

# Controlli automatici

## Schemi avanzati di controllo del moto

**Prof. Paolo Rocco ([paolo.rocco@polimi.it](mailto:paolo.rocco@polimi.it))**

**Politecnico di Milano**

**Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria**

---



# Schemi avanzati di controllo del moto

---



- Anche se il nucleo di un controllore in anello chiuso per il controllo del moto è sempre costituito da un regolatore PID (o P/PI), vi sono altri schemi di controllo che possono completare o sostituire lo schema base.
- Alcuni di questi schemi trovano corrente applicazione nei prodotti commerciali.
- Nel seguito ci occuperemo dei seguenti schemi:
  - Filtro notch
  - Osservatore del disturbo di coppia
  - Controllo nello spazio di stato
  - Input shaping

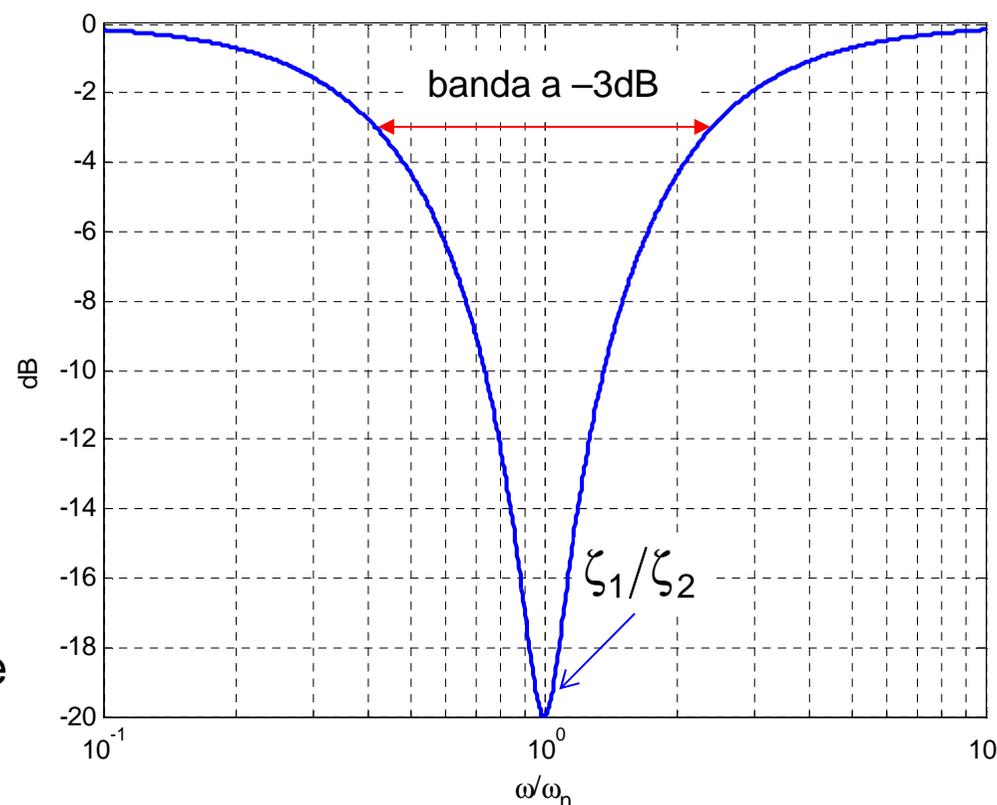
# Filtro notch

Un filtro notch è un sistema dinamico progettato per cancellare una coppia di poli complessi e coniugati, tipicamente a basso smorzamento, presenti nel sistema sotto controllo, sostituendoli con una coppia di poli più smorzati. È quindi caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$G_{nf}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n s + \omega_n^2}$$

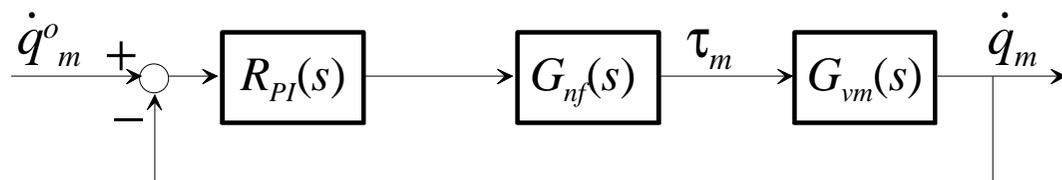
dove  $\omega_n$  è la pulsazione dei poli complessi da cancellare,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  sono smorzamenti, il primo piccolo, il secondo grande.

- Il diagramma di Bode è caratterizzato da una “gola”
- Talvolta il filtro viene assegnato dando la frequenza da bloccare ( $\omega_n$ ) e la “banda a  $-3\text{dB}$ ”



# Filtro notch: utilizzo

In un sistema di controllo del moto, il filtro notch viene di norma inserito nell'anello di velocità, in serie al regolatore PI:

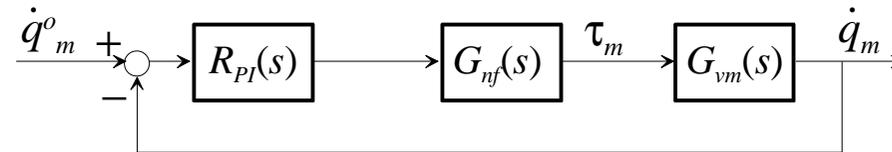


$$G_{nf}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Spesso il filtro viene usato per cancellare una **vibrazione di alta frequenza**, fuori banda, che si manifesta come rumore acustico (fischio)
- Può essere interessante studiare se il filtro notch possa dare vantaggi anche per cancellare la **prima risonanza** del sistema, quella associata al giunto di trasmissione
- In questo caso la pulsazione naturale  $\omega_n$  del filtro viene posta uguale alla stima disponibile della pulsazione  $\omega_p$  dei poli del sistema sotto controllo (funzione di trasferimento  $G_{vm}$ ), e lo smorzamento  $\zeta_1$  degli zeri del filtro approssima lo smorzamento dei poli  $\zeta_p$



# Filtro notch: problemi



Sebbene il filtro notch possa essere utile per migliorare la risposta al riferimento, ci sono **alcuni problemi** connessi al suo utilizzo:

- La frequenza di risonanza sulla quale sintonizzare gli zeri del filtro deve essere conosciuta con buona accuratezza
- I poli poco smorzati del processo cancellati dal filtro rimangono autovalori del sistema in anello chiuso e riemergono come poli di altre funzioni di trasferimento, tipicamente quella dal disturbo di carico all'uscita.
- La realizzazione digitale dei regolatori produce una certa distorsione della risposta in frequenza che potrebbe non far coincidere la frequenza effettiva degli zeri del filtro digitale con la frequenza di progetto. Vi sono metodi per ovviare a questo problema (frequency pre-warping)



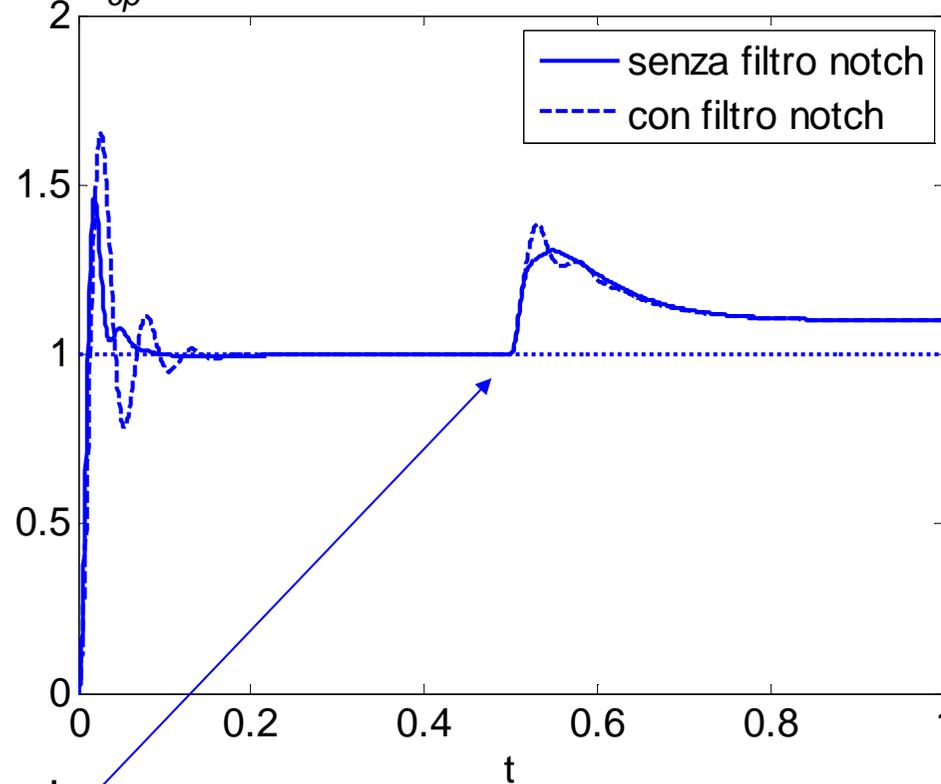
# Simulazioni



Sistema:  $\omega_z = 200 \text{ rad/s}$ ,  $\rho = 1$ ,  $\zeta_z = 0.1$

PI di velocità:  $T_{iv} = 10/\omega_z$ ,  $\tilde{\omega}_{cv} = 1$

P di posizione:  $\tilde{\omega}_{cp} = 0.1$



disturbo di coppia

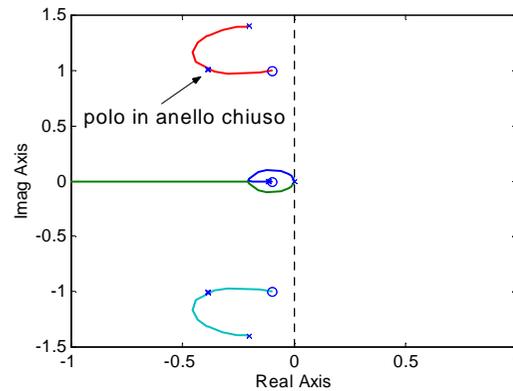
Le cose non migliorano  
(anzi peggiorano).  
Perché?

