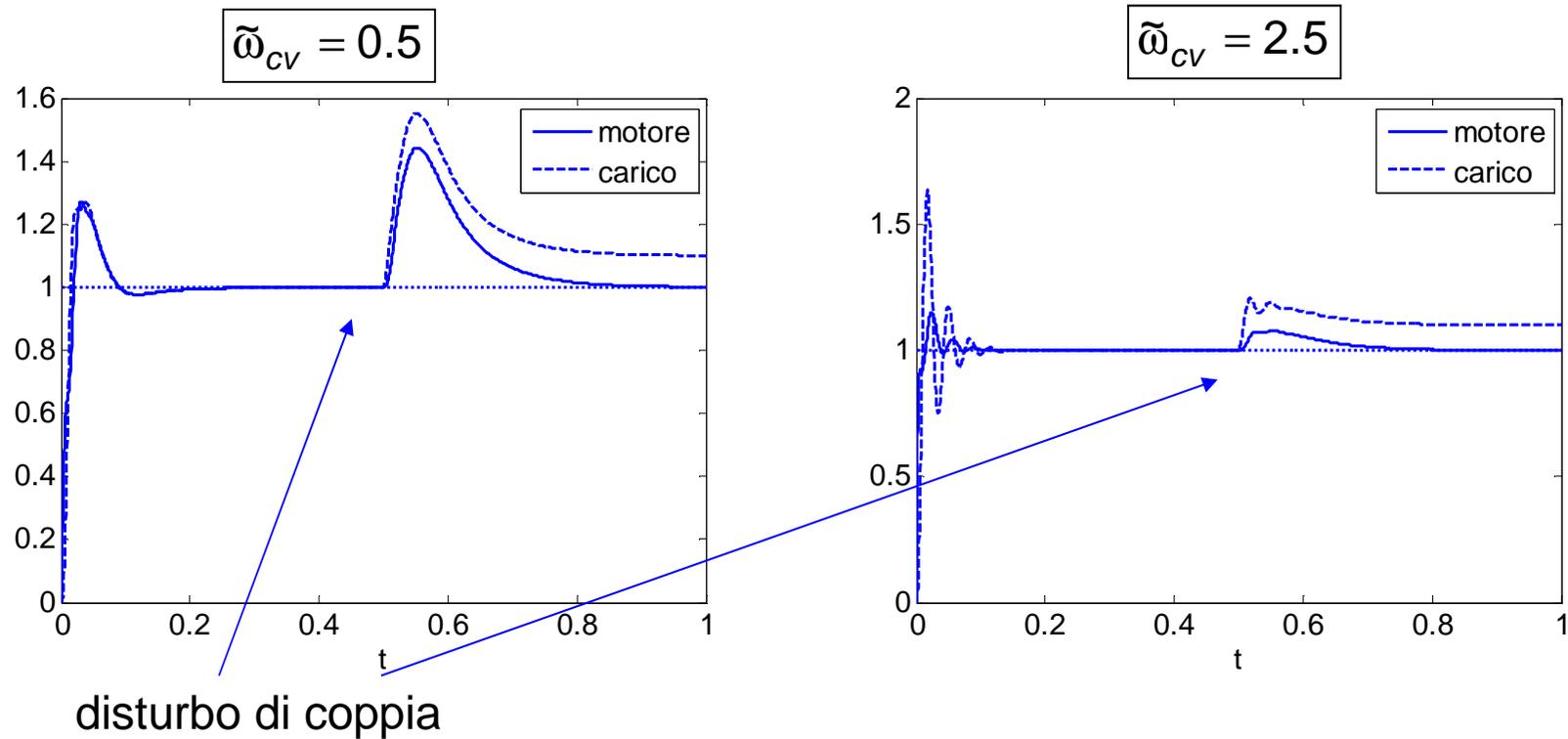
# Simulazioni



Sistema:  $\omega_z = 200 \text{ rad/s}$ ,  $\rho = 1$ ,  $\zeta_z = 0.1$

PI di velocità:  $T_{iv} = 10/\omega_z$

P di posizione:  $\tilde{\omega}_{cp} = 0.1$



# Limiti di prestazione



Abbiamo visto che all'aumentare della banda dell'anello di velocità degradano le prestazioni del sistema di controllo, lato carico. È possibile quantificare questo **degrado di prestazioni?**

Consideriamo la funzione di trasferimento dal riferimento alla posizione lato carico:

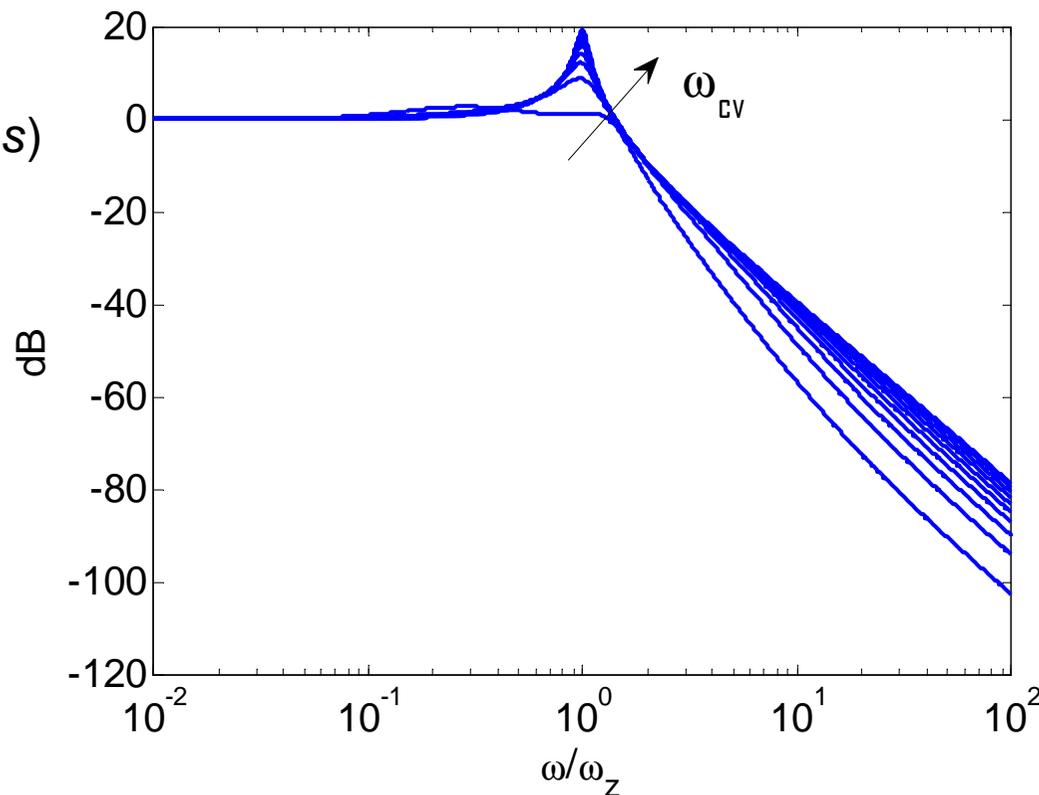
$$\frac{nq_I(s)}{q^o_m(s)} = F_{Im}(s)$$

