Controlli automatici

Pianificazione del moto

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

Pianificazione della traiettoria

Nelle macchine automatiche la movimentazione delle parti meccaniche avviene sempre più spesso mediante attuatori elettrici (cosiddette *camme elettriche*) che stanno via via soppiantando le movimentazioni meccaniche (*camme meccaniche*) eseguite mediante cinematismi

Ciascuno di questi attuatori compie un movimento, passando genericamente da un punto iniziale ad un punto finale.

Pianificare la traiettoria significa stabilire la modalità con cui il movimento dal punto iniziale al punto finale deve avvenire, ovvero con quali profili di posizione, velocità ed accelerazione. Una corretta pianificazione consente al sistema di controllo del moto in anello chiuso di inseguire correttamente la traiettoria, evitando raggiungimento delle saturazioni e sollecitazioni alla struttura.

La pianificazione del moto è il primo degli argomenti che affronteremo relativamente alla problematica del controllo del moto.

Criteri per la selezione della traiettoria

Alcuni criteri per la scelta della traiettoria possono essere:

- basse complessità computazionale e occupazione di memoria
- continuità di posizioni e velocità (ed eventualmente di accelerazioni)
- minimizzazione di effetti indesiderati (curvatura non regolare)
- accuratezza (assenza di sovraelongazione al termine)

Sono di interesse due situazioni:

- Moto punto-punto
  si specificano solo i punti estremi ed il tempo di transizione

- Moto su percorso assegnato
  si specificano anche dei punti intermedi

Traiettorie polinomiali

Il caso più semplice di pianificazione della traiettoria per moto punto-punto si ha quando sono specificate alcune condizioni iniziali e finali sulla posizione, velocità ed eventualmente anche su accelerazione e jerk (derivata dell'accelerazione) ed il tempo di percorrenza.
Si possono prendere in considerazione funzioni polinomiali del tipo:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

Più alto è il grado n del polinomio, più condizioni al contorno si possono soddisfare e più *smooth* (dolce) sarà la traiettoria.

Traiettorie cubiche

Si supponga che siano specificate le seguenti condizioni al contorno:

- un istante iniziale ed un istante finale t_i e t_f
- posizione e velocità iniziale q_i e $\dot{q}_i$
- posizione e velocità finale q_f e $\dot{q}_f$

Si hanno quindi quattro condizioni al contorno, per poter rispettare le quali occorre utilizzare un polinomio di grado almeno pari a tre (cubica):

$$q(t) = a_0 + a_1(t-t_i) + a_2(t-t_i)^2 + a_3(t-t_i)^3$$

Imponiamo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} q(t_i) &= q_i \\ \dot{q}(t_i) &= \dot{q}_i \\ q(t_f) &= q_f \\ \dot{q}(t_f) &= \dot{q}_f \end{aligned}$$

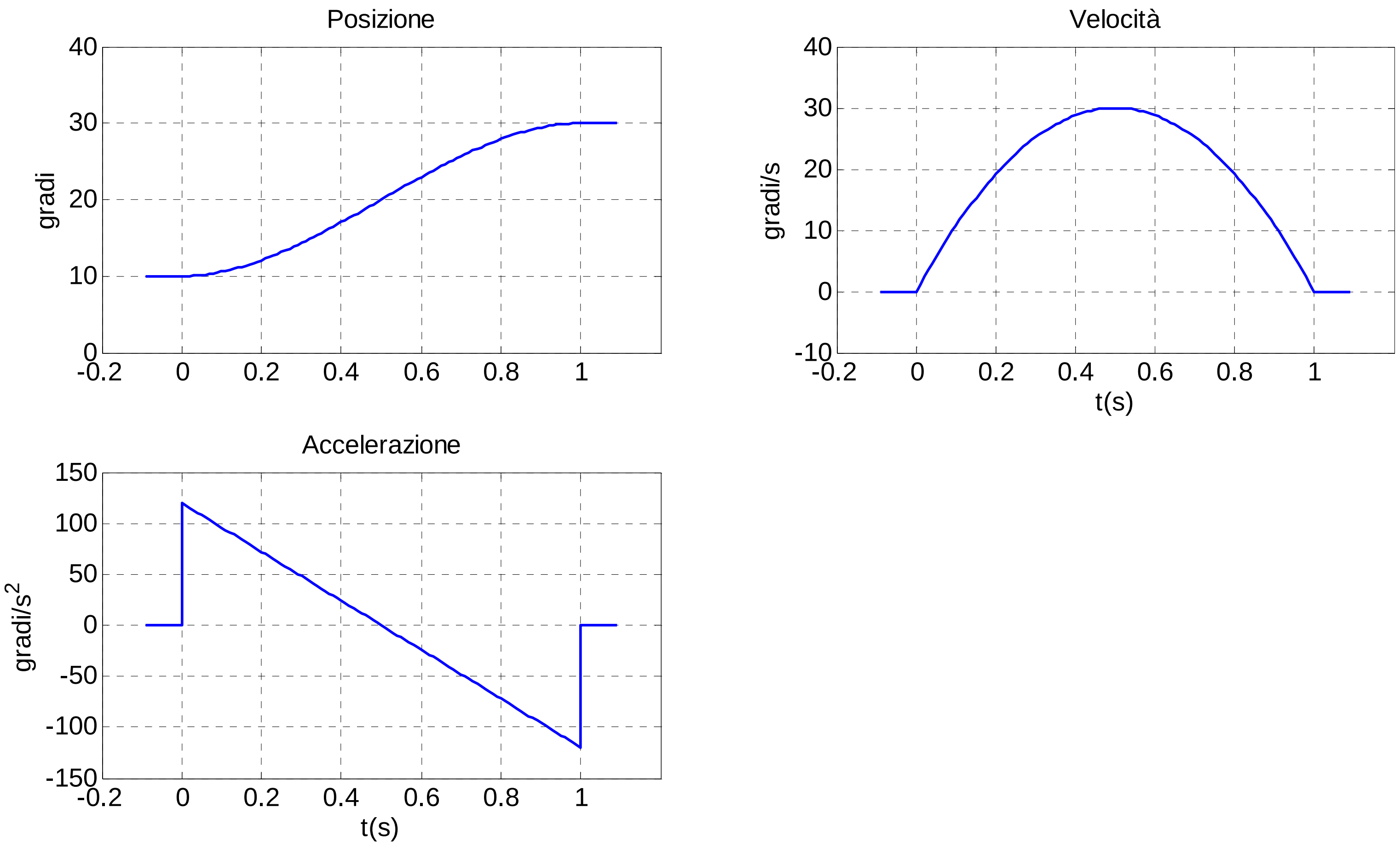
si ottiene:

$$\begin{aligned} a_0 &= q_i \\ a_1 &= \dot{q}_i \\ a_2 &= \frac{-3(q_i - q_f) - (2\dot{q}_i + \dot{q}_f)T}{T^2} \\ a_3 &= \frac{2(q_i - q_f) + (\dot{q}_i + \dot{q}_f)T}{T^3} \end{aligned}$$

$$T = t_f - t_i$$

Traiettorie cubiche: esempio

$$t_i = 0,\ t_f = 1s,\ q_i = 10°,\ q_f = 30°,\ \dot{q}_i = \dot{q}_f = 0°/s$$



Polinomi di grado cinque

Per imporre condizioni anche sulle accelerazioni, occorre passare a polinomi di grado 5:

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + a_3(t - t_i)^3 + a_4(t - t_i)^4 + a_5(t - t_i)^5$$

Imponendo le condizioni al contorno:

$$q(t_i) = q_i \quad q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(t_i) = \dot{q}_i \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f$$

$$\ddot{q}(t_i) = \ddot{q}_i \quad \ddot{q}(t_f) = \ddot{q}_f$$

si ottiene:

$$a_0 = q_i$$

$$a_1 = \dot{q}_i$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\ddot{q}_i$$

$$a_3 = \frac{20(q_f - q_i) - (8\dot{q}_f + 12\dot{q}_i)T - (3\ddot{q}_f - \ddot{q}_i)T^2}{2T^3}$$