# Poli dell'anello chiuso di posizione

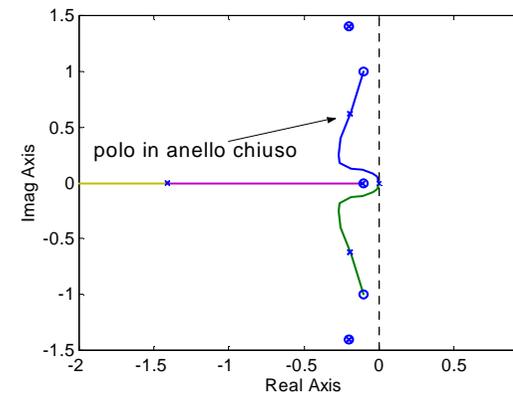


Anello di velocità

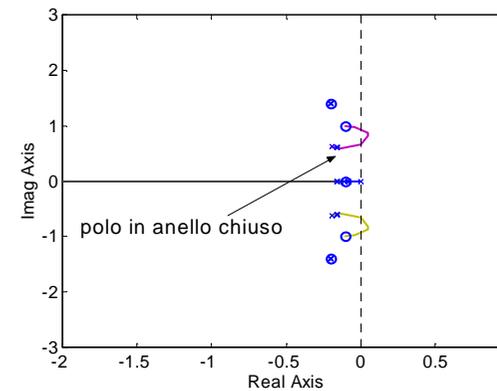
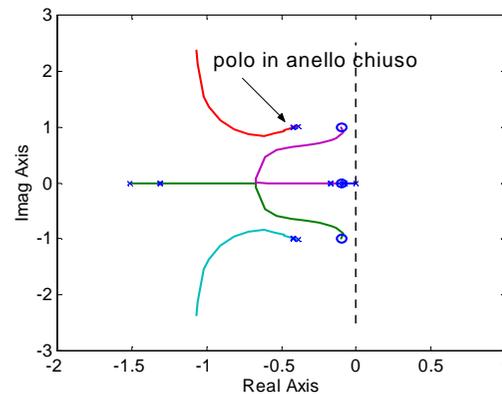
Senza filtro



Con filtro



Anello di posizione

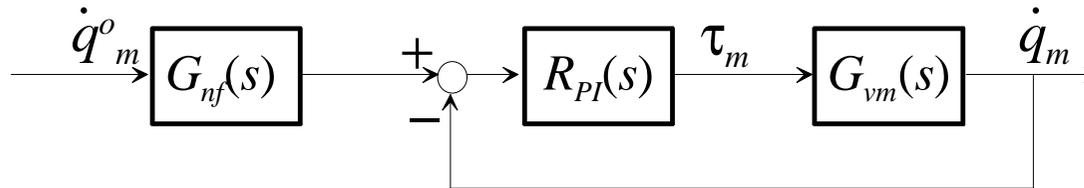


Il filtro non aiuta a conferire smorzamento ai poli in anello chiuso.

# Filtro notch fuori dall'anello di velocità

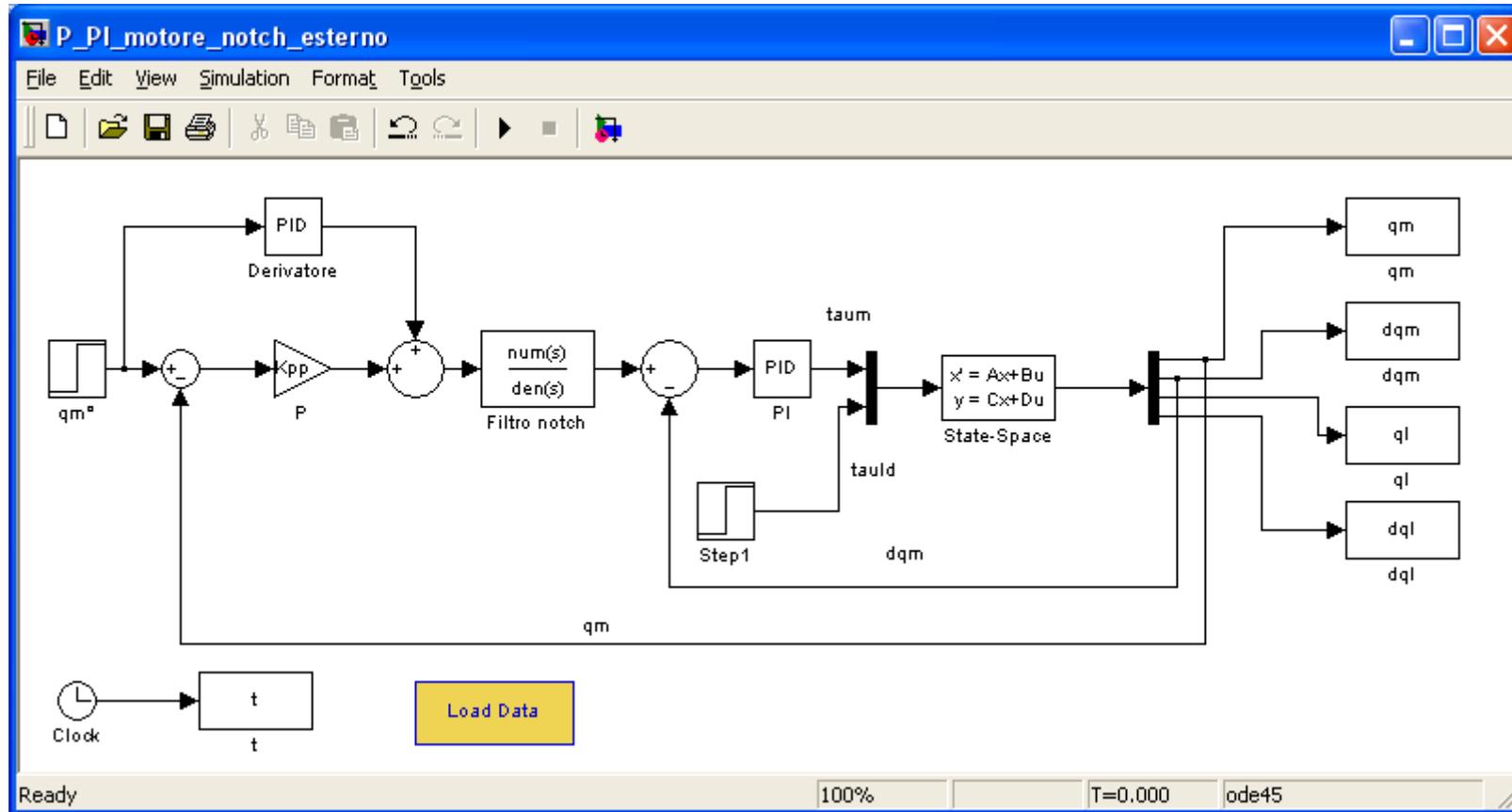


Un'alternativa consiste nel collocare il filtro notch a monte dell'anello di velocità:



- Il numeratore del filtro notch viene sintonizzato sui poli complessi dell'anello chiuso di velocità.
- Con gli stessi guadagni del P/PI si ottengono generalmente dei buoni risultati.

# Simulazioni



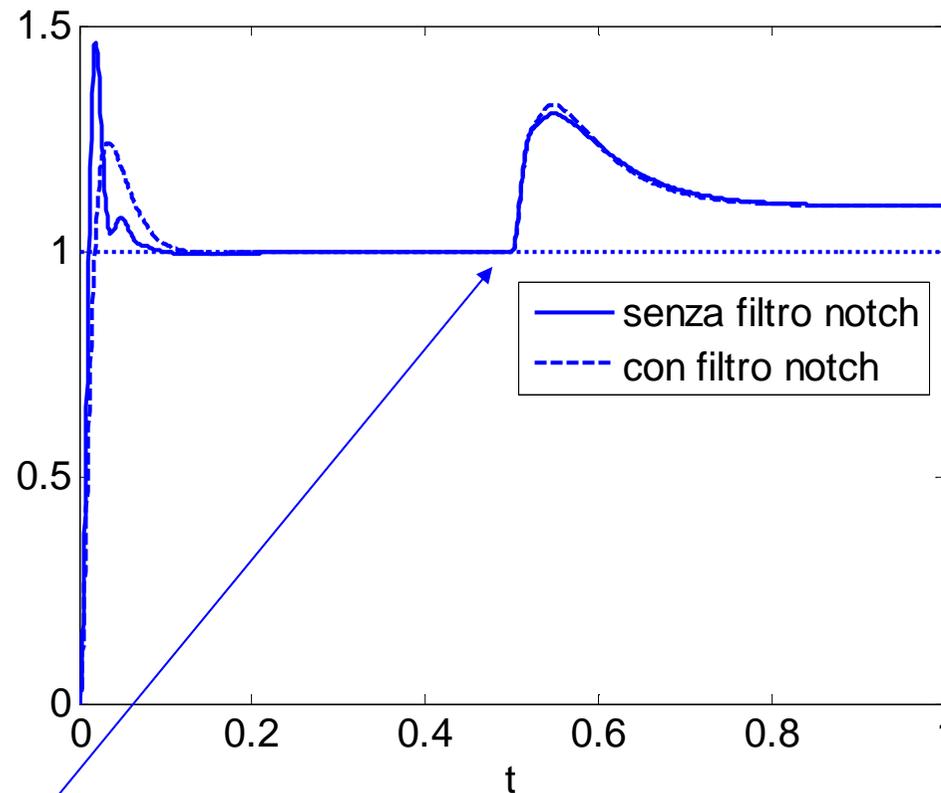
# Simulazioni



Sistema:  $\omega_z = 200 \text{ rad/s}$ ,  $\rho = 1$ ,  $\zeta_z = 0.1$

PI di velocità:  $T_{iv} = 10/\omega_z$ ,  $\tilde{\omega}_{cv} = 1$

P di posizione:  $\tilde{\omega}_{cp} = 0.1$



Si ottiene un sensibile miglioramento della risposta lato carico

disturbo di coppia

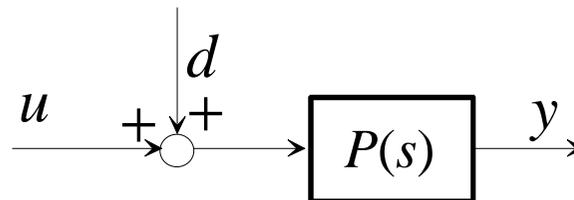
# Osservatore del disturbo



L'osservatore del disturbo di coppia (**TDO: Torque Disturbance Observer**) è uno schema piuttosto diffuso nel controllo del moto, in particolare in applicazioni dove alla coppia nominale prodotta dal motore si sovrappone un disturbo.

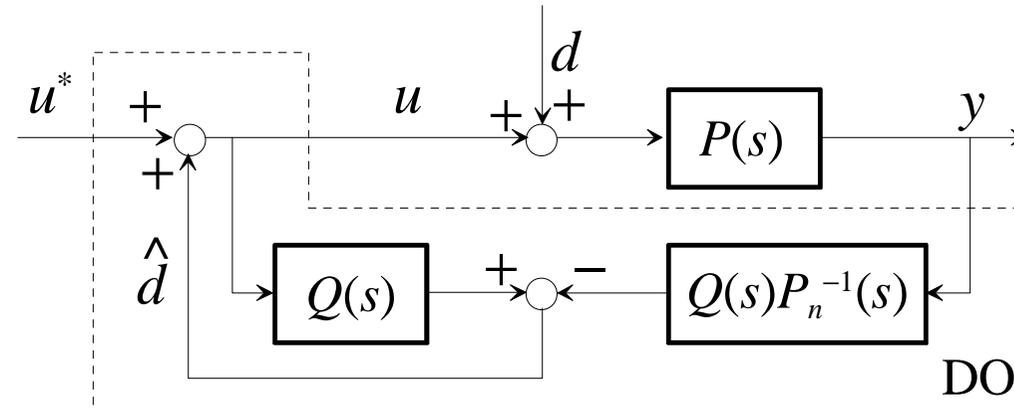
Il metodo stima la coppia di disturbo in ingresso al motore e la compensa con un'azione che si somma a quella del controllore del moto.