$$\rho=1$$

$$\zeta_z=0.03$$

$$T_{iv}=10/\omega_z$$

$$\tilde{\omega}_{cp}=0.1$$



Il picco di risonanza aumenta all'aumentare di  $\tilde{\omega}_{cv}$

# Limiti di prestazione

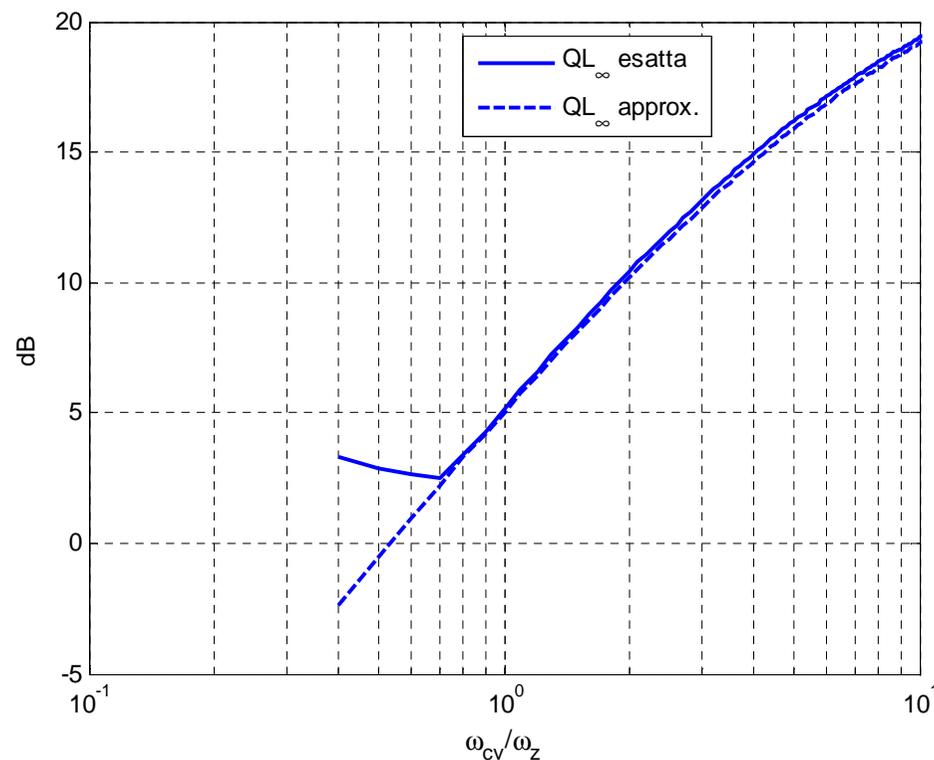
Studiando l'andamento del picco di risonanza della risposta in frequenza (cosiddetta norma  $H_\infty$ ) si trova un andamento approssimabile dalla seguente funzione:

$$QL_\infty \equiv \|F_I(s)\|_\infty \approx \frac{1}{2\hat{\zeta}}$$

$$\hat{\zeta} = \zeta_z + \frac{1}{2\tilde{\omega}_{cv}} \frac{\rho}{1+\rho}$$

La norma dipende da:

- parametri dimensionali del servomeccanismo
- un parametro di progetto del controllo

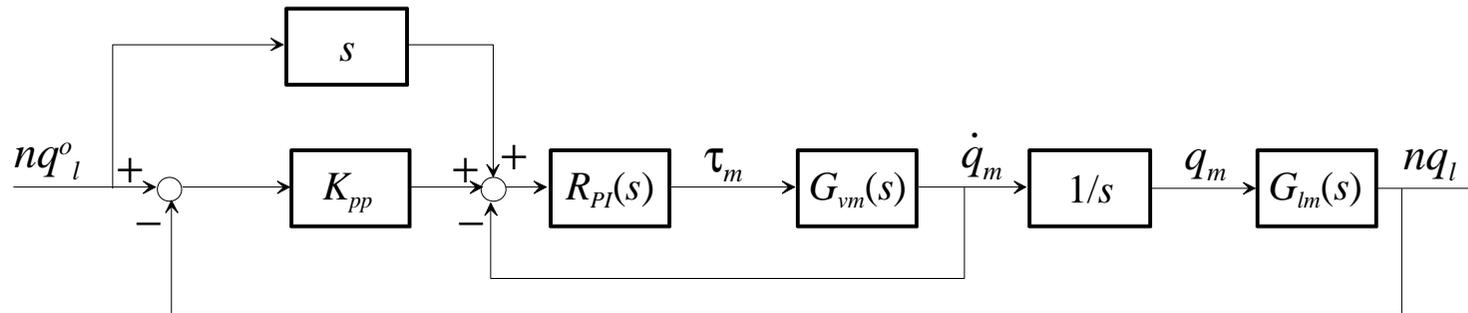


La relazione approssimata supporta il progetto congiunto (**progetto mecatronico**) di meccanica e controllo

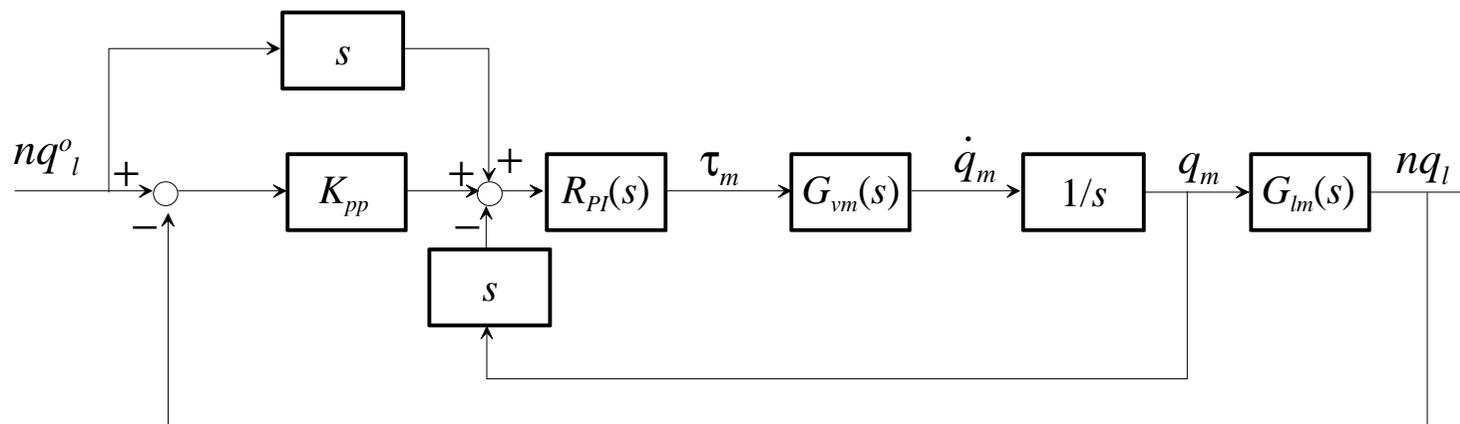
# Controllo P sul carico e PI sul motore