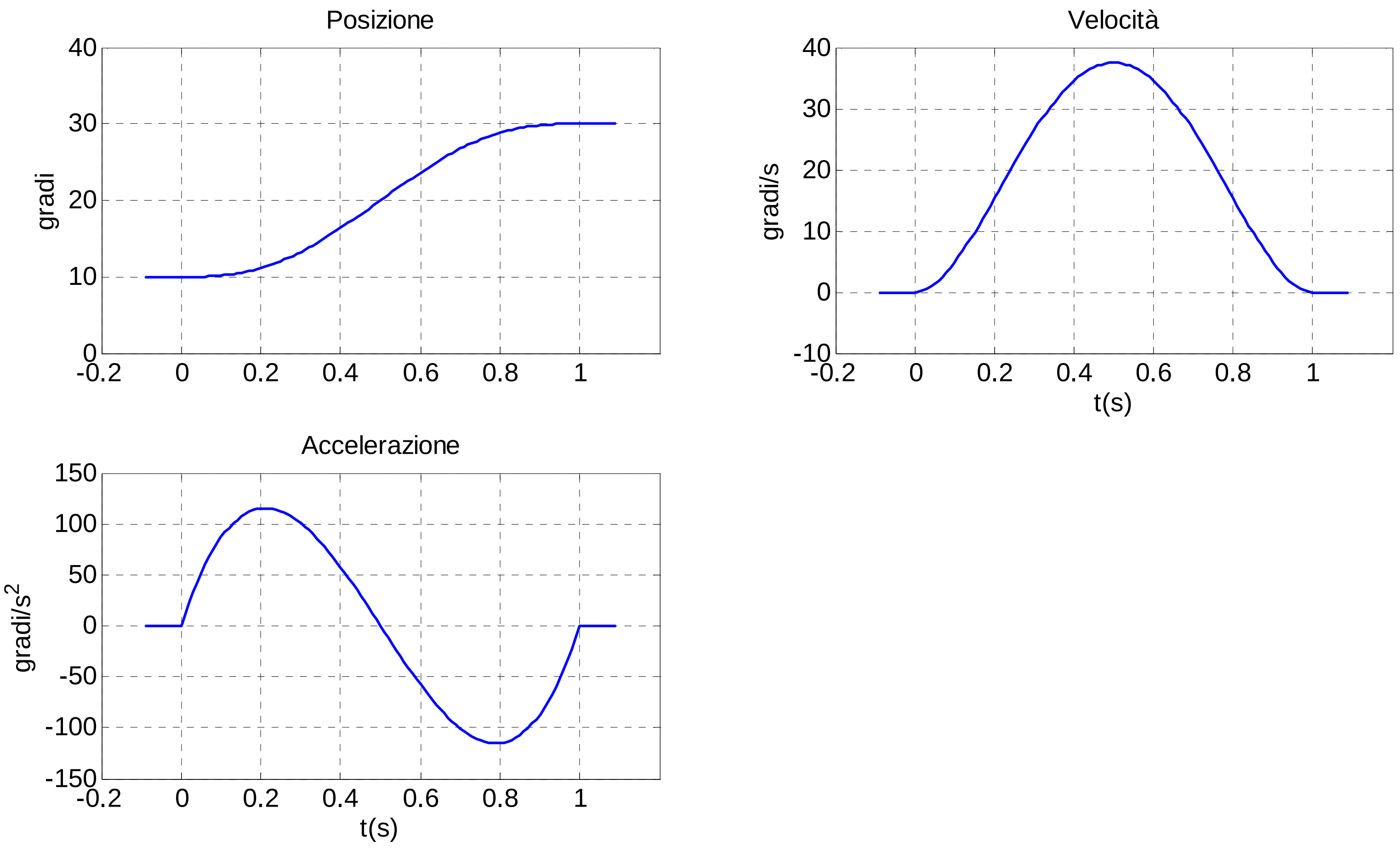
$$a_4 = \frac{30(q_i - q_f) + (14\dot{q}_f + 16\dot{q}_i)T + (3\ddot{q}_f - 2\ddot{q}_i)T^2}{2T^4}$$

$$a_5 = \frac{12(q_f - q_i) - 6(\dot{q}_f + \dot{q}_i)T - (\ddot{q}_f - \ddot{q}_i)T^2}{2T^5}$$

$$T = t_f - t_i$$

Polinomio di grado cinque: esempio

$$t_i = 0,\ t_f = 1s,\ q_i = 10°,\ q_f = 30°,\ \dot{q}_i = \dot{q}_f = 0°/s,\ \ddot{q}_i = \ddot{q}_f = 0°/s^2$$



Traiettoria armonica

La traiettoria armonica generalizza l'equazione di un moto armonico, nel quale l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, ma di segno opposto. Una traiettoria armonica presenta derivate continue in tutti i punti interni all'intervallo temporale della traiettoria, per qualsiasi ordine di derivazione.

Le equazioni sono le seguenti:

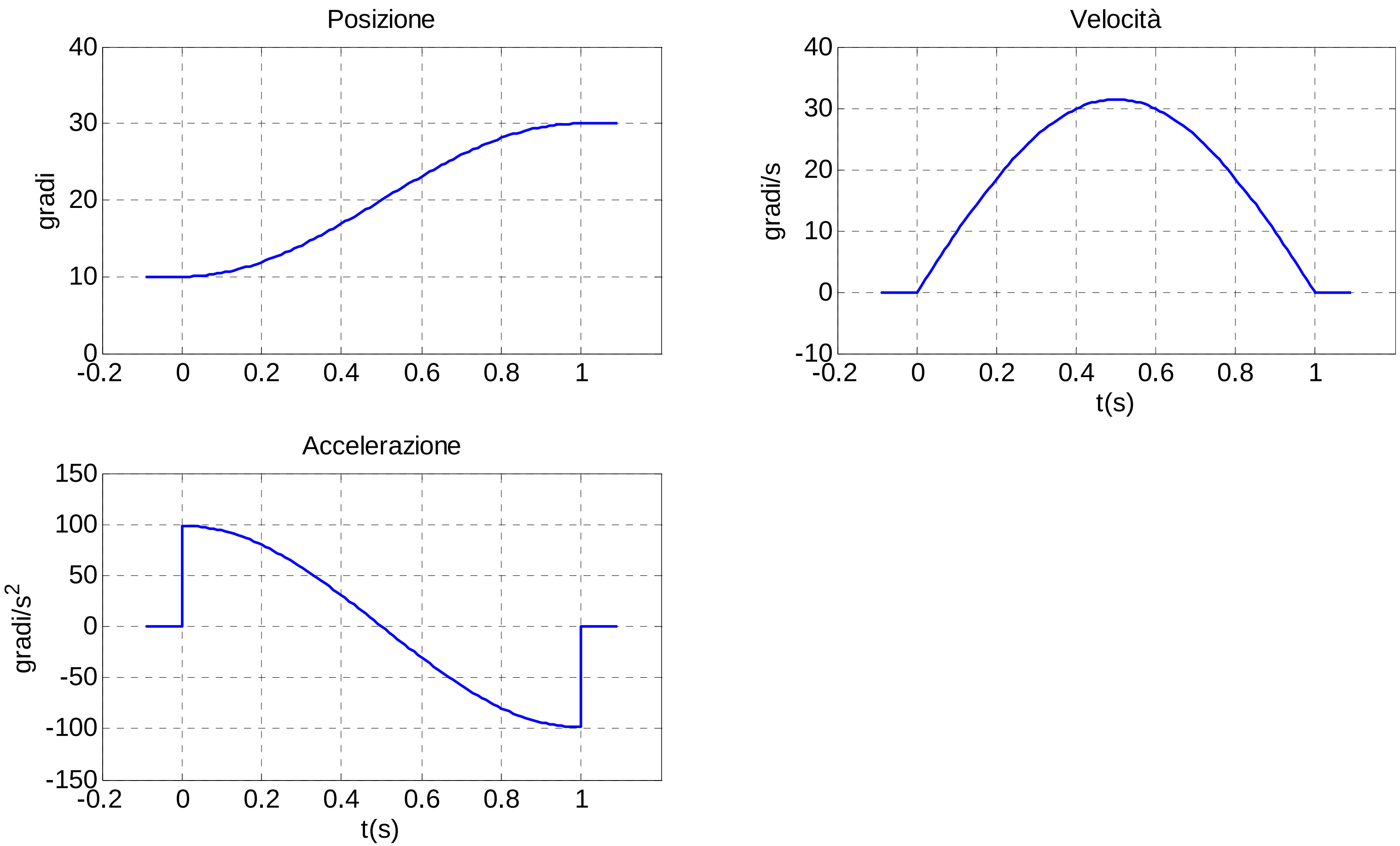
$$q(t) = \frac{q_f - q_i}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi(t - t_i)}{t_f - t_i}\right)\right) + q_i \qquad q(t_i) = q_i, \quad q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(t) = \frac{\pi(q_f - q_i)}{2(t_f - t_i)}\sin\left(\frac{\pi(t - t_i)}{t_f - t_i}\right) \qquad \dot{q}(t_i) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{\pi^2(q_f - q_i)}{2(t_f - t_i)^2}\cos\left(\frac{\pi(t - t_i)}{t_f - t_i}\right)$$

Traiettoria armonica (esempio)

$$t_i = 0, t_f = 1\,s, q_i = 10°, q_f = 30°$$



Traiettoria cicloidale

La traiettoria armonica presenta discontinuità nell'accelerazione negli istanti iniziale e finale, e quindi valori non definiti (o infiniti) di jerk. Un'alternativa è la traiettoria cicloidale, che presenta continuità anche nell'accelerazione.