Consideriamo inizialmente un generico sistema con ingresso manipolabile  $u$  e disturbo di carico  $d$ :



Ci proponiamo di progettare un sistema che sulla base dei valori assunti da  $u$  e  $y$  determini una stima del disturbo.

# Osservatore del disturbo



In questo schema  $P_n(s)$  è un modello del sistema sotto controllo, di funzione di trasferimento  $P(s)$ , mentre  $Q(s)$  è un filtro passabasso a guadagno unitario tale da rendere realizzabile la funzione di trasferimento  $Q(s)P_n^{-1}(s)$ .

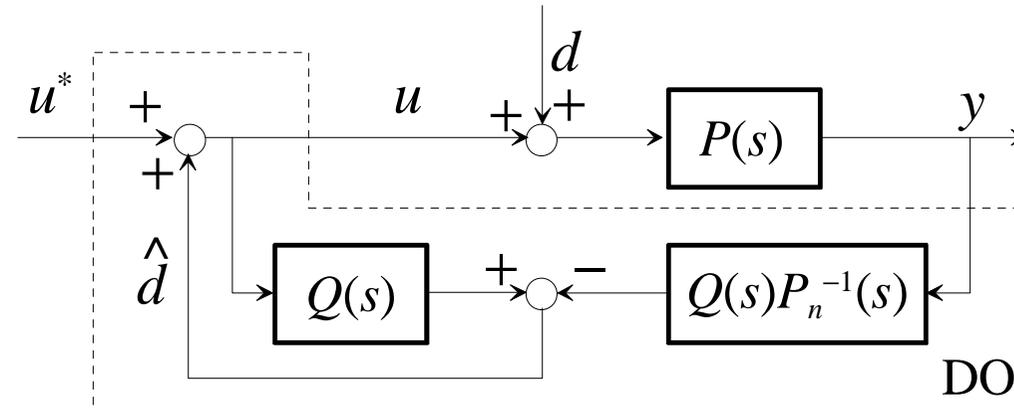
La stima del disturbo prodotta dall'osservatore (DO) è la seguente:

$$\begin{aligned}\hat{d}(s) &= Q(s)u(s) - P_n^{-1}(s)Q(s)y(s) = Q(s)u(s) - P_n^{-1}(s)Q(s)P(s)(d(s) + u(s)) = \\ &= Q(s)(1 - P_n^{-1}(s)P(s))u(s) - Q(s)P_n^{-1}(s)P(s)d(s)\end{aligned}$$

se:  $P_n(s) \approx P(s)$  si ha:  $\hat{d}(s) \approx -Q(s)d(s)$

Pertanto, nella banda passante del filtro  $Q$ , il disturbo è stimato correttamente.

# Osservatore del disturbo



Risolvendo lo schema a blocchi, si ottiene:

$$y(s) = \frac{P(s)(1 - Q(s))}{1 - Q(s) + P_n^{-1}(s)P(s)Q(s)} d(s) + \frac{P(s)}{1 - Q(s) + P_n^{-1}(s)P(s)Q(s)} u^*(s)$$

se:  $P_n(s) \approx P(s)$

$$y(s) = P(s)(1 - Q(s))d(s) + P(s)u^*(s)$$

Pertanto, nella banda passante del filtro  $Q$ , il sistema dal nuovo ingresso  $u^*$  all'uscita  $y$  è **virtualmente esente dal disturbo**.

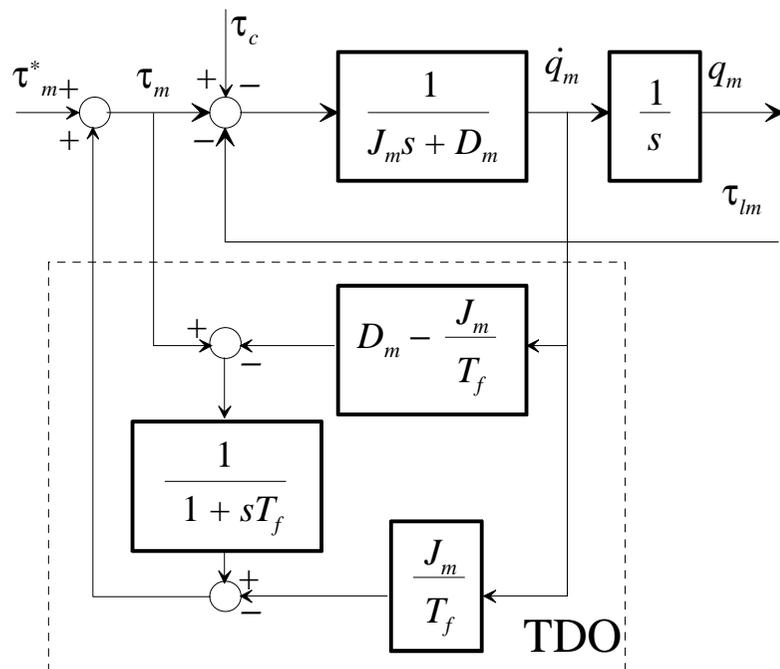
# Osservatore del disturbo di coppia



Consideriamo ora un motore caratterizzato dal momento di inerzia  $J_m$  e dal coefficiente di attrito  $D_m$ . La funzione di trasferimento (da coppia a velocità) è:

$$P(s) = \frac{1}{J_m s + D_m}$$

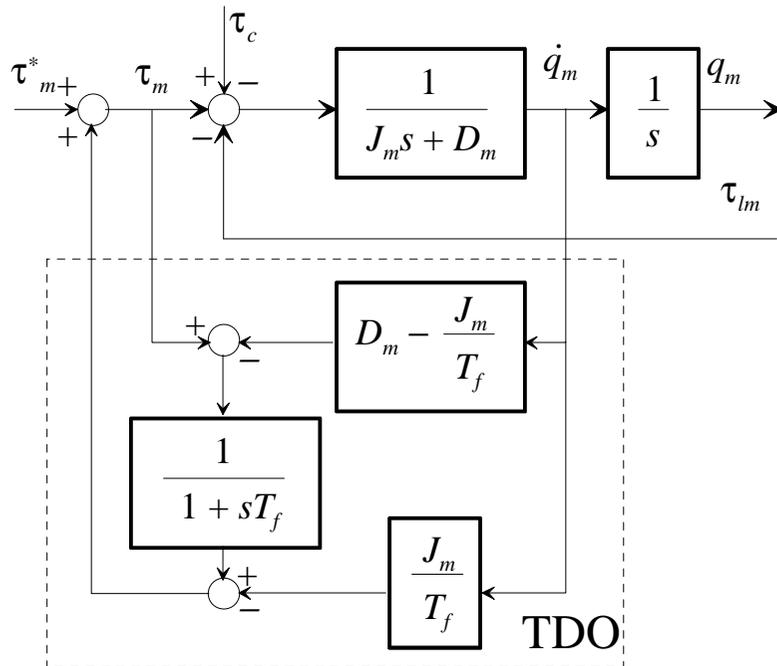
Adottando un filtro Q del primo ordine e rielaborando lo schema dell'osservatore del disturbo si ottiene:



La coppia di disturbo è costituita da una coppia esogena  $\tau_c$  e dalla coppia trasmessa dal carico  $\tau_{lm}$ .

$T_f$  è la costante di tempo (piccola) del filtro Q.

# Osservatore del disturbo di coppia



Elaborando lo schema a blocchi si ottiene:

$$Q_m(s) = \frac{1}{J_m s^2 + D_m s} [\tau_m^*(s) - G_f(s)(\tau_c(s) + \tau_{lm}(s))]$$

con:

$$G_f(s) = \frac{sT_f}{1 + sT_f}$$

filtro passa-alto.

Il disturbo di coppia viene quindi **filtrato molto efficacemente**, in particolare in bassa frequenza.

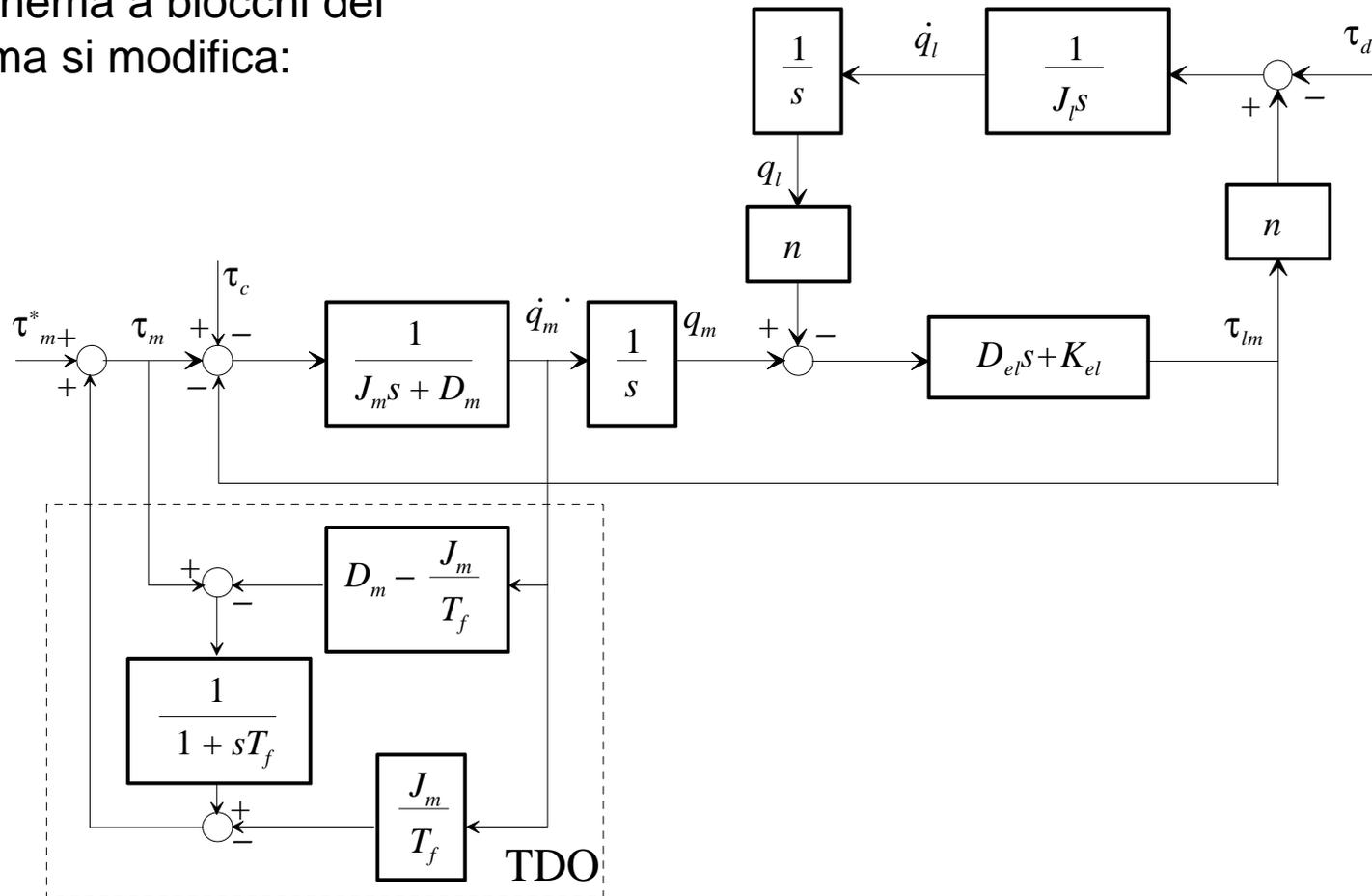
Si osservi che il modello di riferimento è quello di un **giunto rigido**.