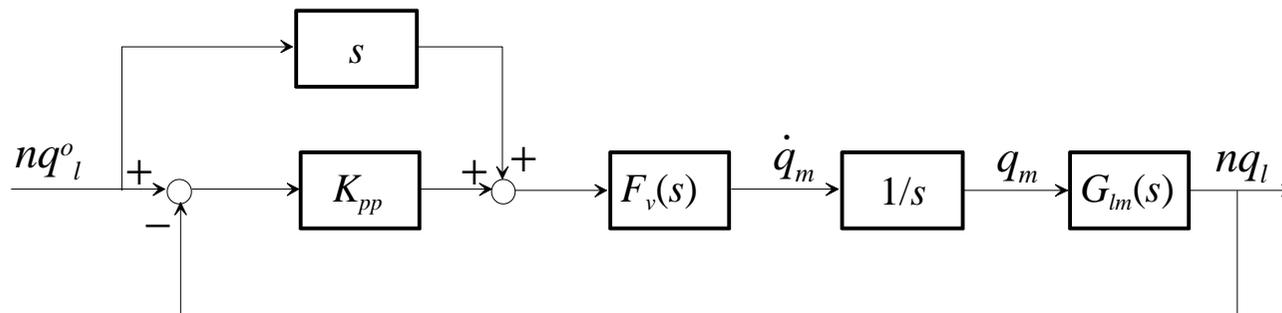
In molte altre applicazioni, come nelle macchine utensili, l'anello di posizione è chiuso lato carico:



Nel caso di velocità motore ottenuta per derivazione della posizione:



# Controllo P di posizione



$$F_v(s) = \frac{L_v(s)}{1 + L_v(s)}$$

Anello chiuso di velocità: nulla cambia nel suo progetto

La funzione d'anello per il controllo di posizione è ora:

$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s} G_{lm}(s)$$

$$G_{lm}(s) = \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}$$

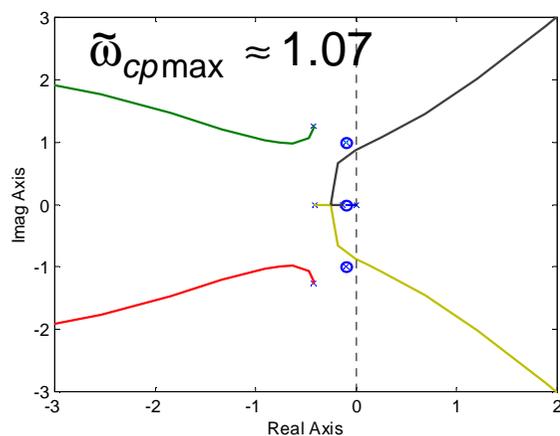


# Luogo delle radici

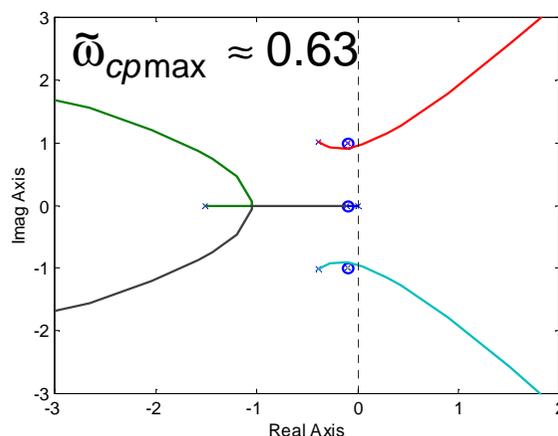
$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s} G_{Im}(s)$$

Tracciamo il luogo delle radici al variare di  $\tilde{\omega}_{cp}$  (o  $K_{pp}$ ) per diversi valori di  $\tilde{\omega}_{cv}$ :

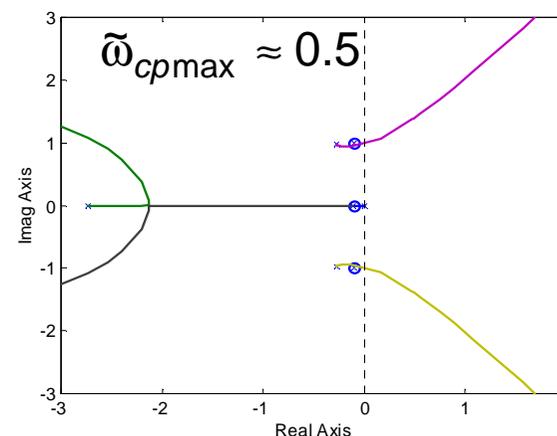
$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