Le formule sono:

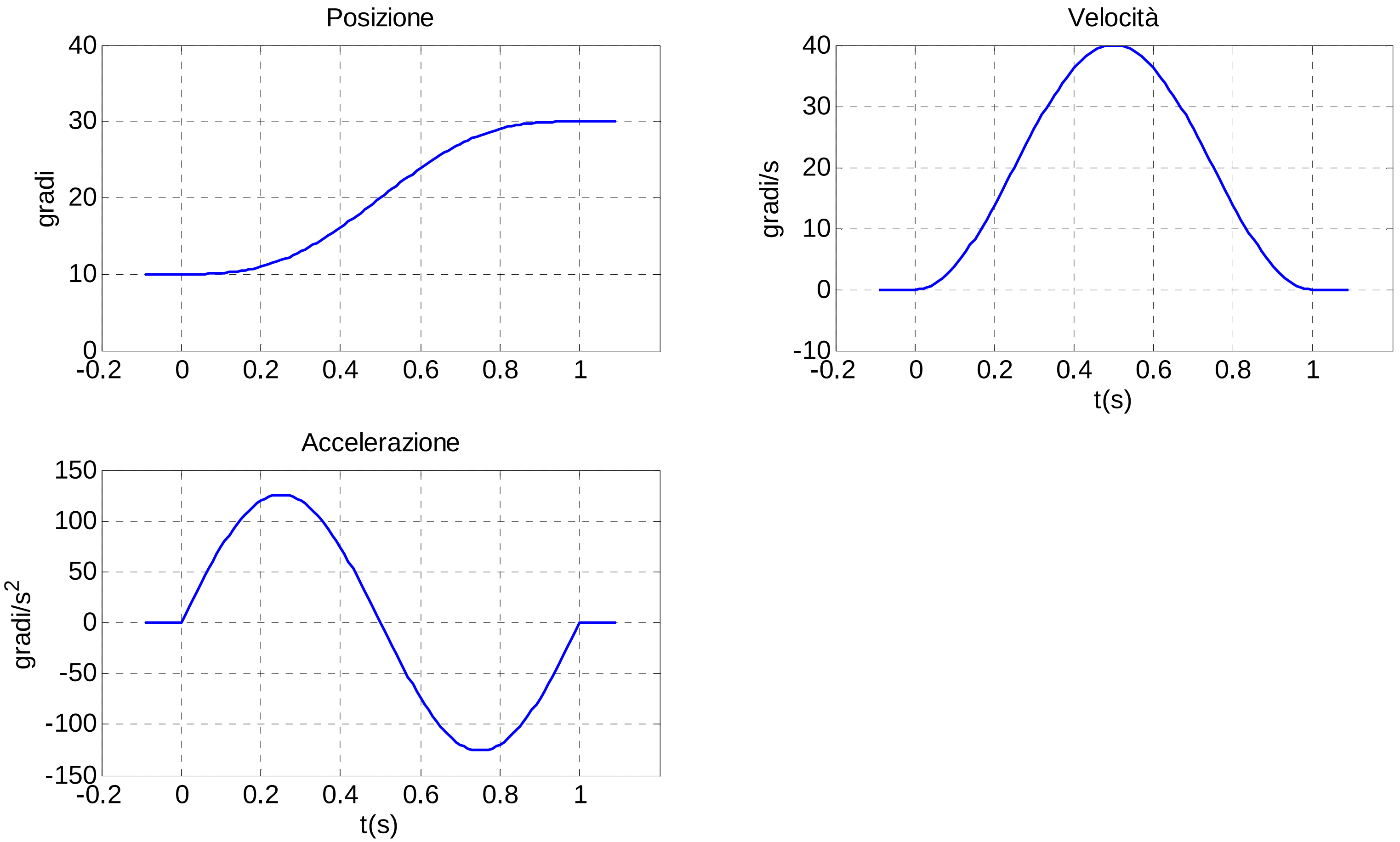
$$q(t) = (q_f - q_i)\left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i}\right)\right) + q_i \qquad q(t_i) = q_i, \quad q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(t) = \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i}\right)\right) \qquad \dot{q}(t_i) = 0, \quad \dot{q}(t_f) = 0$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{2\pi(q_f - q_i)}{(t_f - t_i)^2}\sin\left(\frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i}\right) \qquad \ddot{q}(t_i) = 0, \quad \ddot{q}(t_f) = 0$$

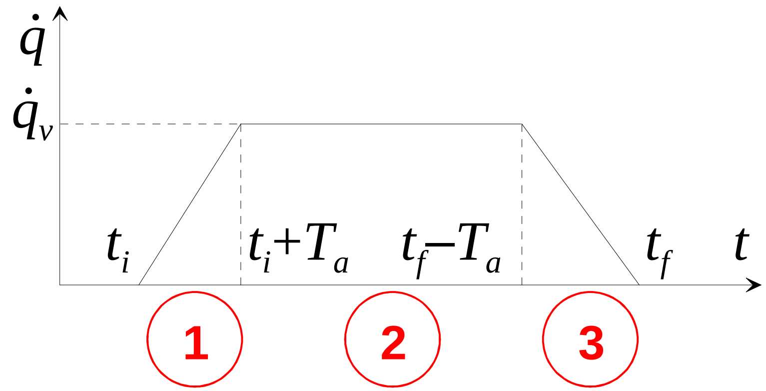
Traiettoria cicloidale (esempio)

$$t_i = 0, t_f = 1s, q_i = 10°, q_f = 30°$$



Profilo di velocità trapezoidale (P.v.t.)

Un procedimento di largo utilizzo nella pratica industriale per generare la traiettoria consiste nel pianificare un profilo di posizione lineare raccordato all'inizio e alla fine della traiettoria con tratti parabolici. Il profilo di velocità che ne risulta ha il tipico andamento trapezoidale.



La traiettoria è quindi divisa in tre parti:

1. Accelerazione costante, velocità a rampa, posizione a parabola;
2. Accelerazione nulla, velocità costante, posizione lineare;
3. Decelerazione costante, velocità a rampa, posizione a parabola.

Spesso la durata T_a della fase di accelerazione (fase 1) è posta uguale alla durata della fase di decelerazione (fase 3): si ottiene in questo modo una traiettoria simmetrica rispetto all'istante medio tra quelli iniziale e finale. Naturalmente deve essere $T_a \leq (t_f - t_i)/2$.

P.v.t.: equazioni traiettoria

Fase di accelerazione

$$t \in [t_i, t_i + T_a]$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = \dfrac{\dot{q}_v}{T_a} \\ \dot{q}(t) = \dfrac{\dot{q}_v}{T_a}(t - t_i) \\ q(t) = q_i + \dfrac{\dot{q}_v}{2T_a}(t - t_i)^2 \end{cases}$$

Fase di velocità costante

$$t \in [t_i + T_a, t_f - T_a]$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = 0 \\ \dot{q}(t) = \dot{q}_v \\ q(t) = q_i + \dot{q}_v\left(t - t_i - \dfrac{T_a}{2}\right) \end{cases}$$