Che cosa cambia se tra motore e carico c'è un accoppiamento elastico?

# TDO e modello elastico



Lo schema a blocchi del sistema si modifica:



# TDO e modello elastico



Elaborando lo schema a blocchi con  $\tau_d=0$  si ottiene:

$$Q_m(s) = \frac{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}}{H_f(s)} [\tau_m^*(s) - G_f(s)\tau_c(s)]$$

$$Q_l(s) = \frac{D_{el}s + K_{el}}{H_f(s)} [\tau_m^*(s) - G_f(s)\tau_c(s)]$$

$$\text{con: } H_f(s) = (J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el})(J_ms^2 + D_ms) + G_f(s)(D_{el}s + K_{el})J_ms^2$$

Per  $T_f \rightarrow 0$ :

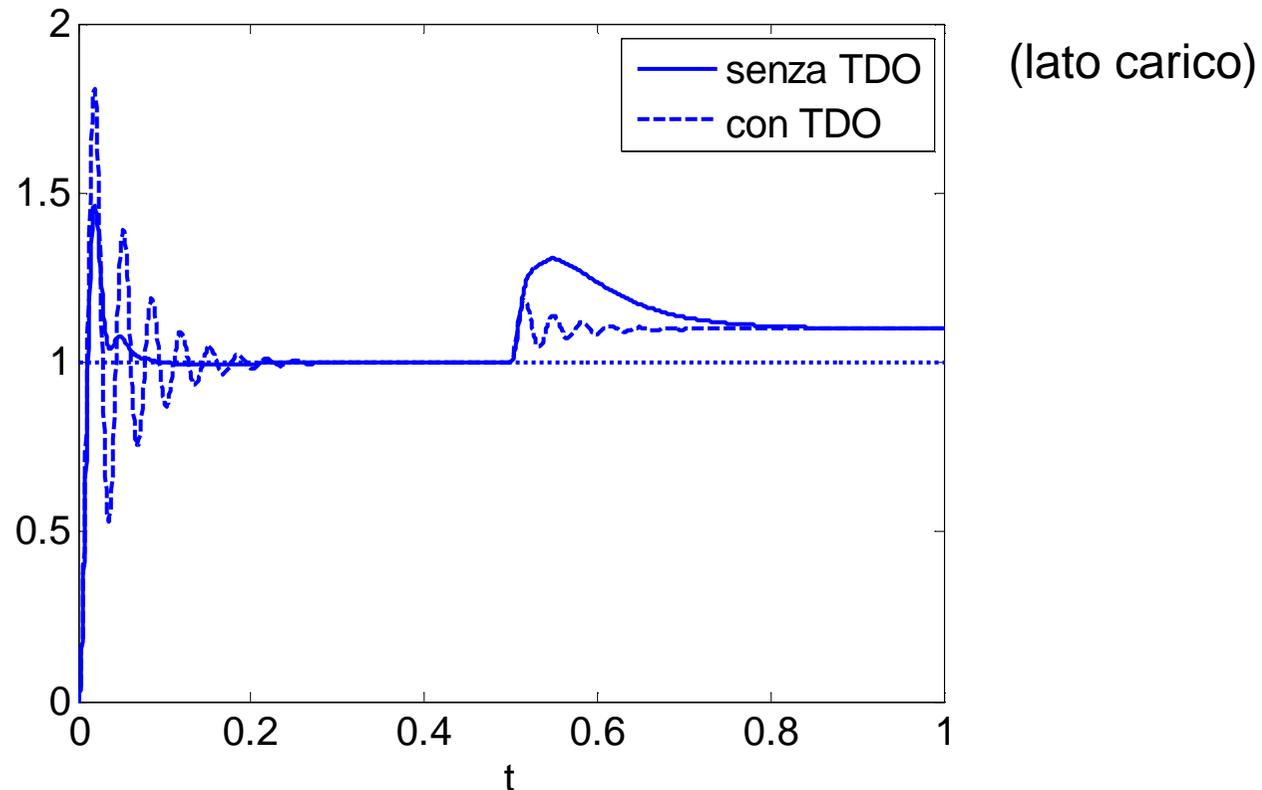
$$Q_m(s) \approx \frac{1}{J_ms^2 + D_ms} \tau_m^*(s)$$

$$Q_l(s) \approx \frac{K_{el} + sD_{el}}{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}} Q_m(s)$$

- Il disturbo di coppia è **completamente rigettato**
- Il motore viene controllato come se fosse sconnesso dal carico
- Il **carico oscilla** rispetto al motore alla pulsazione a rotore bloccato



# Simulazione



**Interpretazione:** L'osservatore viene "tratto in inganno": interpreta la retroazione di coppia dalla trasmissione come se fosse un disturbo esogeno e cerca di neutralizzarlo.

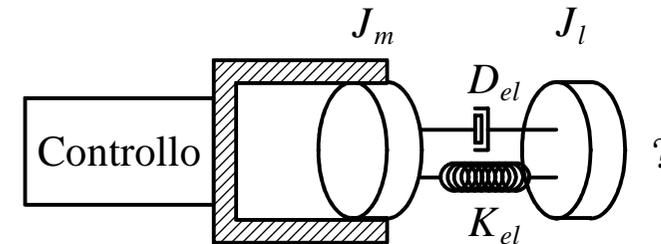
Bisogna usare il TDO **con cautela** nel caso di accoppiamento elastico.

# Controllo nello spazio di stato

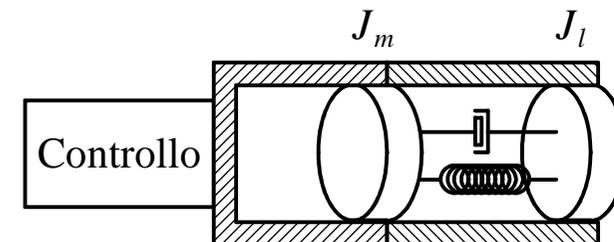


Se si dispone della misura della sola posizione motore, può essere di interesse considerare la metodologia di controllo di **assegnamento degli autovalori**.

Si è infatti visto che un controllo perfetto del motore lascia sostanzialmente il carico in anello aperto.



Con la metodologia di assegnamento degli autovalori con stima dello stato, la legge di controllo tiene conto dell'intero stato del sistema e dovrebbe teoricamente dare prestazioni ottimali sia lato motore sia lato carico





# Modello nello spazio di stato

Il primo passo consiste ovviamente nell'esprimere il modello in termini di sistema dinamico LTI nello spazio di stato:

$$\mathbf{x} = [q_m \quad \dot{q}_m \quad nq_l \quad n\dot{q}_l]^T \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$
$$u = \tau_m, \quad y = q_m \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{el}}{J_m} & -\frac{D_m + D_{el}}{J_m} & \frac{K_{el}}{J_m} & \frac{D_{el}}{J_m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{el}}{J_{lr}} & \frac{D_{el}}{J_{lr}} & -\frac{K_{el}}{J_{lr}} & -\frac{D_{el}}{J_{lr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{lr} = J_l / n^2$$

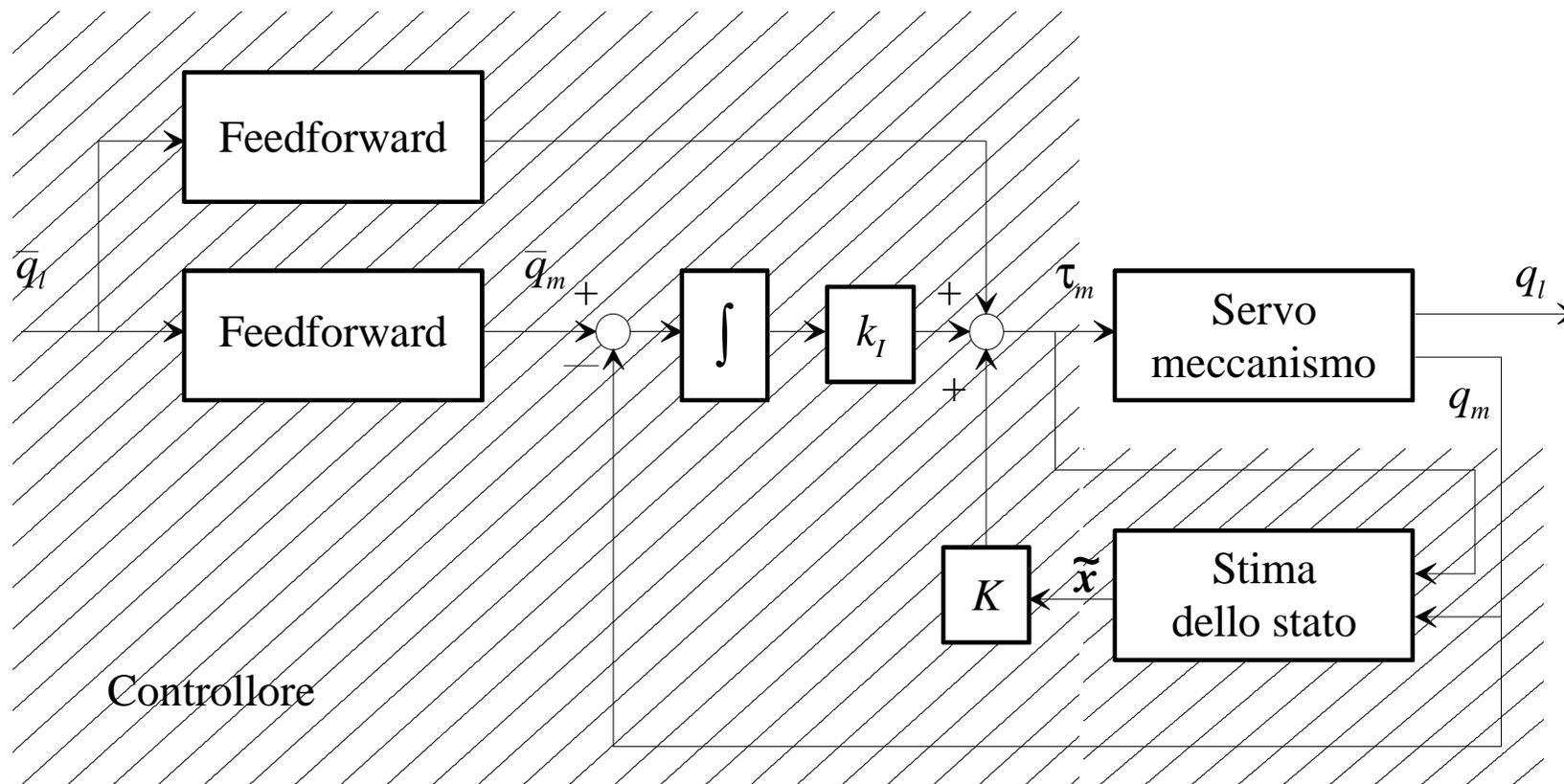
$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

È facile verificare che il sistema è completamente **raggiungibile** dall'ingresso  $u$  e completamente **osservabile** dall'uscita  $y$ .