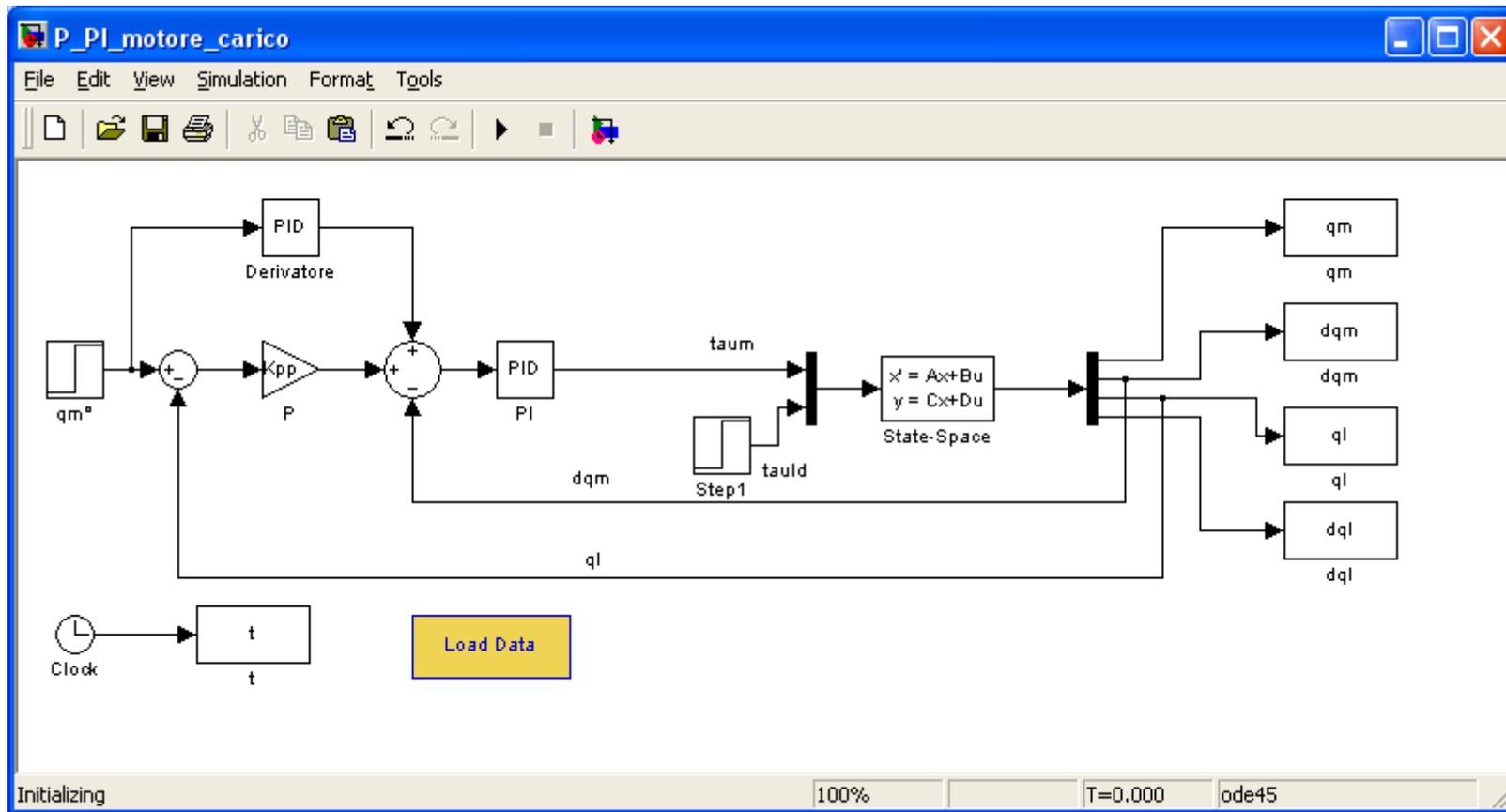


All'aumentare della banda dell'anello di velocità si complica il progetto dell'anello di posizione. Anche per piccoli valori di  $K_{pp}$  il sistema può diventare **instabile**

# Simulazioni



Simuliamo in Simulink il sistema completo, compreso un gradino di coppia esterna lato carico (disturbo di coppia):



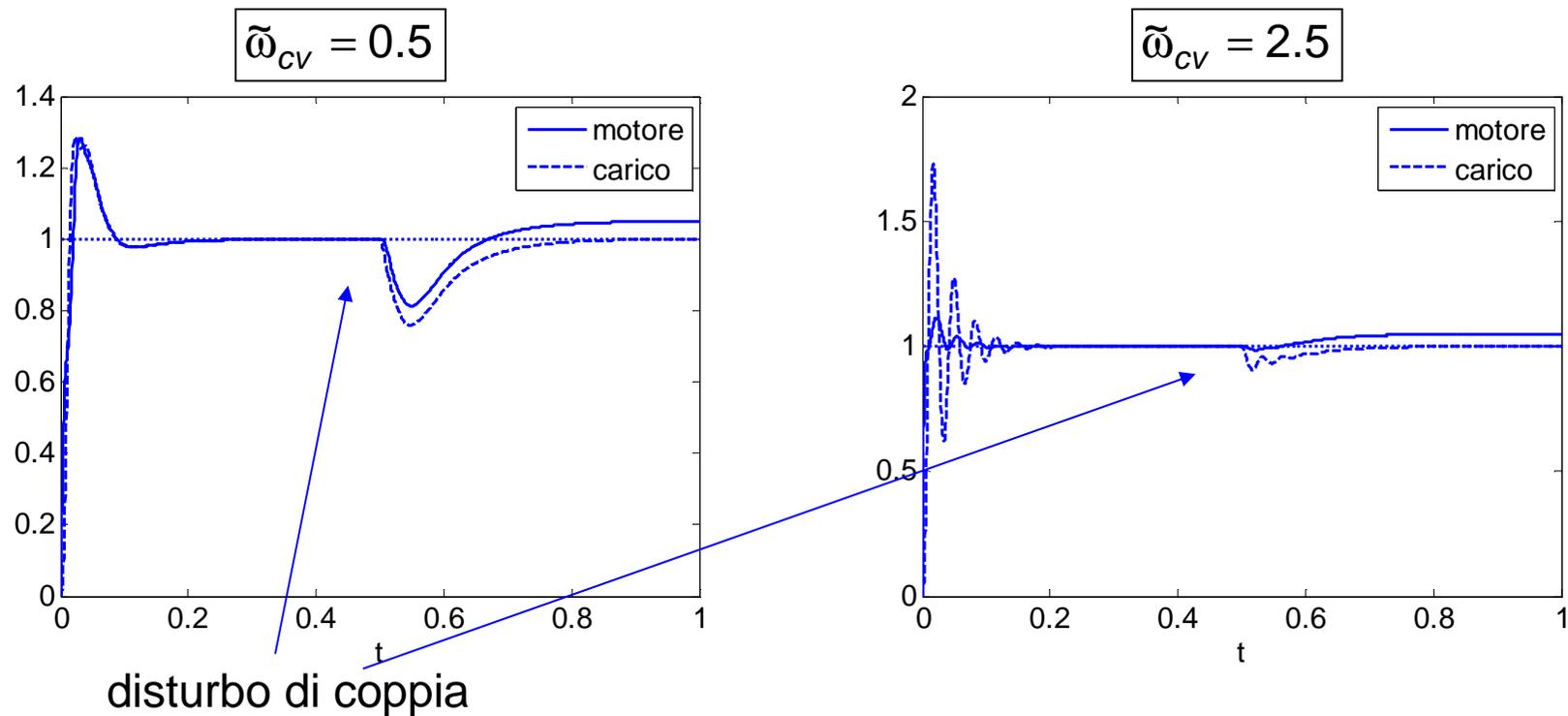
# Simulazioni



Sistema:  $\omega_z = 200 \text{ rad/s}$ ,  $\rho = 1$ ,  $\zeta_z = 0.1$

PI di velocità:  $T_{iv} = 10/\omega_z$

P di posizione:  $\tilde{\omega}_{cp} = 0.1$



# Simulazioni

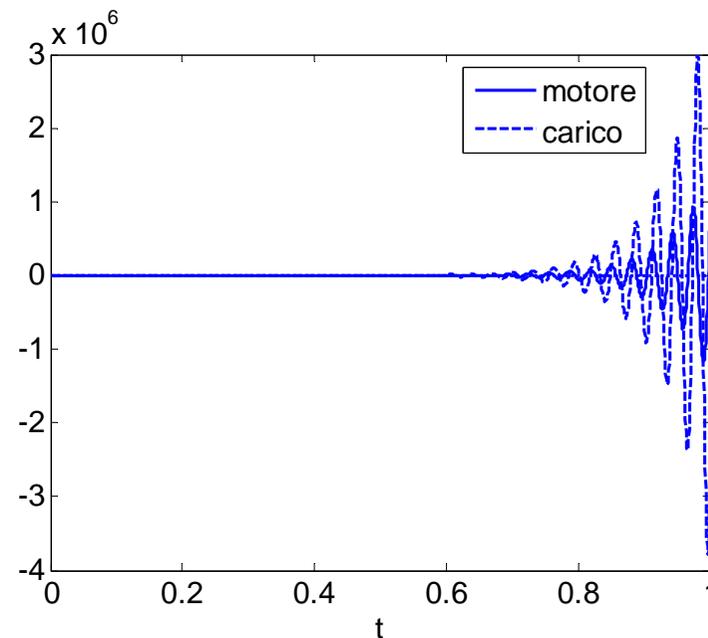


Sistema:  $\omega_z = 200 \text{ rad/s}$ ,  $\rho = 1$ ,  $\zeta_z = 0.1$

PI di velocità:  $T_{iv} = 10/\omega_z$

P di posizione:  $\tilde{\omega}_{cp} = 0.7$

$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$



Il sistema è  
instabile

# Limiti di prestazione



Anche in questo caso è possibile quantificare il degrado di prestazioni connesso all'aumento della banda dell'anello di velocità.