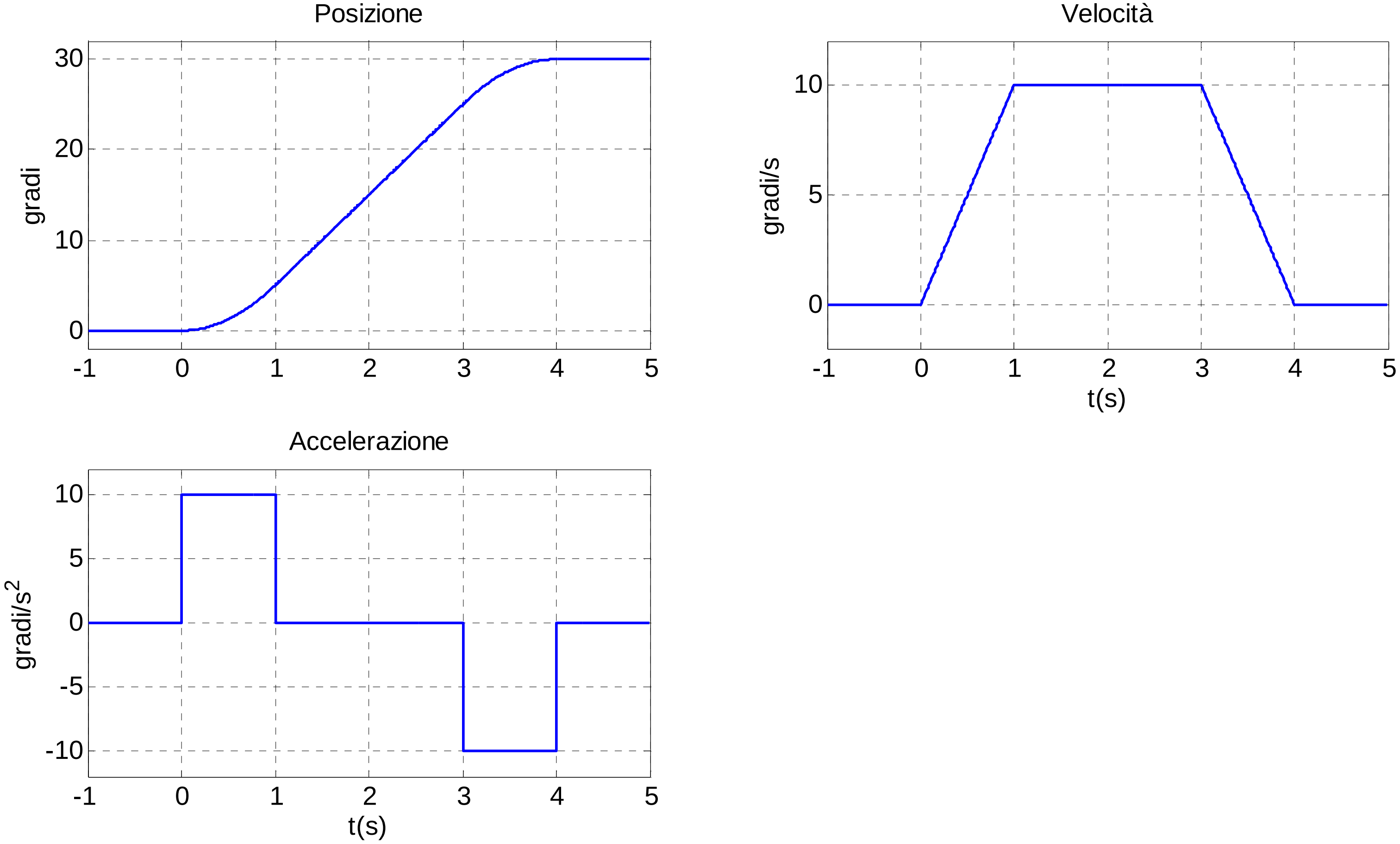
Fase di decelerazione

$$t \in [t_f - T_a, t_f]$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = -\dfrac{\dot{q}_v}{T_a} \\ \dot{q}(t) = \dfrac{\dot{q}_v}{T_a}(t_f - t) \\ q(t) = q_f - \dfrac{\dot{q}_v}{2T_a}(t_f - t)^2 \end{cases}$$

P.v.t.: esempio

$$t_i = 0, t_f = 4s, T_a = 1s, q_i = 0°, q_f = 30°, \dot{q}_v = 10°/s$$



P.v.t.: vincoli

Nella scelta dei parametri della traiettoria devono essere soddisfatti dei vincoli, che assicurano il posizionamento corretto nel tempo prestabilito. Si osservi che la velocità all'istante $t_i + T_a$ si può ottenere come:

$$\ddot{q}T_a = \frac{q_m - q_a}{T_m - T_a} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} q_a = q(t_i + T_a) \\ q_m = (q_i + q_f)/2 \\ T_m = (t_f - t_i)/2 \end{cases}$$

Inoltre risulta:

$$q_a = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}T_a^2$$

Eliminando dalle precedenti equazioni le variabili q_m, q_a, T_m, si ricava il vincolo:

$$\boxed{\ddot{q}T_a^2 - \ddot{q}(t_f - t_i)T_a + (q_f - q_i) = 0}$$

Un vincolo sulla velocità si ottiene integrando il profilo di velocità:

$$\boxed{q_f - q_i = \dot{q}_v(t_f - t_i - T_a)}$$

P.v.t.: possibili specifiche

Dati:

- la distanza da percorrere $h = q_f - q_i$
- il tempo di percorrenza $T = t_f - t_i$

Assegnando il tempo di accelerazione:

$$T_a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}_v = \dfrac{h}{T - T_a} \\ \ddot{q}_a = \dfrac{\dot{q}_v}{T_a} \end{cases}$$

$$T_a < \frac{T}{2}$$

Assegnando la velocità:

$$\dot{q}_v \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_a = \dfrac{T\dot{q}_v - h}{\dot{q}_v} \\ \ddot{q}_a = \dfrac{\dot{q}_v}{T_a} \end{cases}$$

$$|\dot{q}_v| \geq \frac{|h|}{T}$$

Assegnando l'accelerazione:

$$\ddot{q}_a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_a = \dfrac{\ddot{q}_a T - \sqrt{\ddot{q}_a^2 T^2 - 4\ddot{q}_a h}}{2\ddot{q}_a} \\ \dot{q}_v = \ddot{q}_a T_a \end{cases}$$

$$|\ddot{q}_a| \geq \frac{4|h|}{T^2}$$

P.v.t.: accelerazione e velocità max

Se si vogliono imporre i valori massimi di velocità ed accelerazione consentiti dall'attuatore, si pone:

$$\begin{cases} T_a = \dfrac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} & \text{tempo di accelerazione} \\ h = \dot{q}_{\max}(T - T_a) & \text{distanza percorsa} \end{cases}$$

La durata del moto (che non è imposta) vale quindi:

$$\boxed{T = \frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}}$$

da cui:

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \dfrac{1}{2}\ddot{q}_{\max}(t - t_i)^2 & t_i \le t < t_i + T_a \\ q_i + \ddot{q}_{\max} T_a \left(t - t_i - \dfrac{T_a}{2} \right) & t_i + T_a \le t < t_f - T_a \\ q_f - \dfrac{1}{2}\ddot{q}_{\max}(t_f - t)^2 & t_f - T_a \le t \le t_f \end{cases}$$

Questa traiettoria è definibile se: $T_a \le \dfrac{T}{2} \Rightarrow h \ge \dfrac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$

P.v.t.: riduzione della velocità max

Se: $h < \dfrac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$

non possiamo conseguire sia la velocità sia l'accelerazione massima. Per minimizzare il tempo di percorrenza selezioniamo una traiettoria bang-bang (accelerazione costante seguita da decelerazione costante):

$$T_a = \sqrt{\frac{h}{\ddot{q}_{\max}}} \quad \Rightarrow \quad q(t) = \begin{cases} q_i + \dfrac{1}{2}\ddot{q}_{\max}(t-t_i)^2 & t_i \le t < t_i + T_a \\ q_f - \dfrac{1}{2}\ddot{q}_{\max}(t_f-t)^2 & t_f - T_a \le t \le t_f \end{cases}$$

Il tempo di percorrenza è quindi:

$$T = 2T_a = 2\sqrt{\frac{h}{\ddot{q}_{\max}}}$$

La massima velocità raggiunta in questo caso è quindi:

$$\dot{q}_v = \ddot{q}_{\max} T_a = \frac{h}{T_a} = 2\frac{h}{T}$$

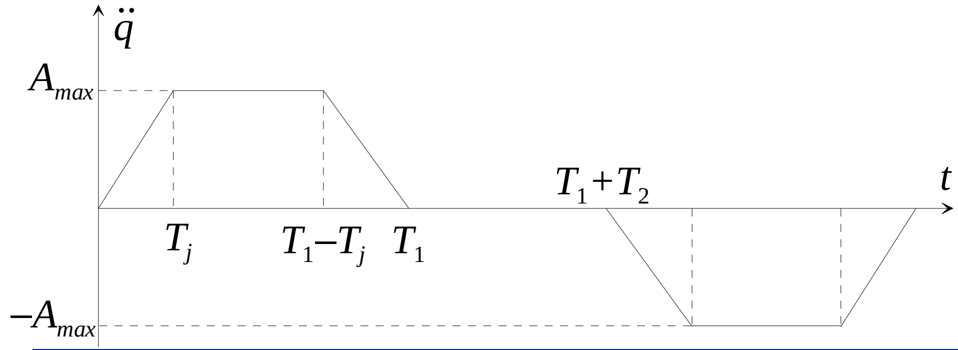
Limitazione del jerk

Nella traiettoria a profilo di velocità trapezoidale l'accelerazione ha un andamento discontinuo. Ne consegue che il jerk (derivata dell'accelerazione) assume valori infiniti. Questo provoca forti sollecitazioni sul sistema meccanico, che possono indurre vibrazioni.

Per ovviare a questo problema, si può modificare la pianificazione della traiettoria, dando continuità al profilo di accelerazione, che assume andamento trapezoidale nelle due fasi di accelerazione iniziale e decelerazione finale.

La traiettoria è quindi divisa in tre parti principali:

1. Fase di accelerazione (l'accelerazione viene portata linearmente al valore massimo, mantenuta al valore massimo e riportata linearmente a zero);
2. Fase di crociera (velocità costante);
3. Fase di decelerazione (si decelera in modo speculare rispetto alla fase 1).



Messa in scala di traiettorie

Una volta pianificata una traiettoria è spesso necessario scalarla per soddisfare i vincoli del sistema di attuazione, che si manifestano in termini di saturazioni.
Si parla in particolare di:

1. Messa in scala cinematica: si deve fare in modo che la traiettoria rispetti vincoli sulla massima velocità e sulla massima accelerazione;
2. Messa in scala dinamica: si deve fare in modo che agli attuatori del sistema meccanico non vengano richieste coppie superiori alle coppie massime erogabili.

Il problema della messa in scala cinematica ha rilevanza per quei profili di traiettoria (cubica, armonica, ecc.) per i quali tali valori non sono imposti nella pianificazione.
Nel seguito discuteremo alcuni aspetti solamente della messa in scala cinematica.