# Schema di controllo



Progettiamo un sistema ad assegnamento degli autovalori, con stima dello stato, regolazione a zero dell'errore (azione integrale) ed elementi in feedforward:



# Introduzione dell'azione integrale

---



Si introduce l'azione integrale per ottenere errore nullo a regime sul setpoint anche in presenza di disturbi costanti, come l'attrito di Coulomb. Detto  $x_I$  lo stato dell'integratore si avrà:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\dot{x}_I = \bar{y} - y = -\mathbf{C}\mathbf{x} + \bar{y}$$

Come è noto, a questo punto si “allarga” lo stato del sistema, aggiungendo lo stato dell'integratore:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

Le matrici si modificano di conseguenza:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}_u u + \mathbf{G}_y \bar{y}$$

# Introduzione dell'azione integrale

---



$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Grazie al **principio di separazione**, potremo procedere all'assegnamento degli autovalori del sistema in anello chiuso come se lo stato del sistema fosse accessibile, trattando separatamente il problema della stima dello stato dall'uscita.
- Volendo allocare gli autovalori del sistema "aumentato" occorrerà preliminarmente verificare la **raggiungibilità** della coppia  $(\mathbf{F}, \mathbf{G}_u)$ : sappiamo che questa proprietà sussiste se e solo se il sistema sotto controllo è raggiungibile ed osservabile e se la sua funzione di trasferimento non ha zeri in  $s=0$ .
- Poiché queste condizioni sono soddisfatte, si può procedere all'assegnamento degli autovalori con regolazione a zero dell'errore.

# Posizionamento degli autovalori

---



Si scelgono i guadagni in modo da assegnare gli autovalori della matrice in anello chiuso:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{G}_u u \\ u &= \mathbf{K}_{tot} \mathbf{z}, \quad \mathbf{K}_{tot} = [\mathbf{K} \quad k_I] \end{aligned} \Rightarrow \dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{F} + \mathbf{G}_u \mathbf{K}_{tot}) \mathbf{z}$$

- In linea di principio, gli autovalori possono essere scelti arbitrariamente. In realtà la **robustezza** dell'assegnamento degli autovalori dipende fortemente dalle posizioni scelte per gli autovalori desiderati in anello chiuso.
- Una misura di robustezza è il condizionamento della matrice formata dagli **autovettori** del sistema in anello chiuso: più ortogonali sono gli autovettori, migliore è il condizionamento, più robusto è il sistema in anello chiuso.

# Controllo ottimo LQ



Un'alternativa è scegliere i guadagni in modo da minimizzare la cifra di merito quadratica:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{z}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) + u(t)^2] dt$$

In questo modo si imposta un problema di [controllo ottimo Lineare Quadratico](#) (sistema lineare, cifra di merito quadratica).

La routine Matlab “lqr” fornisce la soluzione del problema (cioè la matrice  $\mathbf{K}_{tot}$ ) dati il sistema sotto controllo e la matrice  $\mathbf{Q}$  (che deve essere semidefinita positiva).

Come scegliere la matrice dei pesi  $\mathbf{Q}$ ?

Si può procedere per tentativi oppure seguire strade più strutturate, per le quali si rimanda alla letteratura specifica.

# Ricostruttore asintotico dello stato

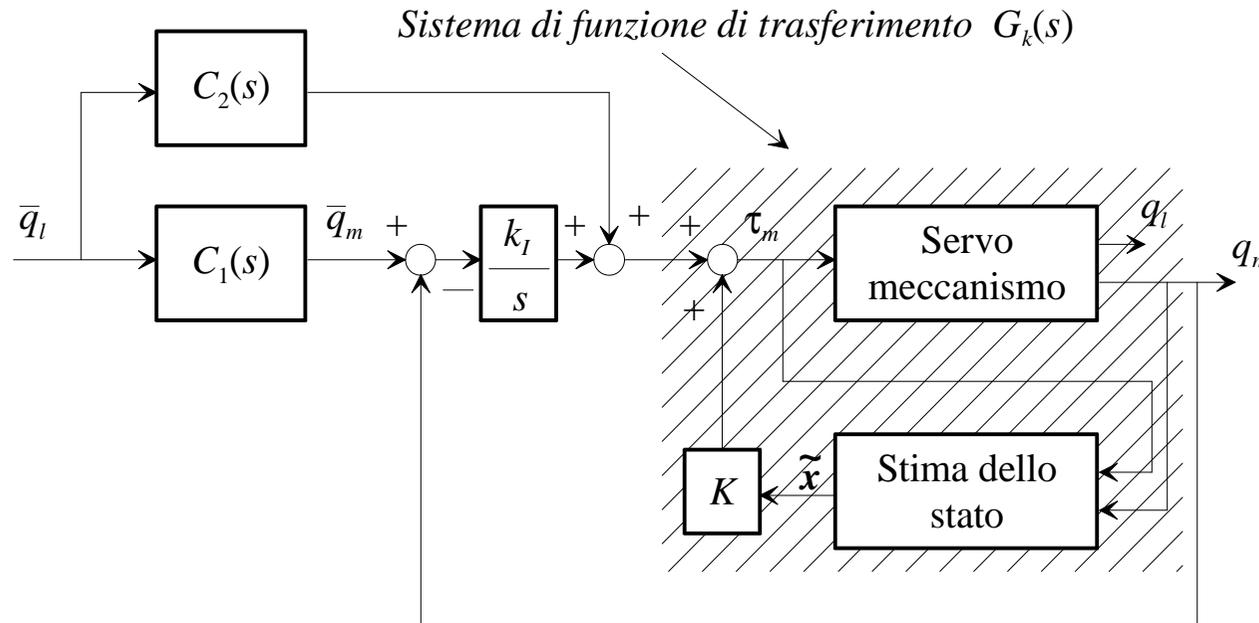


Si scelgono i guadagni del ricostruttore in modo da assegnare gli autovalori della dinamica dell'errore di stima:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(\tilde{y} - y) \\ \tilde{y} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} \quad [\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}]$$

- Come è noto il problema è risolubile se la coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  è **osservabile** (come nel nostro caso).
- Più grande è il modulo degli autovalori di  $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$ , più veloce è la ricostruzione della dinamica, ma più sensibile è la stima ai rumori di misura.
- Anche questo problema può essere impostato in termini di minimizzazione di una cifra di merito integrale, progettando un **filtro di Kalman**. Occorre però modellare il sistema in ambito stocastico (i disturbi vanno interpretati come processi stocastici con determinate medie e varianze).

# Progetto delle azioni di anticipo



Per conferire al progetto precisione dinamica (prontezza e grado di stabilità nei transitori di inseguimento del riferimento) si adottano dei componenti in **feedforward**.

Si osservi che:

$$G_k(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_4 - (\mathbf{A} + \mathbf{BK}))^{-1} \mathbf{B} = \frac{B_m(s)}{\chi_{A+BK}(s)}$$

Numeratore della f.d.t.  
da  $\tau_m$  a  $q_m$

# Progetto delle azioni di anticipo

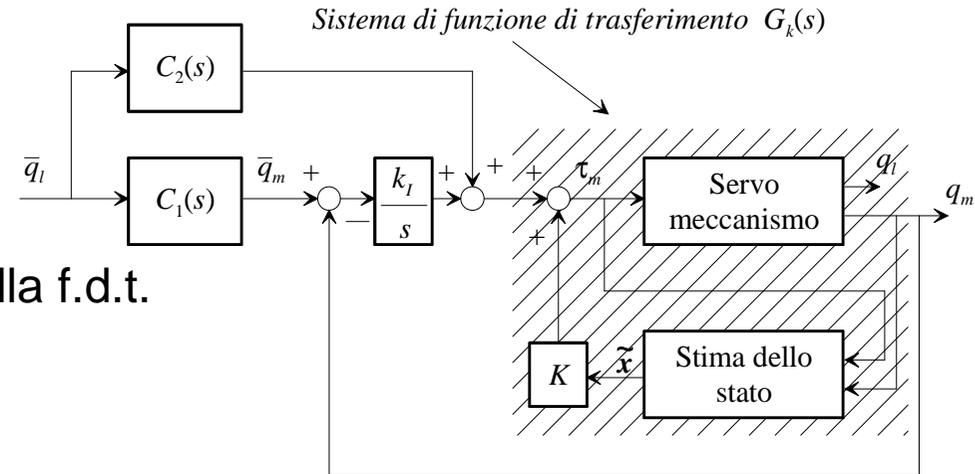


Definiamo:

$$G_{lm}(s) = \frac{B_l(s)}{B_m(s)}$$

Numeratore della f.d.t.  
da  $u$  a  $q_l$

Numeratore della f.d.t.  
da  $u$  a  $q_m$



Sceghieremo:

$$\begin{cases} C_1(s) = G_{lm}(s)^{-1} F^o(s) \\ C_2(s) = G_k(s)^{-1} G_{lm}(s)^{-1} F^o(s) \end{cases}$$



$$\frac{Q_l(s)}{Q_l(s)} = F^o(s)$$

Per ottenere operatori **causali** , il grado relativo di  $F$  deve essere pari almeno a 3.