Consideriamo la funzione di trasferimento dal riferimento alla posizione lato carico:

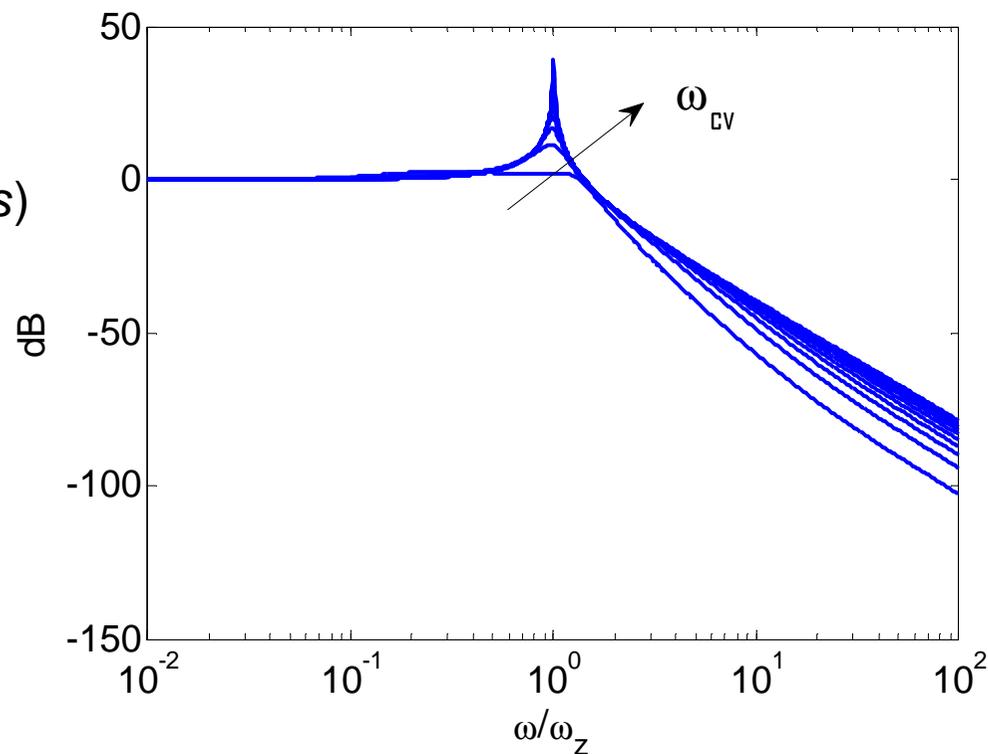
$$\frac{nq_l(s)}{q^o_m(s)} = F_{lm}(s)$$

$$\rho=1$$

$$\zeta_z=0.03$$

$$T_{iv}=10/\omega_z$$

$$\tilde{\omega}_{cp}=0.1$$



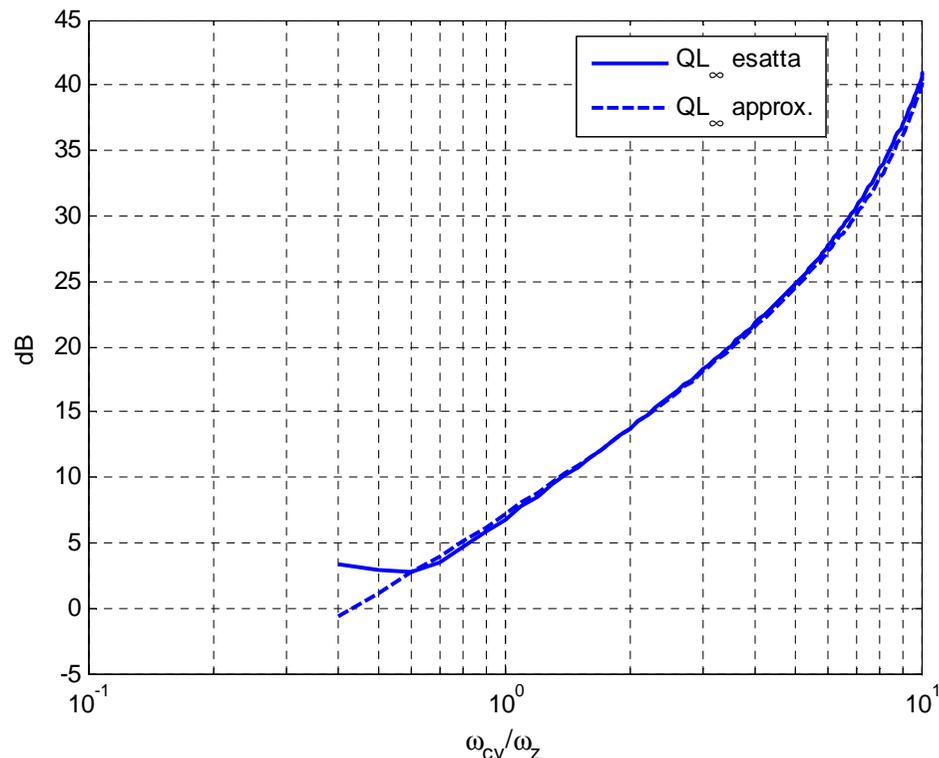
Il picco di risonanza aumenta all'aumentare di  $\tilde{\omega}_{cv}$

# Limiti di prestazione

Studiando anche in questo caso l'andamento del picco di risonanza della risposta in frequenza (la norma  $H_\infty$ ) si trova un andamento approssimabile dalla seguente funzione:

$$QL_\infty \equiv \|F_l(s)\|_\infty \approx \frac{1}{2\hat{\zeta}}$$

$$\hat{\zeta} = \frac{\zeta_z + \frac{1}{2\tilde{\omega}_{cv}} \frac{\rho}{1+\rho} - 0.5\tilde{\omega}_{cp}}{1 + \frac{\tilde{\omega}_{cp}}{\tilde{\omega}_{cv}} \frac{1}{1+\rho}}$$