Normalizzazione della traiettoria

Al fine di scalare la traiettoria, è opportuno esprimerla in forma parametrica in funzione di un parametro $\sigma=\sigma(t)$, opportunamente normalizzato.

Data la traiettoria $q(t)$, definita tra i punti q_i e q_f e di durata $T=t_f-t_i$, la sua espressione in forma normalizzata è la seguente:

$$q(t) = q_i + h\sigma(\tau)$$

con $h = q_f - q_i$ e:

$$0 \le \sigma(\tau) \le 1, \qquad \tau = \frac{t-t_i}{T}, \quad 0 \le \tau \le 1 \qquad \text{(tempo normalizzato)}$$

Ne consegue:

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} = \dfrac{h}{T}\sigma'(\tau) \\ \dfrac{d^2q(t)}{dt^2} = \dfrac{h}{T^2}\sigma''(\tau) \\ \vdots \\ \dfrac{d^nq(t)}{dt^n} = \dfrac{h}{T^n}\sigma^{(n)}(\tau) \end{cases}$$

I valori massimi di velocità, accelerazione, ecc., si ottengono in corrispondenza dei valori massimi delle funzioni $\sigma^{(i)}(\tau)$: modificando la durata T della traiettoria è possibile soddisfare i vincoli sulle saturazioni cinematiche.

Traiettoria polinomiale di grado 3

La traiettoria può essere parametrizzata con il polinomio:

$$\sigma(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3$$

Imponendo le condizioni al contorno σ'(0)=0, σ'(1)=0 (oltre a σ (0)=0, σ (1)=1):

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -2$$

da cui:

$$\sigma(\tau) = 3\tau^2 - 2\tau^3 \qquad \sigma''(\tau) = 6 - 12\tau$$

$$\sigma'(\tau) = 6\tau - 6\tau^2 \qquad \sigma'''(\tau) = -12$$

I valori massimi di velocità ed accelerazione sono quindi:

$$\sigma'_{max} = \sigma'(0.5) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_{max} = \frac{3h}{2T}$$

$$\sigma''_{max} = \sigma''(0) = 6 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_{max} = \frac{6h}{T^2}$$

Traiettoria polinomiale di grado 5

La traiettoria può essere parametrizzata con il polinomio:

$$\sigma(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5$$

Imponendo le condizioni al contorno σ (0)=0, σ (1)=1, σ'(0)=0, σ'(1)=0, σ''(0)=0, σ''(1)=0 :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = -15, \quad a_5 = 6$$

da cui:

$$\sigma(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5 \qquad \sigma''(\tau) = 60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3$$

$$\sigma'(\tau) = 30\tau^2 - 60\tau^3 + 30\tau^4 \qquad \sigma'''(\tau) = 60 - 360\tau + 360\tau^2$$

I valori massimi di velocità, accelerazione e jerk sono quindi:

$$\sigma'_{\max} = \sigma'(0.5) = \frac{15}{8} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q}_{\max} = \frac{15h}{8T}$$

$$\sigma''_{\max} = \sigma''(0.2123) = \frac{10\sqrt{3}}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{q}_{\max} = \frac{10\sqrt{3}h}{3T^2}$$

$$\sigma'''_{\max} = \sigma'''(0) = 60 \qquad \Rightarrow \qquad \dddot{q}_{\max} = 60\frac{h}{T^3}$$

Traiettoria armonica

La traiettoria può essere parametrizzata con la funzione:

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\pi\tau)\right)$$

da cui:

$$\sigma'(\tau) = \frac{\pi}{2}\sin(\pi\tau)$$

$$\sigma''(\tau) = \frac{\pi^2}{2}\cos(\pi\tau)$$

$$\sigma'''(\tau) = \frac{\pi^3}{2}\sin(\pi\tau)$$

I valori massimi di velocità, accelerazione e jerk sono quindi:

$$\sigma'_{max} = \sigma'(0.5) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_{max} = \frac{\pi h}{2T}$$

$$\sigma''_{max} = \sigma''(0) = \frac{\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_{max} = \frac{\pi^2 h}{2T^2}$$

$$\sigma'''_{max} = \sigma'''(0.5) = \frac{\pi^3}{2} \quad \Rightarrow \quad \dddot{q}_{max} = \frac{\pi^3 h}{2T^3}$$

Traiettoria cicloidale

La traiettoria può essere parametrizzata con la funzione:

$$\sigma(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\tau)$$

da cui:

$$\sigma'(\tau) = 1 - \cos(2\pi\tau)$$

$$\sigma''(\tau) = 2\pi\sin(2\pi\tau)$$

$$\sigma'''(\tau) = 4\pi^2\cos(2\pi\tau)$$

I valori massimi di velocità, accelerazione e jerk sono quindi:

$$\sigma'_{max} = \sigma'(0.5) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_{max} = 2\frac{h}{T}$$

$$\sigma''_{max} = \sigma''(0.25) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_{max} = 2\pi\frac{h}{T^2}$$

$$\sigma'''_{max} = \sigma'''(0) = 4\pi^2 \quad \Rightarrow \quad \dddot{q}_{max} = 4\pi^2\frac{h}{T^3}$$

Messa in scala cinematica: esempio

Si vuole realizzare una traiettoria con q_i=10°, q_f=50°, per un attuatore caratterizzato da $\dot{q}_{max}$ = 30 °/s, $\ddot{q}_{max}$ = 80 °/s^2:

Si hanno i seguenti risultati (h=40°):

Traiettoria	Formule	Vincoli	T_{min}
Polin. grado 3	$\begin{cases} \dot{q}_{max} = \frac{3h}{2T} \\ \ddot{q}_{max} = \frac{6h}{T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{3h}{60} = 2 \\ T = \sqrt{\frac{6h}{80}} = 1.732 \end{cases}$	2
Polin. grado 5	$\begin{cases} \dot{q}_{max} = \frac{15h}{8T} \\ \ddot{q}_{max} = \frac{10\sqrt{3}h}{3T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{15h}{240} = 2.5 \\ T = \sqrt{\frac{10\sqrt{3}h}{240}} = 1.699 \end{cases}$	2.5
Armonica	$\begin{cases} \dot{q}_{max} = \frac{\pi h}{2T} \\ \ddot{q}_{max} = \frac{\pi^2 h}{2T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{\pi h}{60} = 2.094 \\ T = \sqrt{\frac{\pi^2 h}{160}} = 1.571 \end{cases}$	2.094
Cicloidale	$\begin{cases} \dot{q}_{max} = 2\frac{h}{T} \\ \ddot{q}_{max} = 2\pi\frac{h}{T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{2h}{30} = 2.667 \\ T = \sqrt{\frac{2\pi h}{80}} = 1.772 \end{cases}$	2.667

veloce

veloce

Interpolazione di punti

Finora abbiamo considerato condizioni solo sui punti iniziale e finale della traiettoria.
Considereremo ora la situazione più generale in cui alcuni punti intermedi devono essere interpolati ad istanti assegnati:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ t_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}$$

Traiettorie passanti per più punti

Il problema di determinare una traiettoria che passi per n punti può essere risolto in modo univoco adottando una funzione polinomiale di grado n–1, del tipo:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$$