# Confronti sperimentali

---



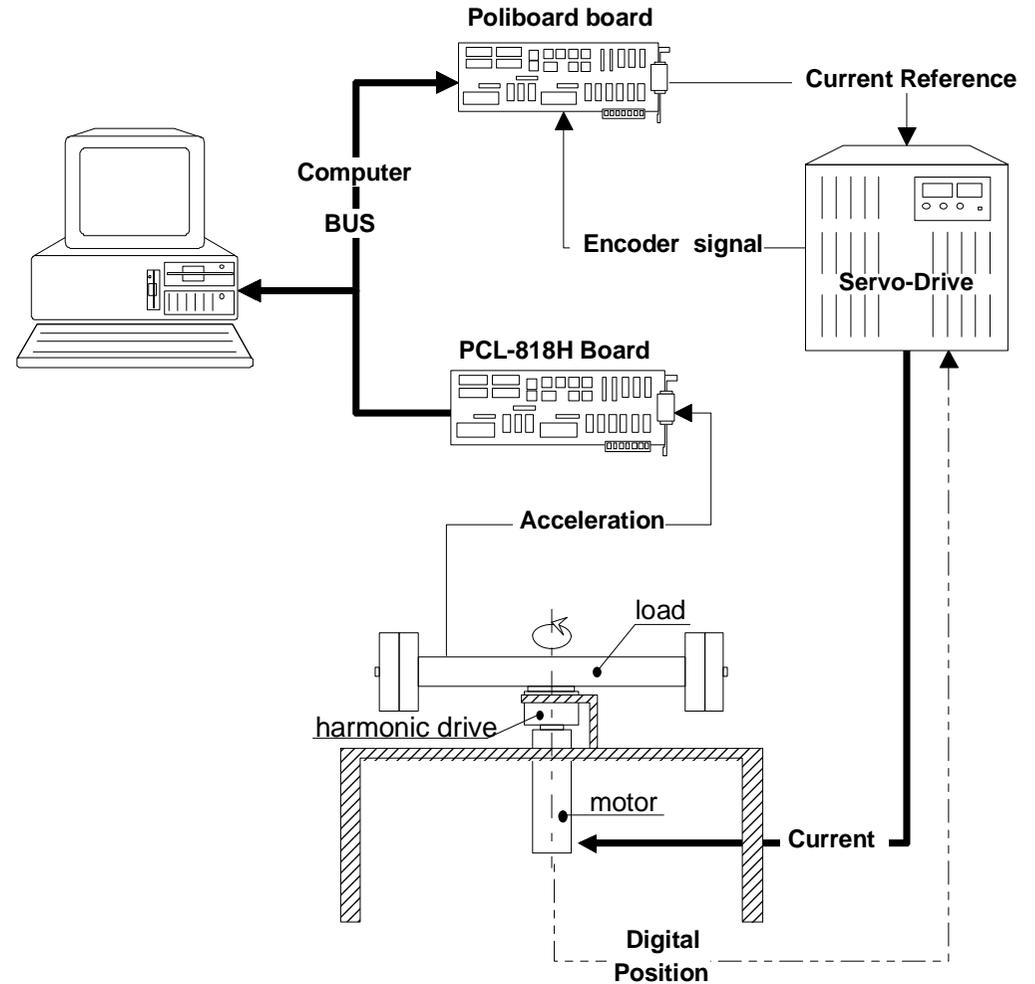
- Di seguito verranno mostrati alcuni **risultati sperimentali** ottenuti su un dispositivo di laboratorio, costituito da un motore brushless, un riduttore Harmonic Drive e un carico inerziale
- Lato motore è possibile misurare la posizione fornita da un encoder
- Lato carico è disponibile un accelerometro dal quale si ricava, per integrazione, una misura di velocità del carico, utilizzata per validazione degli algoritmi di controllo
- Scopo degli esperimenti è di confrontare le prestazioni dei seguenti due schemi:
  - controllo **PID** (P/PI posizione e velocità con anticipo di velocità)
  - controllo **LQG** (controllo nello spazio di stato con legge di controllo ottima lineare quadratica e ricostruzione dello stato del sistema tramite filtro di Kalman)
- I confronti vengono condotti imponendo una traiettoria con profilo di velocità trapezoidale a differenti valori di velocità/accelerazioni e confrontando gli andamenti delle velocità lato carico

# Apparato sperimentale



Torque constant $K_t$	1.6 Nm/Arms
Motor inertia $J_m$	0.00015 Kgm <sup>2</sup>
Load inertia $J_l$	2.7 Kgm <sup>2</sup>
Transmission ratio $n$	100
Viscous friction $D_m$	0.0034 Nms/rad
Stiffness constant $K_{el}$	3.1 Nm/rad
Elasticity damping coeff. $D_{el}$	0.0022 Nms/rad
Antiresonance frequency $\omega_{nz}$	105 rad/s
Complex zeros damping $\zeta_z$	0.063
Resonance frequency $\omega_{np}$	179 rad/s
Complex poles damping $\zeta_p$	0.138
Real pole frequency $1/T$	9.12 rad/s

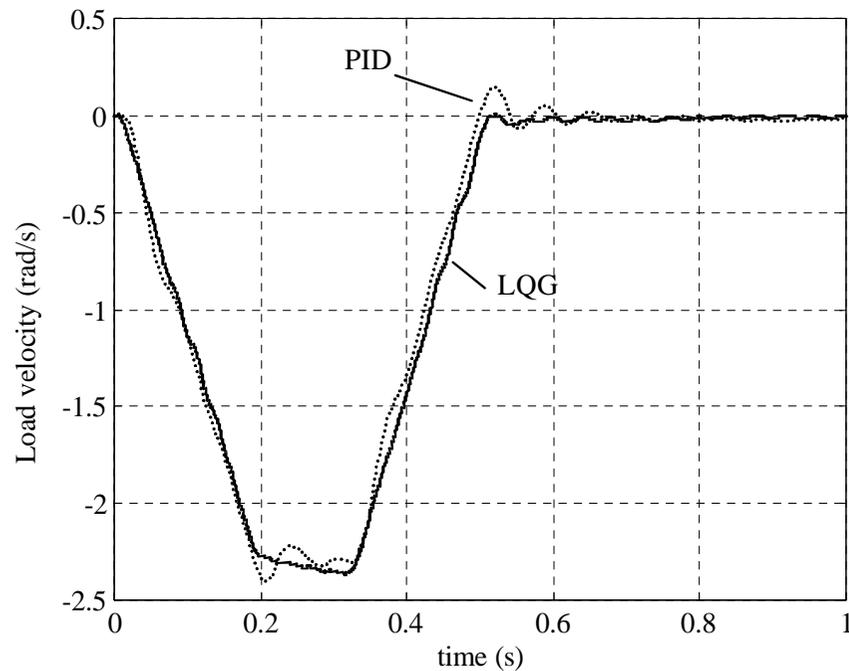
Experiment	1	2	3
Load rotation (deg)	40	30	50
Time for the positioning (s)	0.5	0.5	0.9
Maximum acceleration (rad/s <sup>2</sup> )	1200	900	500



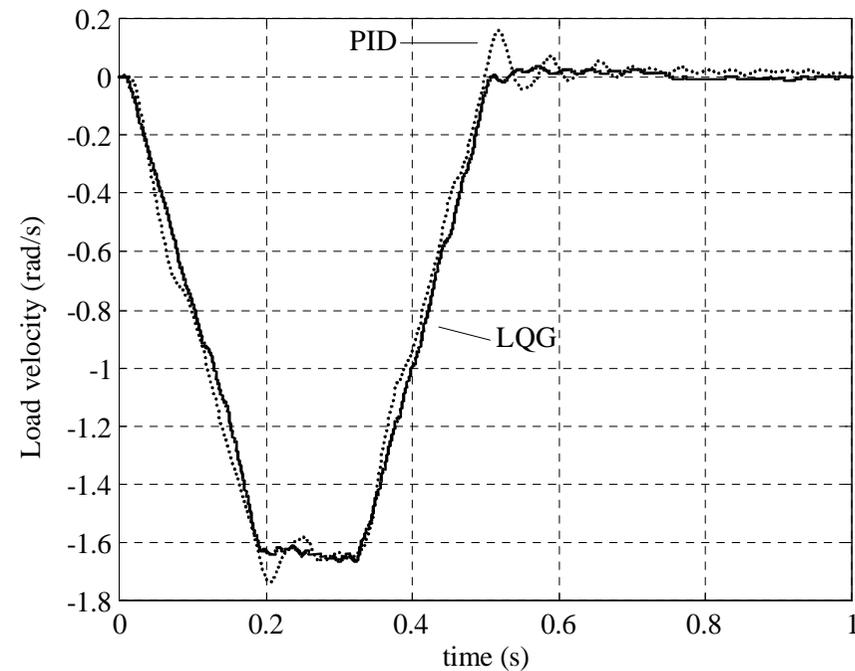
# Confronti sperimentali



- Rotazione di  $40^\circ$  in 0.5 s lato carico
- Accelerazione max:  $1200 \text{ rad/s}^2$  motore



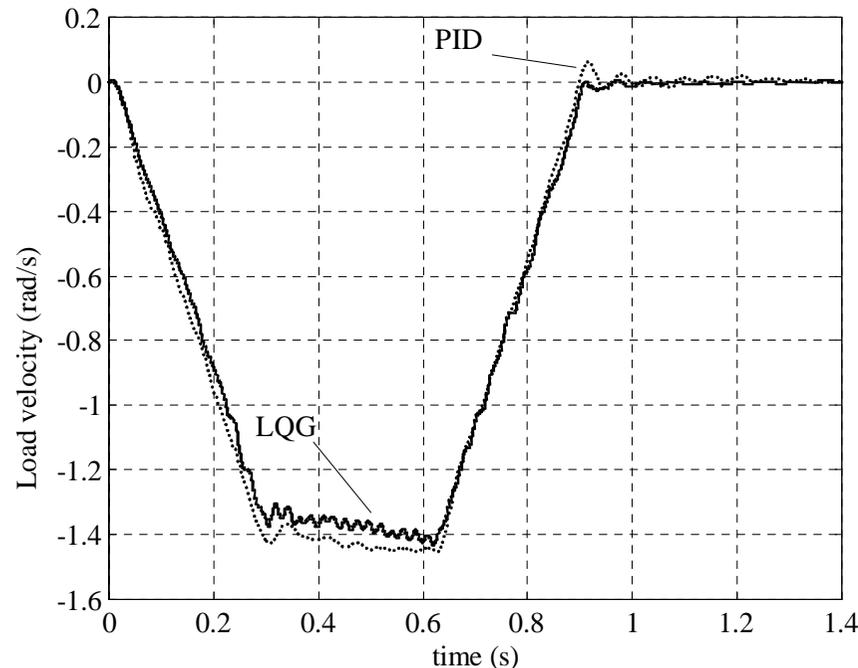
- Rotazione di  $30^\circ$  in 0.5 s lato carico
- Accelerazione max:  $900 \text{ rad/s}^2$  motore



# Confronti sperimentali



- Rotazione di  $50^\circ$  in 0.9 s lato carico
- Accelerazione max:  $500 \text{ rad/s}^2$  motore



A basse velocità si ha la comparsa di ripple, probabilmente dovuto a disturbi sul trasduttore, periodici con la posizione, che a bassa velocità entrano nella banda passante del filtro di Kalman

## Considerazioni sul confronto:

Con il controllo LQG si manifestano dei vantaggi rispetto al controllore PID, che però si pagano in termini di complessità di progettazione, realizzazione, codifica e debugging del controllore.

# Input shaping



Tutti i metodi di controllo visti finora prevedono una retroazione della variabile controllata: sono infatti metodi in anello chiuso.

L'**input shaping** è invece un metodo in **anello aperto** (feedforward): consiste nel modificare l'ingresso al sistema sotto controllo in modo tale da annullare l'effetto di una o più risonanze presenti nel sistema stesso. Richiede la conoscenza della pulsazione naturale e dello smorzamento dei poli complessi e coniugati.

Può essere utilizzato con un certo successo nel controllo di strutture flessibili, quali per esempio bracci robotici per applicazioni spaziali.

Per comprendere il metodo occorre preliminarmente fare alcune considerazioni sulla risposta all'impulso di sistemi risonanti.