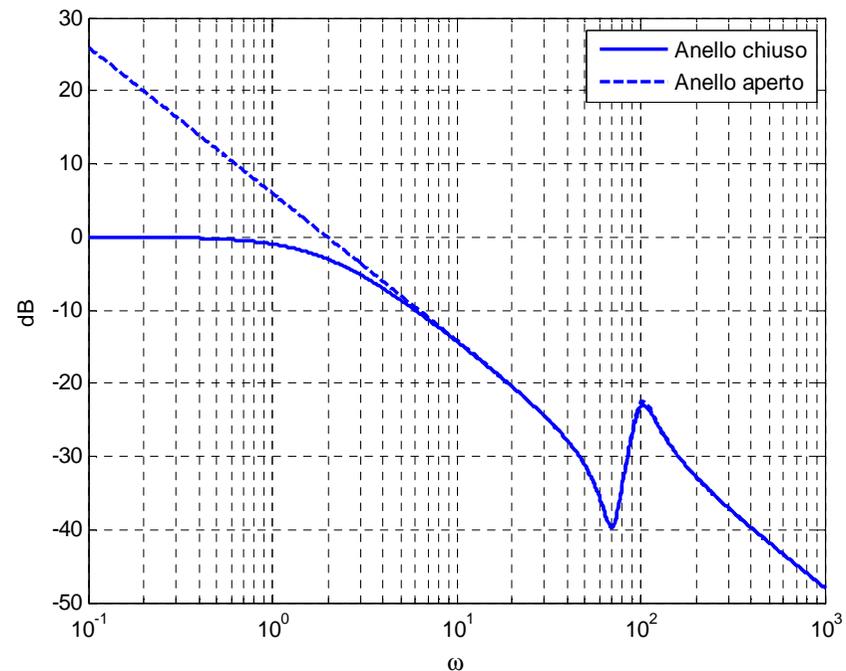
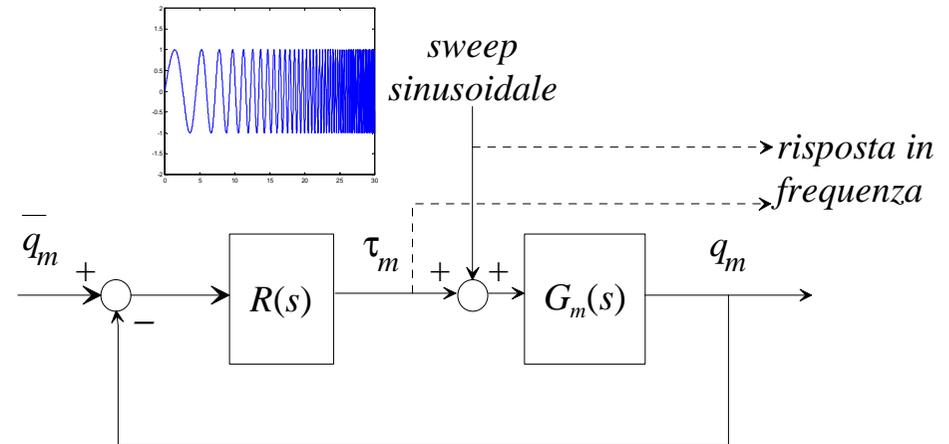
Il **degrado di prestazioni** è ancora più evidente rispetto al caso di chiusura dell'anello di posizione lato motore.

# Identificazione dei parametri

Per il progetto del controllore, o anche per valutare i limiti di prestazione, occorre disporre di stime di  $\zeta_z$ ,  $\omega_z$  e  $\rho$ . Per **identificarne sperimentalmente** i valori, si possono utilizzare gli strumenti di analisi forniti da alcuni prodotti commerciali.

Utilizzando un controllore che conferisce banda passante molto blanda, la risposta in frequenza d'anello si sovrappone a quella in anello chiuso. Si può dimostrare che:

$$r = \frac{|F_m(j\omega_p)|}{|F_m(j\omega_z)|} \approx \frac{1}{4\zeta_z^2} \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2}$$



# Procedura d'identificazione

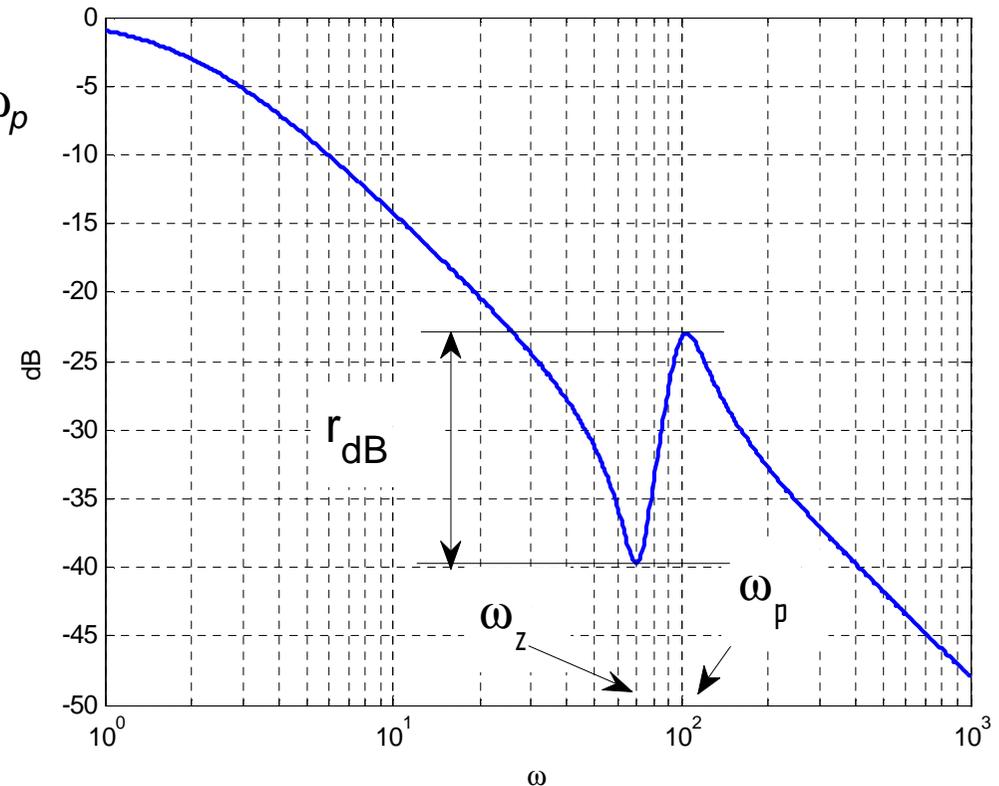


Possiamo formalizzare una procedura di identificazione nei seguenti passi:

1. Progettare un controllore PID con  $\omega_c \ll \hat{\omega}_z$  dove  $\hat{\omega}_z$  è una stima approssimata di  $\omega_z$
2. Eseguire un esperimento in anello chiuso e riportare su grafico l'andamento del modulo  $|F_m(j\omega)|$
3. Dal diagramma ricavare  $\omega_z$  and  $\omega_p$  e  $r_{dB} = |F_m(j\omega_p)|_{dB} - |F_m(j\omega_z)|_{dB}$

4. Calcolare:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 10^{\left(\frac{r_{dB}}{20}\right)} \\ \rho = \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} - 1 \\ \zeta_z = \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\rho}{1+\rho} \end{array} \right.$$



# Regolatori PID: due aspetti realizzativi

---



Si è visto che nel controllo del moto si utilizzano in larga misura regolatori PID (o P o PI). Il comportamento dinamico del regolatore PID è, come è noto, rappresentato dall'equazione nel dominio del tempo:

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\sigma) d\sigma + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

In termini di funzioni di trasferimento:

$$R_{PID}(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

Questa espressione (talvolta detta “scolastica”) cattura il comportamento di massima del regolatore ma non fa emergere una serie di **problemi applicativi** connessi al suo utilizzo.