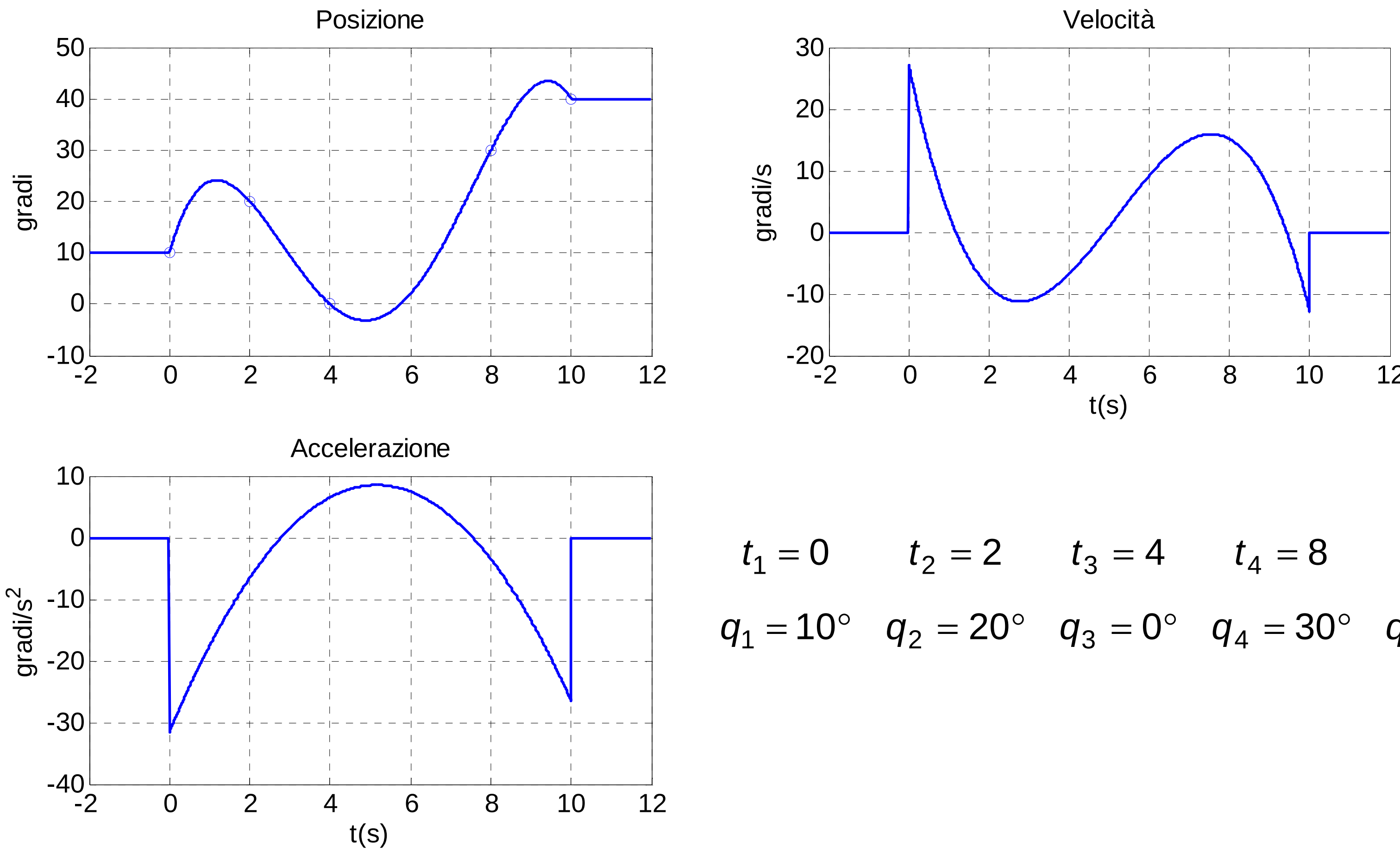
Dati i valori t_i, q_i, i=1,…,n si costruiscono i vettori $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{a}$ e la matrice $\boldsymbol{T}$ (di Vandermonde) come:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & t_{n-1} & \cdots & t_{n-1}^{n-1} \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}$$

Ne consegue:

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{q}$ (la matrice $\boldsymbol{T}$ è sempre invertibile se $t_i > t_{i-1}$, i =1,…,n)

Interpolazione mediante polinomi: esempio



$$t_1 = 0 \quad t_2 = 2 \quad t_3 = 4 \quad t_4 = 8 \quad t_5 = 10$$

$$q_1 = 10° \quad q_2 = 20° \quad q_3 = 0° \quad q_4 = 30° \quad q_5 = 40°$$

Interpolazione mediante polinomi

Un vantaggio evidente dell'interpolazione polinomiale è che la funzione $q(t)$ ha derivate continue di ordine qualsiasi all'interno dell'intervallo $[t_1\ t_n]$.

Tuttavia il metodo non è efficiente dal punto di vista numerico: all'aumentare del numero n di punti aumenta il numero condizionante k (rapporto tra il massimo ed il minimo valor singolare) della matrice $\boldsymbol{T}$ di Vandermonde, rendendo il problema della sua inversione mal condizionato numericamente.

Se, per esempio, $t_i = i/n$, i=1,…,n:

n	3	4	5	6	10	15	20
k	15.1	98.87	686.43	4924.37	$1.519 \cdot 10^{7}$	$4.032 \cdot 10^{11}$	$1.139 \cdot 10^{16}$

Esistono anche altri metodi, più efficienti, per calcolare i coefficienti del polinomio, ma le difficoltà numeriche permangono per valori elevati di n.

Interpolazione mediante polinomi

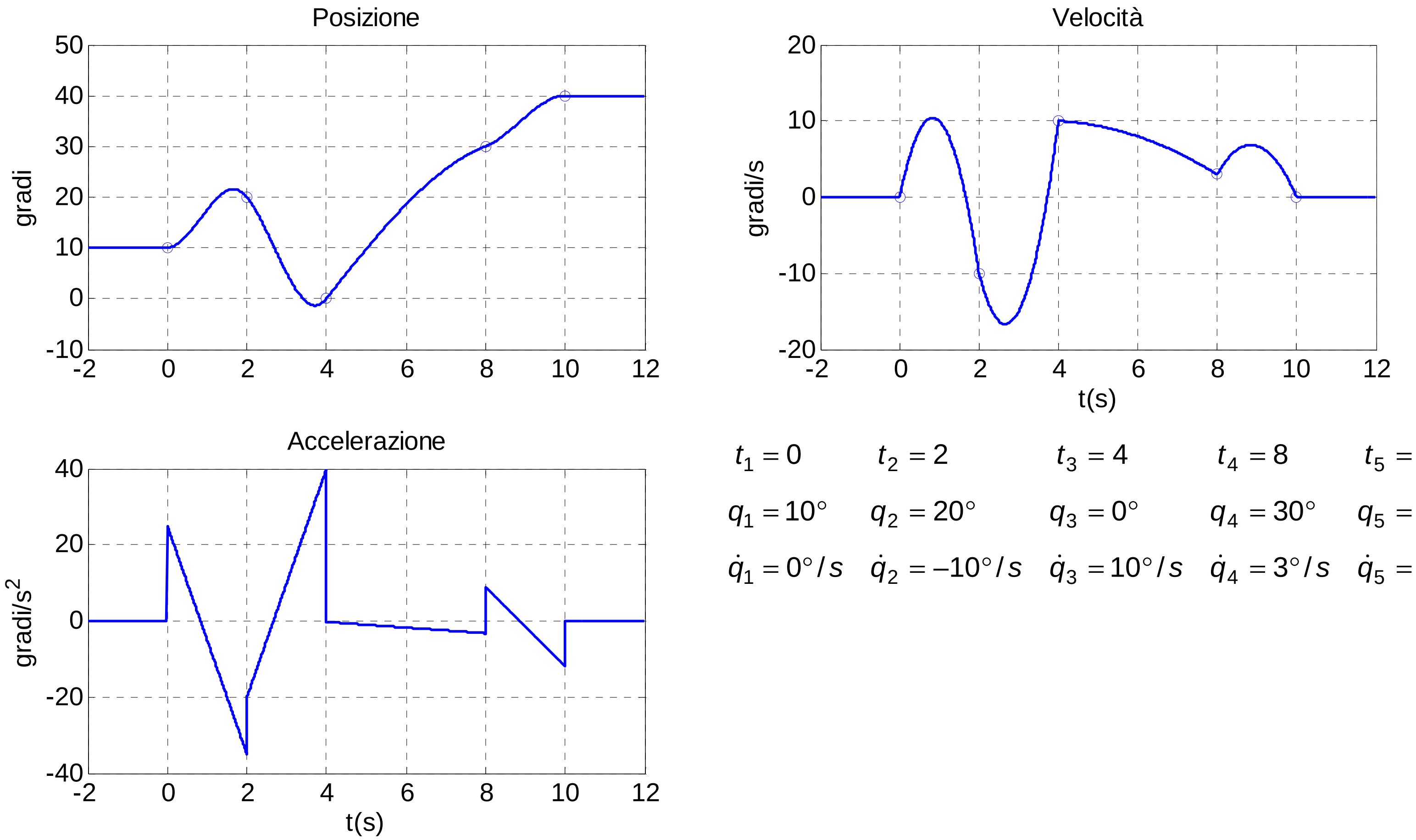
Anche prescindendo dalle difficoltà numeriche, l'interpolazione di n punti mediante un unico polinomio di grado n–1 presenta degli svantaggi:

1. il grado del polinomio dipende da n e, per elevati valori di n, la quantità di calcoli da eseguire può essere notevole;
2. la variazione di un solo punto (t_i, q_i) implica il ricalcolo dell'intero polinomio;
3. l'aggiunta di un punto finale (t_{n+1}, q_{n+1}) implica l'utilizzo di un polinomio di grado maggiore ed il ricalcolo di tutti i coefficienti
4. la soluzione che si ottiene presenta in generale oscillazioni indesiderate

Un'alternativa è, anziché considerare un unico polinomio di grado n–1, utilizzare n–1 polinomi di grado p (tipicamente inferiore), ognuno dei quali definito in un tratto della traiettoria.
Il grado p dei polinomi è normalmente preso uguale a 3 (tratti di traiettoria cubica).

Una primo, ovvio, modo di procedere consiste nell'assegnare posizioni e velocità in tutti i punti e calcolare i coefficienti delle cubiche tra due punti consecutivi.