RALF, Georgia Tech (Atlanta)



# Risposta all'impulso

Si consideri un sistema dinamico con una coppia di poli complessi e coniugati:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La risposta ad un impulso di ampiezza  $k_i$  che interviene all'istante  $t_i$  è data dall'espressione:

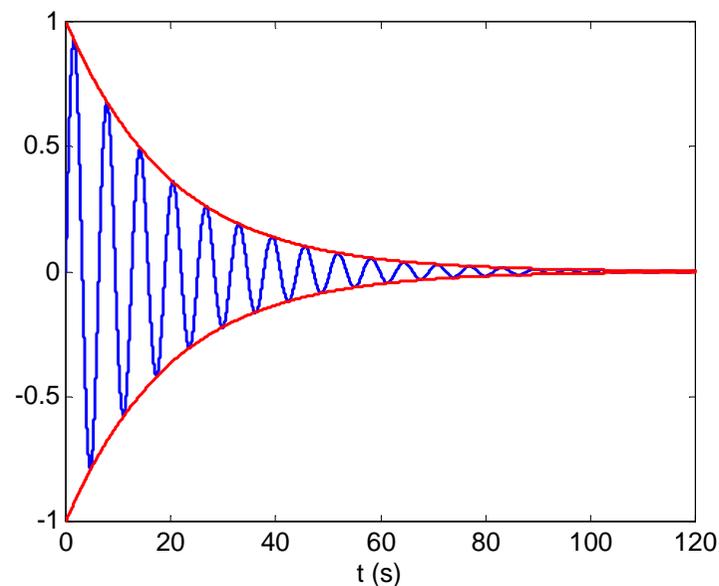
$$y_i(t) = B_i e^{-\zeta\omega_n(t-t_i)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_i)\right), \quad t \geq t_i$$

con:

$$B_i = k_i \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Il periodo (o pseudoperiodo) dell'oscillazione vale:

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$





# Due impulsi

Si supponga ora di eccitare il sistema con **due impulsi**, agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ). La risposta del sistema è la somma delle due risposte all'impulso:

$$y(t) = B_1 e^{-\zeta \omega_n (t-t_1)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_1)\right) + B_2 e^{-\zeta \omega_n (t-t_2)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_2)\right), \quad t \geq t_2$$

È possibile fare in modo che  $y$  sia **nulla** a partire dall'istante  $t_2$ ?  
È sufficiente imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} k_1 e^{\zeta \omega_n t_1} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_1\right) + k_2 e^{\zeta \omega_n t_2} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_2\right) = 0 \\ k_1 e^{\zeta \omega_n t_1} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_1\right) + k_2 e^{\zeta \omega_n t_2} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_2\right) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni nelle quattro incognite  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $t_1$  e  $t_2$ . Per risolverlo possiamo imporre  $t_1=0$  e una condizione di normalizzazione sulle ampiezze:

$$k_1 + k_2 = 1$$

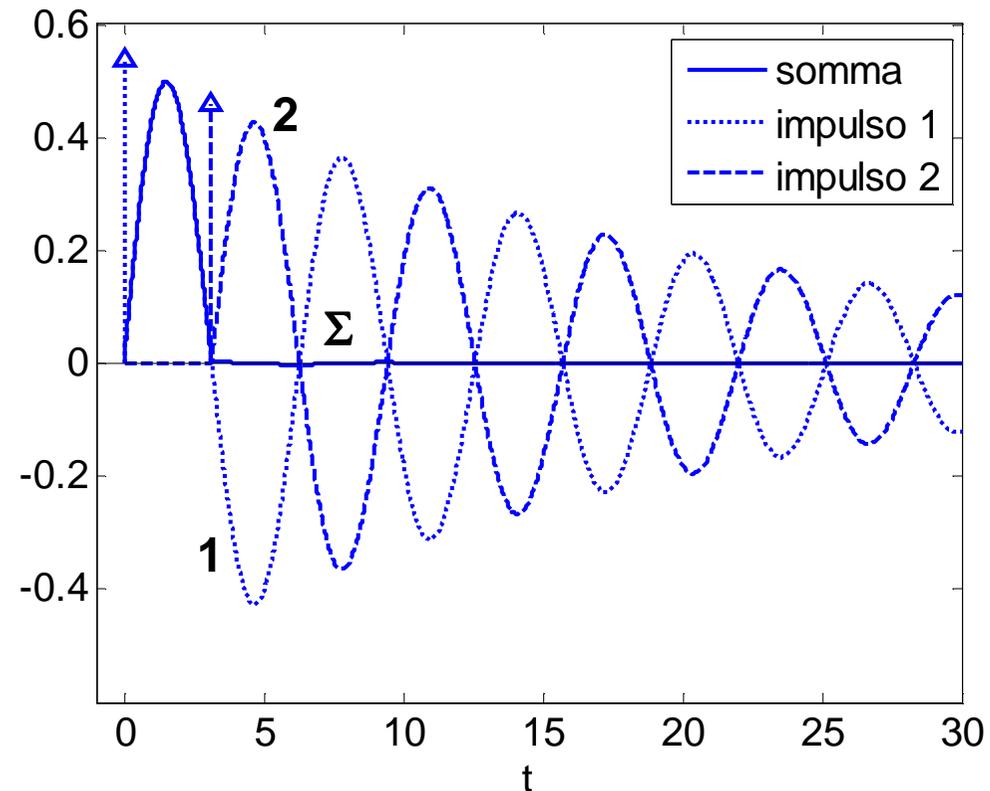
# Due impulsi: soluzione



Risolvendo il sistema si trova:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\Delta T}{2}, \quad k_1 = \frac{1}{1+\alpha}, \quad k_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \quad \left( \alpha = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \right)$$

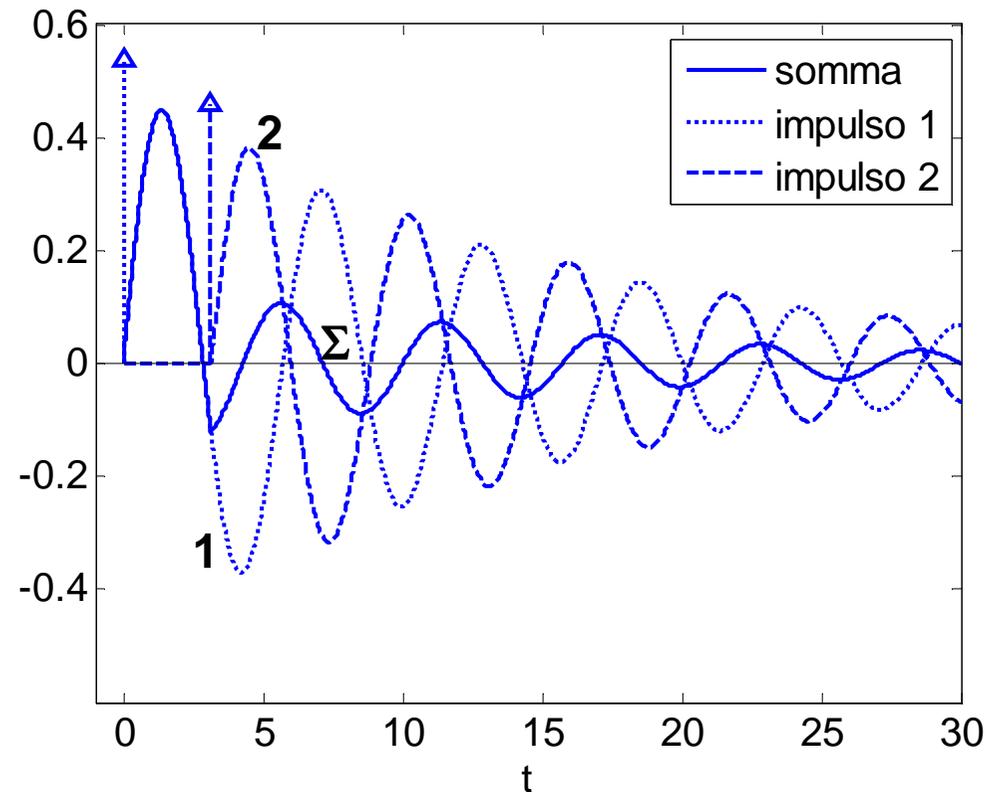
Il secondo impulso va quindi dato dopo metà periodo. Si osservi che entrambi gli impulsi sono positivi.



# Due impulsi: robustezza



Se i parametri  $\omega_n$  e  $\zeta$  sono noti con imprecisione, il risultato dell'operazione peggiora. Ad esempio, con un errore del 10% su  $\omega_n$  e del 20% su  $\zeta$  si ottiene:



Per migliorare la robustezza del metodo, si possono utilizzare più di due impulsi.

# Tre impulsi



Si supponga quindi di eccitare il sistema con tre impulsi, agli istanti  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  ( $t_3 > t_2 > t_1$ ). La risposta del sistema è la somma delle tre risposte all'impulso:

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 B_i e^{-\zeta \omega_n (t-t_i)} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} (t-t_i)\right), \quad t \geq t_3$$

Per fare in modo che  $y$  sia **nulla** a partire dall'istante  $t_3$  si impone:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 k_i e^{\zeta \omega_n t_i} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 k_i e^{\zeta \omega_n t_i} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni nelle sei incognite  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ . Possiamo però imporre anche che non solo  $y$  ma **anche la sua derivata sia nulla** a partire dall'istante  $t_3$ . In questo modo si generano altre due equazioni:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 k_i t_i e^{\zeta \omega_n t_i} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^3 k_i t_i e^{\zeta \omega_n t_i} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_i\right) = 0 \end{cases}$$

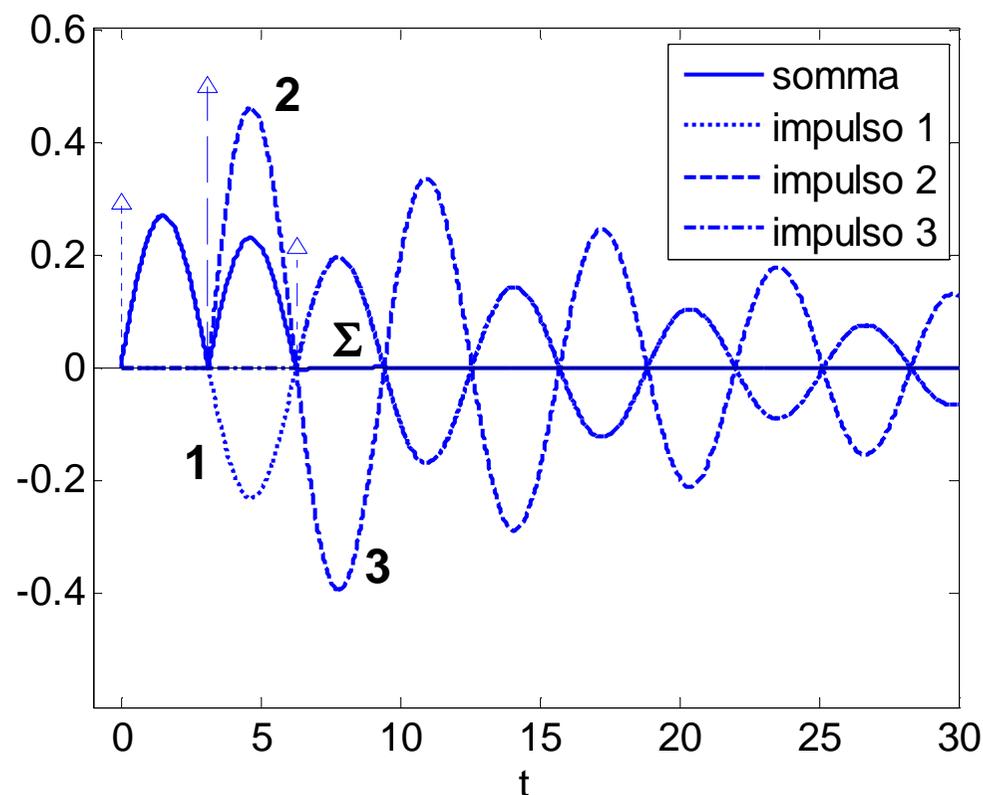


# Tre impulsi: soluzione

Risolviendo il sistema imponendo  $t_1=0$  e la condizione di normalizzazione sulle ampiezze  $k_1 + k_2 + k_3 = 1$  si trova:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\Delta T}{2}, \quad t_3 = \Delta T, \quad k_1 = \frac{1}{1+2\alpha+\alpha^2}, \quad k_2 = \frac{2\alpha}{1+2\alpha+\alpha^2}, \quad k_3 = \frac{\alpha^2}{1+2\alpha+\alpha^2}$$