Due di questi problemi saranno analizzati nel seguito:

- realizzazione dell'azione derivativa
- wind-up dell'integratore



# Azione derivativa

---

L'azione derivativa ideale:

$$u(t) = K_P T_D \frac{de(t)}{dt} \quad R_D(s) = K_P T_D s$$

corrisponde ad un sistema dinamico non fisicamente realizzabile. Per ottenerne una versione realizzabile occorre **filtrarla in alta frequenza**, il che consente anche di tagliare il rumore di misura di alta frequenza.

L'azione derivativa filtrata assume l'espressione:

$$R_D(s) = K_P \frac{s T_D}{1 + s T_D / N}$$

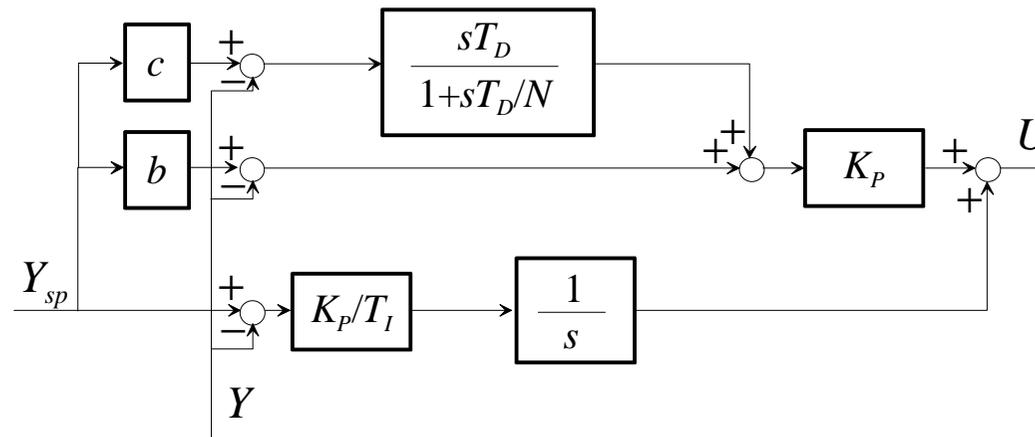
dove  $N$  è un parametro che determina la costante di tempo del polo di alta frequenza. Più elevato è  $N$ , più ampia sarà la banda in cui l'azione derivativa ideale verrà approssimata, ma più alta sarà anche l'amplificazione di eventuali rumori di misura. Tipicamente si sceglie  $N=5\div 10$ .

# Forma standard ISA

La realizzazione della legge di controllo PID nei regolatori commerciali si differenzia da quella scolastica. Un'espressione che racchiude le diverse versioni come casi particolari è la cosiddetta **forma standard ISA**:

$$U(s) = K_P \left( bY_{sp}(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_I} E(s) + \frac{sT_D}{1 + sT_D/N} (cY_{sp}(s) - Y(s)) \right)$$

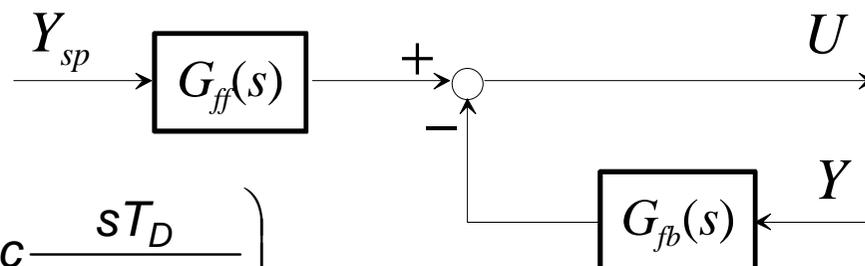
dove  $Y_{sp}$  è il set-point, mentre  $b$  e  $c$  sono due coefficienti che consentono di pesare, rispettivamente nell'azione proporzionale e nell'azione derivativa, il set-point in maniera diversa dalla misura. Per  $b=c=1$  si ricade nella forma "scolastica".





# Forma standard ISA

La forma standard ISA è un regolatore a “due vie”: il set-point e la misura vengono elaborati da due funzioni di trasferimento diverse:



$$G_{ff}(s) = K_P \left( b + \frac{1}{sT_I} + c \frac{sT_D}{1 + sT_D/N} \right)$$

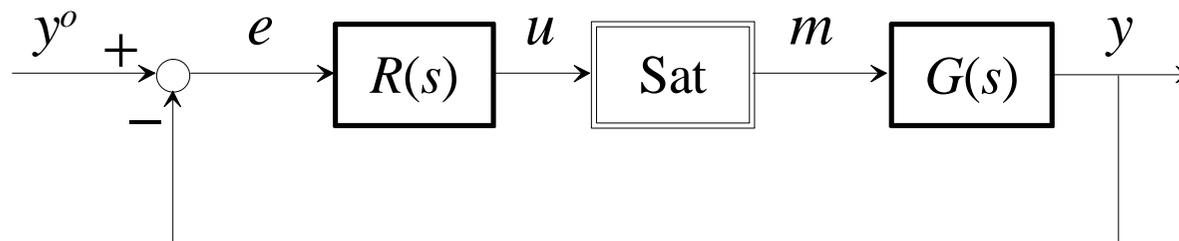
$$G_{fb}(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + sT_D/N} \right)$$

In questo modo si possono scegliere gli zeri della funzione di trasferimento dal set-point in modo opportuno. Se ad esempio il sistema sotto controllo è un doppio integratore ( $G(s)=\mu/s^2$ ), si ottiene:

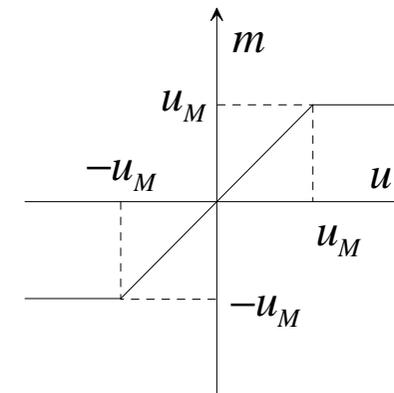
$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = G_{ff}(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)G_{fb}(s)} = \frac{cs^2T_DT_I + bsT_I + 1}{s^3 \frac{T_I}{\mu K_P} + s^2T_DT_I + sT_I + 1}$$

# Il wind-up

Tutti gli attuatori presentano una saturazione, che può essere rappresentata nel sistema di controllo come nel seguente schema :