Interpolazione mediante cubiche



$t_1 = 0$	$t_2 = 2$	$t_3 = 4$	$t_4 = 8$	$t_5 = 10$
$q_1 = 10°$	$q_2 = 20°$	$q_3 = 0°$	$q_4 = 30°$	$q_5 = 40°$
$\dot{q}_1 = 0°/s$	$\dot{q}_2 = -10°/s$	$\dot{q}_3 = 10°/s$	$\dot{q}_4 = 3°/s$	$\dot{q}_5 = 0°/s$

Interpolazione mediante cubiche

Se vengono solo specificati i punti di passaggio senza specificare le velocità intermedie, queste si possono calcolare approssimativamente con regole del tipo:

$$\dot{q}_1 = 0$$

$$\dot{q}_k = \begin{cases} 0 & \operatorname{sign}(R_k) \neq \operatorname{sign}(R_{k+1}) \\ \dfrac{R_k + R_{k+1}}{2} & \operatorname{sign}(R_k) = \operatorname{sign}(R_{k+1}) \end{cases}$$

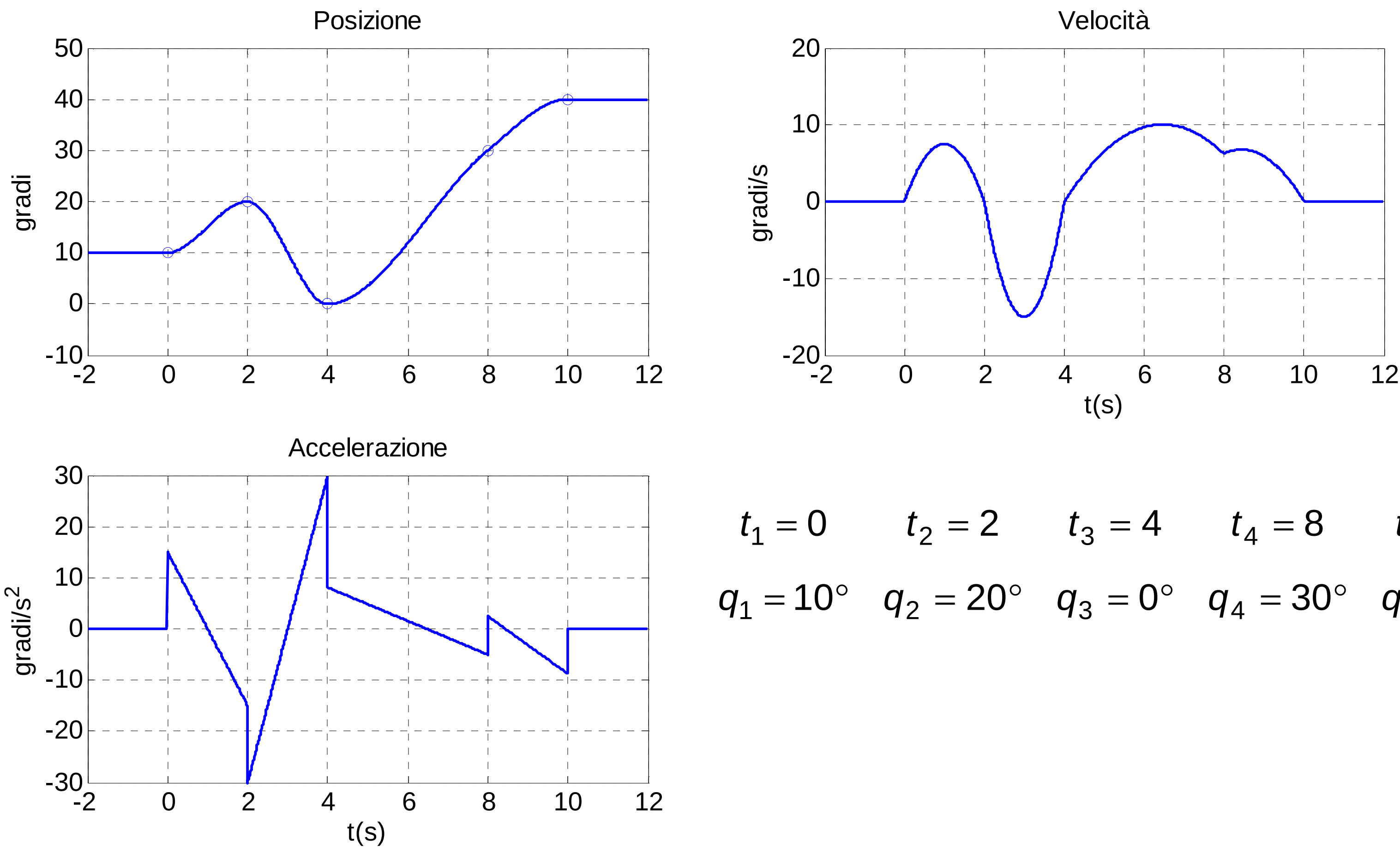
$$\dot{q}_n = 0$$

essendo:

$$R_k = \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$$

la pendenza (rapporto incrementale) nel tratto $[t_{k-1}, t_k]$.

Interpolazione mediante cubiche



$$t_1 = 0 \qquad t_2 = 2 \qquad t_3 = 4 \qquad t_4 = 8 \qquad t_5 = 10$$

$$q_1 = 10° \quad q_2 = 20° \quad q_3 = 0° \quad q_4 = 30° \quad q_5 = 40°$$

Spline

L'interpolazione mediante cubiche eseguita come visto precedentemente genera una traiettoria che presenta accelerazione discontinua nei punti di passaggio.

Per ovviare a questo problema, sempre mantenendo interpolanti cubiche, si deve rinunciare ad imporre specifici valori di velocità nei punti intermedi, limitandosi ad imporre la continuità in due tratti contigui di posizione, velocità ed accelerazione.

La traiettoria che si ottiene con questo procedimento prende il nome di spline (smooth path line).

Si può dimostrare che la spline è la funzione interpolante a curvatura minima, a parità di condizioni di continuità sulle derivate.

Spline: condizioni da imporre

Poiché con n punti si hanno n–1 polinomi del tipo:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

ciascuno dei quali ha 4 coefficienti, il numero totale di coefficienti da calcolare è 4(n–1). Le condizioni da imporre sono:

- 2(n–1) condizioni di passaggio per punti (ogni cubica deve interpolare i punti alle sue estremità);
- n–2 condizioni sulla continuità delle velocità nei punti intermedi
- n–2 condizioni sulla continuità delle accelerazioni nei punti intermedi

Si hanno quindi:

$$4(n-1) - 2(n-1) - 2(n-2) = 2$$

gradi di libertà residui.

Una modalità (non unica) di utilizzare questi 2 gradi di libertà consiste nell'assegnare opportune condizioni iniziali e finali sulla velocità.

Spline: posizione analitica del problema

Si desidera determinare una funzione:

$$q(t) = \{q_k(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \ldots, n-1\}$$

$$q_k(\tau) = a_{k0} + a_{k1}\tau + a_{k2}\tau^2 + a_{k3}\tau^3, \quad \tau \in [0, T_k] \qquad (\tau = t - t_k, \quad T_k = t_{k+1} - t_k)$$

con le condizioni:

$$q_k(0) = q_k, \quad q_k(T_k) = q_{k+1} \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

$$\dot{q}_k(T_k) = \dot{q}_{k+1}(0) = v_{k+1} \qquad k = 1, \ldots, n-2$$

$$\ddot{q}_k(T_k) = \ddot{q}_{k+1}(0) \qquad k = 1, \ldots, n-2$$

$$\dot{q}_1(0) = v_1, \quad \dot{q}_{n-1}(T_{n-1}) = v_n$$

dove le quantità v_k, k=2,…,n–1 non sono specificate.

Il problema consiste nel ricavare i coefficienti a_{ki}.

Spline: algoritmo

Si assumano inizialmente note le velocità v_k, k=2,…,n–1 nei punti intermedi. In questo modo, per ogni polinomio cubico si hanno quattro condizioni al contorno su posizione e velocità, che danno origine al sistema:

$$\begin{cases} q_k(0) = a_{k0} = q_k \\ \dot{q}_k(0) = a_{k1} = v_k \\ q_k(T_k) = a_{k0} + a_{k1}T_k + a_{k2}T_k^2 + a_{k3}T_k^3 = q_{k+1} \\ \dot{q}_k(T_k) = a_{k1} + 2a_{k2}T_k + 3a_{k3}T_k^2 = v_{k+1} \end{cases}$$

che risolto dà:

$$\begin{cases} a_{k0} = q_k \\ a_{k1} = v_k \\ a_{k2} = \dfrac{1}{T_k}\left[\dfrac{3(q_{k+1} - q_k)}{T_k} - 2v_k - v_{k+1}\right] \\ a_{k3} = \dfrac{1}{T_k^2}\left[\dfrac{2(q_k - q_{k+1})}{T_k} + v_k + v_{k+1}\right] \end{cases}$$

Spline: algoritmo

Naturalmente le velocità v_k, k=2,…,n–1 vanno calcolate. Imponiamo la continuità dell'accelerazione nei punti intermedi:

$$\ddot{q}_k(T_k) = 2a_{k2} + 6a_{k3}T_k = 2a_{k+1,2} = \ddot{q}_{k+1}(0), \quad k = 1,\ldots,n-2$$

Sostituendo le espressioni per i termini a_{k2}, a_{k3}, $a_{k+1,2}$ e moltiplicando per $(T_k\ T_{k+1})/2$ si ottiene:

$$T_{k+1}v_k + 2(T_{k+1} + T_k)v_{k+1} + T_k v_{k+2} = \frac{3}{T_k T_{k+1}}\left[T_k^2(q_{k+2} - q_{k+1}) + T_{k+1}^2(q_{k+1} - q_k)\right]$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} T_2 & 2(T_1+T_2) & T_1 & & & & \\ 0 & T_3 & 2(T_2+T_3) & T_2 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & T_{n-2} & 2(T_{n-3}+T_{n-2}) & T_{n-3} & 0 \\ & & & & T_{n-1} & 2(T_{n-2}+T_{n-1}) & T_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \end{bmatrix}$$

dove le costanti c_k dipendono solo dalle posizioni intermedie e dalle durate dei segmenti, grandezze note.