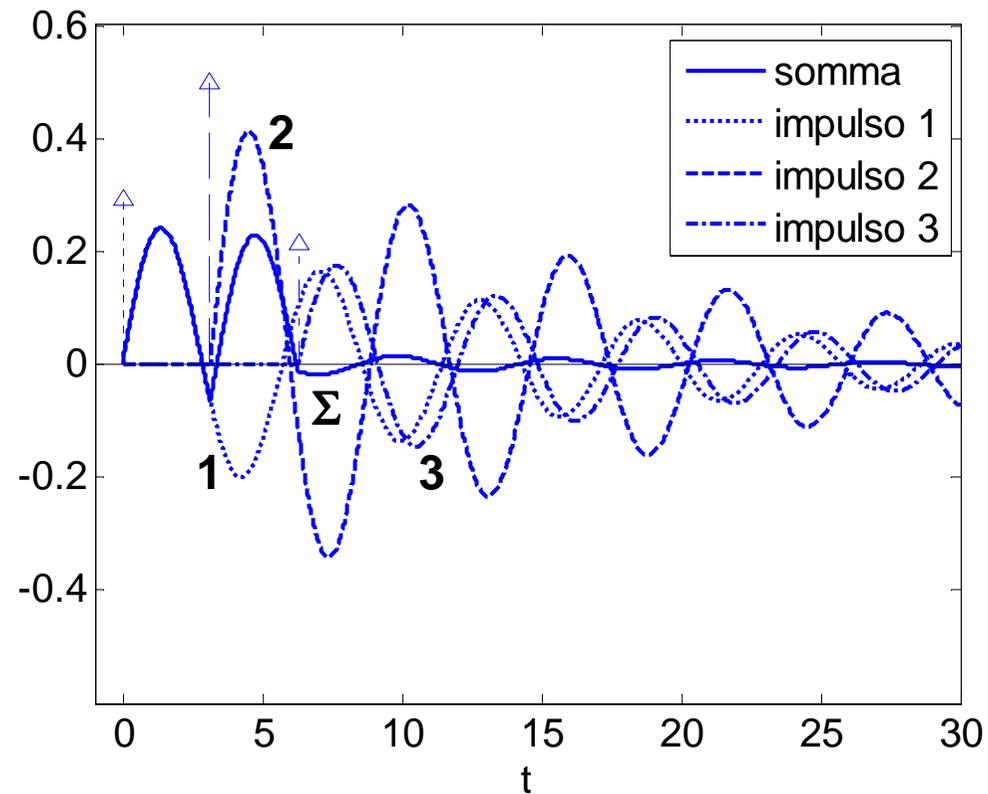
Il secondo impulso va quindi dato dopo metà periodo, il terzo dopo un intero periodo. Si osservi che tutti gli impulsi sono positivi.



# Tre impulsi: robustezza



Con un errore del 10% su  $\omega_n$  e del 20% su  $\zeta$  si ottiene:



Il comportamento, nonostante l'incertezza sui parametri, è buono.



# Input shaping: il metodo

---

Dalle considerazioni precedenti si può elaborare un metodo per modificare l'ingresso di un sistema risonante, in modo da eliminare le oscillazioni.

Sia  $u(t)$  l'ingresso del sistema e  $w(t)$  il treno di impulsi determinato con le considerazioni precedenti:

$$w(t) = k_1\delta(t) + k_2\delta(t - \Delta T/2) + k_3\delta(t - \Delta T)$$

Sia inoltre  $h(t)$  la risposta del sistema di funzione di trasferimento  $G(s)$  a  $w$ :

$$h(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \quad h(t) = 0, t > \Delta T$$

Ricordiamo che con convoluzione di due segnali  $u$  e  $h$  si intende l'operazione:

$$h(t) * u(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

e che la trasformata di Laplace della convoluzione di due segnali è il prodotto delle due trasformate:

$$L[h(t) * u(t)] = H(s)U(s)$$

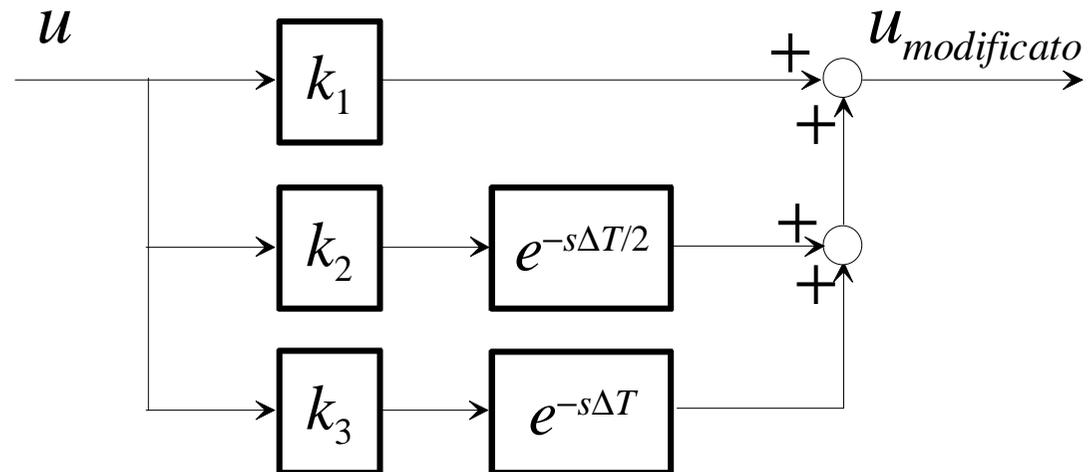
# Input shaping: il metodo

Eseguendo la convoluzione dell'ingresso originario  $u$  con la funzione  $h$  si ottiene un segnale  $y$  privo di oscillazioni a partire dall'istante  $\Delta T$ .

D'altra parte risulta:

$$Y(s) = L[h(t) * u(t)] = H(s)U(s) = G(s)W(s)U(s) = G(s)(k_1 + k_2 e^{-s\Delta T/2} + k_3 e^{-s\Delta T})U(s)$$

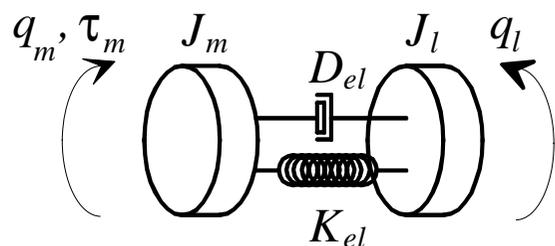
Il metodo quindi consiste nel **prefiltrare il segnale di ingresso** con questo semplice schema a blocchi:



Sono state sviluppate anche versioni adattative del metodo ed estensioni al caso di più modi risonanti.

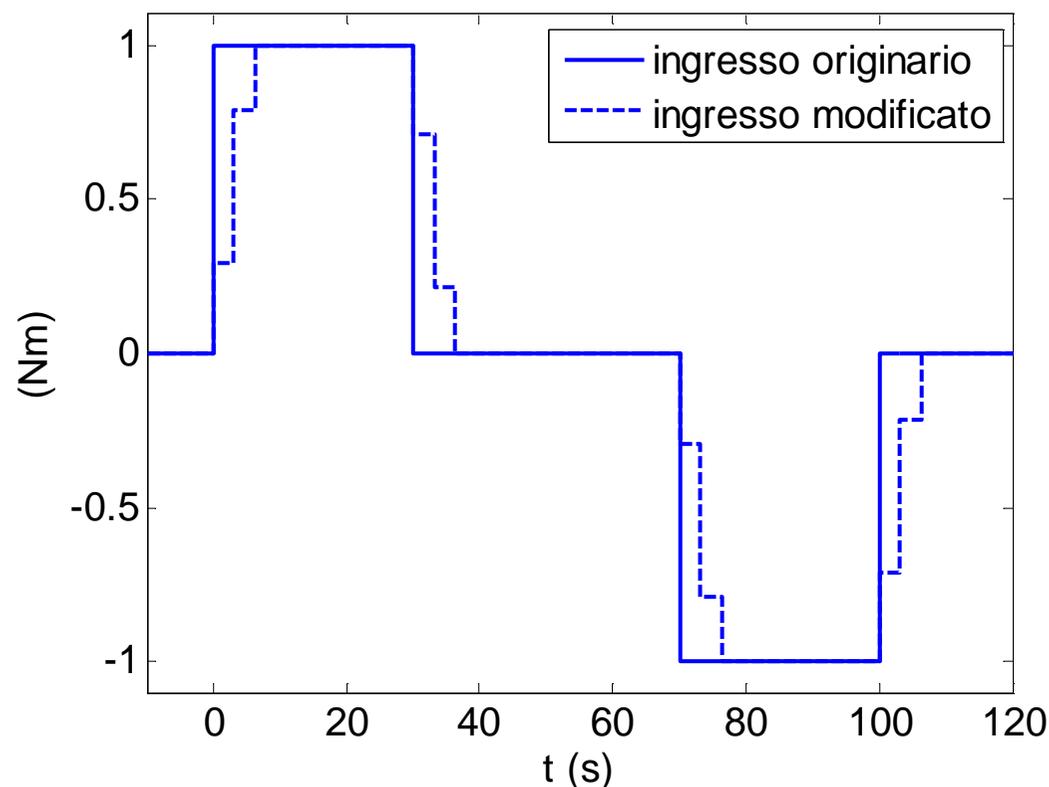
# Esempio

Applichiamo il metodo dell'input shaping a un servomeccanismo a due masse.



$$\omega_n = 1, \quad \zeta = 0.05$$

Supponiamo che l'ingresso di comando sia un profilo di coppia di tipo rettangolare. Calcoliamo con la metodologia vista i coefficienti  $k_i$  e i ritardi di tempo. Si ottiene l'ingresso modificato:



# Esempio



Simuliamo la risposta, in termini di velocità lato carico. Prevediamo un'incertezza del 10% su  $\omega_n$  e del 20% su  $\zeta$ .

Nonostante l'incertezza, le **oscillazioni** sono quasi completamente **rimosse**. Si genera un ritardo, che però può essere compensato facendo partire in anticipo l'ingresso.