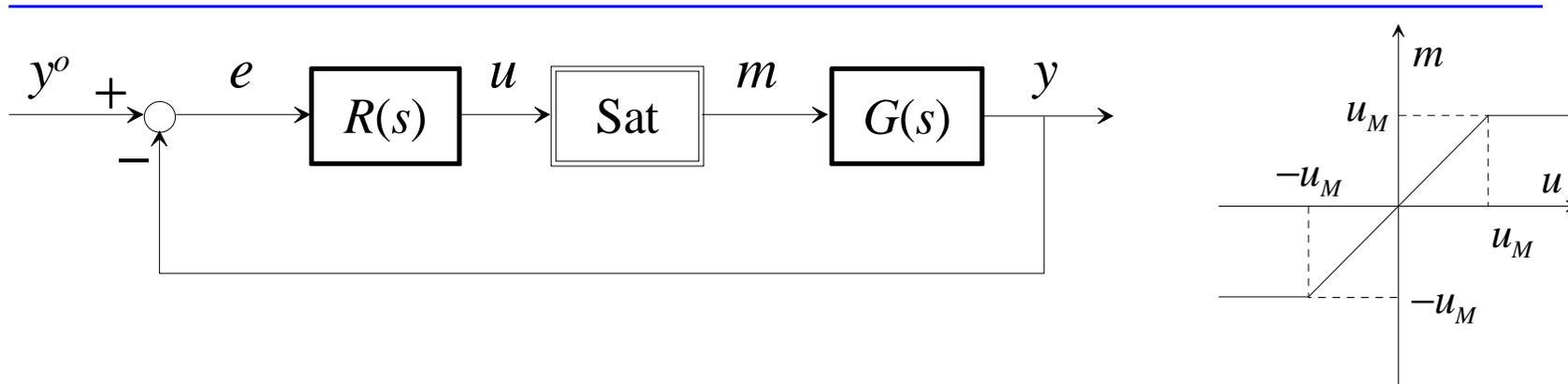
Il blocco "Sat" costituisce una caratteristica di saturazione, che assumeremo simmetrica:



Se il regolatore presenta azione integrale, come il PID, la combinazione di questa con la saturazione dell'attuatore può dar luogo ad un effetto indesiderato, noto come **carica integrale** (o **integral wind-up**), che può pregiudicare le prestazioni del sistema di controllo.



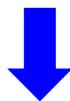
# Il wind-up



Facciamo riferimento a un regolatore puramente integrale ( $R(s) = k/s$ ).  
Supponiamo che l'errore e resti a lungo dello stesso segno, ad esempio positivo.



La variabile di stato dell'integratore, e quindi la variabile  $u$ , cresce indefinitamente e può superare, anche di molto, il valore di saturazione  $u_M$



L'attuatore opera quindi in regime di saturazione ( $m \equiv u_M$ )

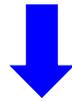


# Il wind-up

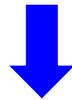
---



Poiché la variabile di controllo è al valore massimo, a un certo punto  $y$  supererà il valore del suo riferimento  $y^o$



L'errore  $e$  diventa negativo per cui la variabile  $m$  dovrebbe lasciare il valore massimo  $u_M$  ed assumere valori inferiori.



Bisogna però attendere che la variabile  $u$  rientri dai valori elevati raggiunti nella fase precedente (**wind-up** o **carica integrale**), fino ad assumere valori inferiori al limite di saturazione  $u_M$ .

Questa fase di scarica, o **desaturazione**, dell'azione integrale, può essere di durata rilevante e dà luogo ad un comportamento anomalo del sistema di controllo.

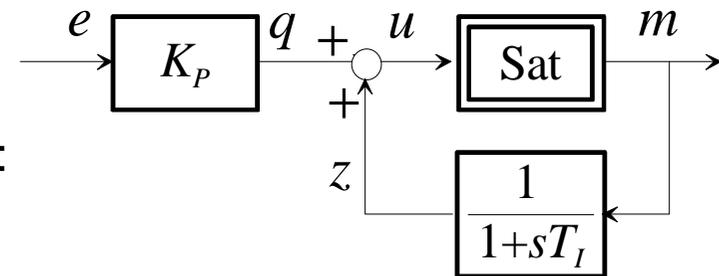
# Regolatori anti wind-up



Un primo modo di ovviare al problema del wind-up consiste nel realizzare il regolatore in modo alternativo. Si supponga di dover implementare un regolatore PI:

$$R(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} \right)$$

e se ne consideri il seguente schema anti wind-up:

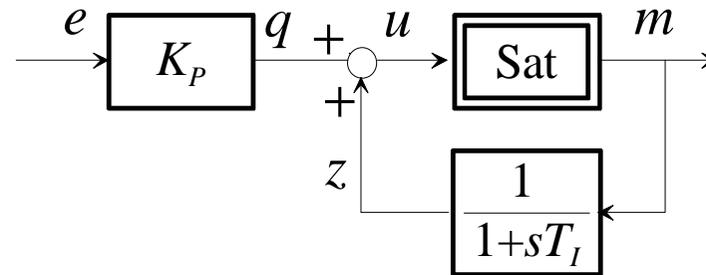


Si osservi che quando la saturazione non è raggiunta, il blocco Sat equivale ad un guadagno unitario, e la funzione di trasferimento da  $e$  a  $m$  diventa:

$$R(s) = K_P \frac{1}{1 - \frac{1}{1+sT_I}} = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} \right)$$

Il comportamento dinamico nominale è quindi quello del regolatore PI.

# Regolatori anti wind-up



Si supponga nuovamente che l'errore  $e$  rimanga dello stesso segno, ad esempio positivo, a lungo.

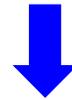


Se  $K_p$  è positivo, anche  $q$  assumerà valori positivi. Si supponga quindi l'attuatore in saturazione con  $m = u_M$ .



Poiché il blocco in retroazione ha guadagno unitario, anche la variabile  $z$  si assesterà sul valore  $u_M$ .

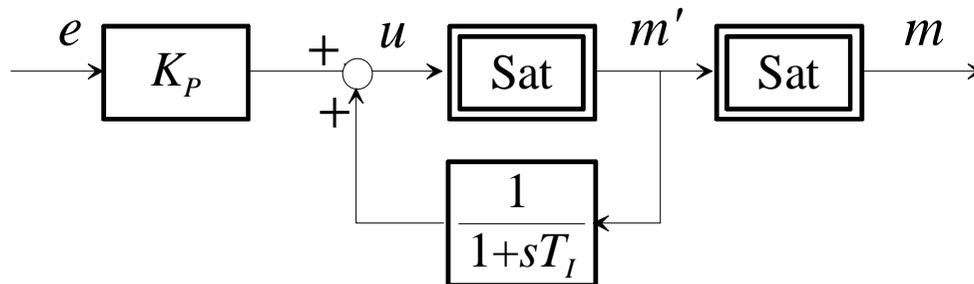
# Regolatori anti wind-up



Quando, per effetto della prolungata azione dell'attuatore, l'errore cambia segno, anche la variabile  $q$  cambierà segno, istantaneamente.



Il fatto che  $q$  assuma valori negativi, unito al fatto che  $z = u_M$ , implica poi che  $u$  assuma immediatamente valori inferiori a  $u_M$ , facendo subito uscire l'attuatore dalla saturazione.



Se la variabile manipolabile  $m$  non è disponibile, si può fare riferimento alla saturazione propria dell'uscita del regolatore.