Spline: algoritmo

Poiché le velocità v_1 e v_n sono note (specificate come dati iniziali), eliminando le relative colonne si ha:

$$
\begin{bmatrix}
2(T_1+T_2) & T_1 & & & \\
T_3 & 2(T_2+T_3) & T_2 & & \\
 & & \vdots & & \\
 & & T_{n-2} & 2(T_{n-3}+T_{n-2}) & T_{n-3} \\
 & & & T_{n-1} & 2(T_{n-2}+T_{n-1})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{3}{T_1T_2}\left[T_1^2(q_3-q_2)+T_2^2(q_2-q_1)\right]-T_2v_1 \\
\frac{3}{T_2T_3}\left[T_2^2(q_4-q_3)+T_3^2(q_3-q_2)\right] \\
\vdots \\
\frac{3}{T_{n-3}T_{n-2}}\left[T_{n-3}^2(q_{n-1}-q_{n-2})+T_{n-2}^2(q_{n-2}-q_{n-3})\right] \\
\frac{3}{T_{n-2}T_{n-1}}\left[T_{n-2}^2(q_n-q_{n-1})+T_{n-1}^2(q_{n-1}-q_{n-2})\right]-T_{n-2}v_n
\end{bmatrix}
$$

ovvero un'equazione del tipo $\boldsymbol{Av}=\boldsymbol{c}$

Spline: algoritmo

- La matrice $\boldsymbol{A}$ è a struttura dominate diagonale e risulta sempre invertibile per $T_k > 0$.

- Inoltre la matrice $\boldsymbol{A}$ è a struttura tridiagonale, per cui esistono tecniche numeriche efficienti (metodo di Gauss-Jordan) per la sua inversione.

- Una volta nota l'inversa di $\boldsymbol{A}$ si possono calcolare le velocità $v_2,\ldots,v_{n-1}$ come:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{c}$$

il che risolve completamente il problema.

È possibile anche determinare le spline con un algoritmo alternativo (ma del tutto equivalente) che ricava invece delle velocità le accelerazioni nei punti intermedi.

Spline: tempo di percorrenza

Il tempo totale di percorrenza della spline è dato da:

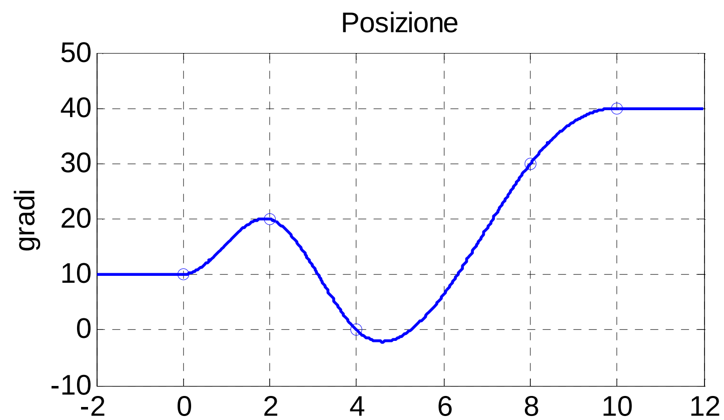
$$T = \sum_{k=1}^{n-1} T_k = t_n - t_1$$

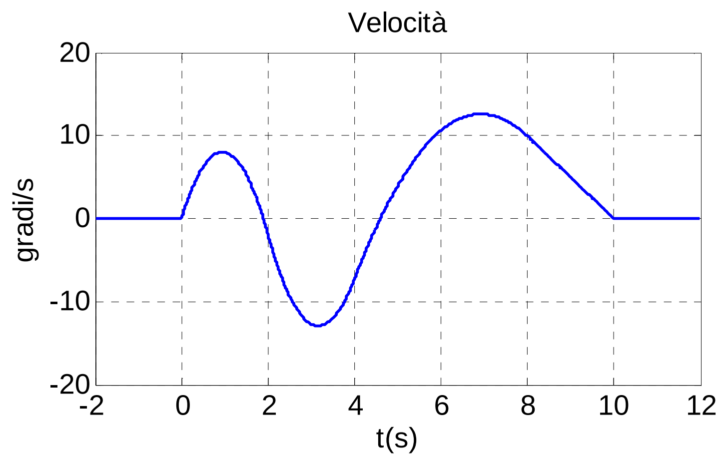
È possibile impostare un problema di ottimo che minimizza il tempo totale di percorrenza. Il problema si pone nei termini di determinare i valori T_k in modo da minimizzare T, con i vincoli sulle massime velocità ed accelerazioni di giunto. Formalmente:

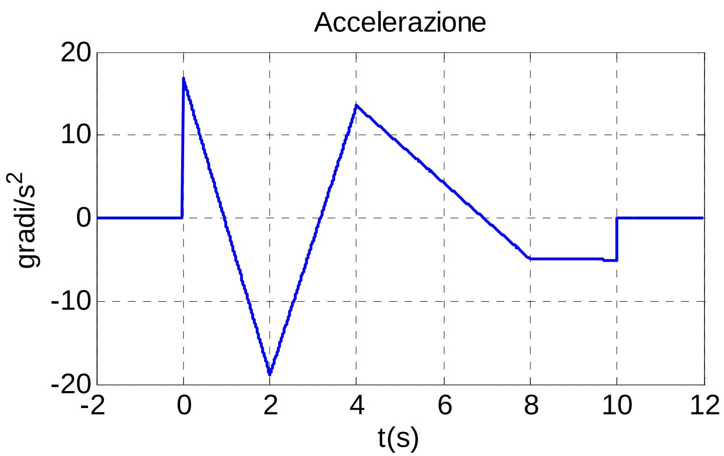
$$\begin{cases} \min\limits_{T_k} T = \sum_{k=1}^{n-1} T_k & & \\ & \left|\dot{q}(\tau, T_k)\right| < v_{\max} & \tau \in [0, T] \\ \text{tale che} & & \\ & \left|\ddot{q}(\tau, T_k)\right| < a_{\max} & \tau \in [0, T] \end{cases}$$

Si tratta quindi di un problema di ottimo non lineare con funzione obiettivo lineare, risolvibile con le tecniche della ricerca operativa.

Spline: esempio





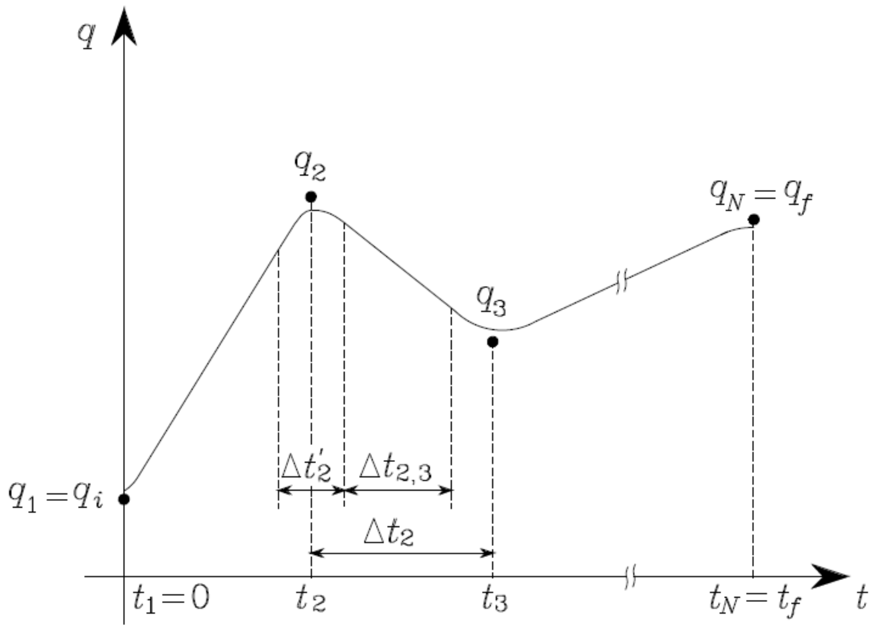


$$t_1 = 0 \quad t_2 = 2 \quad t_3 = 4 \quad t_4 = 8 \quad t_5 = 10$$

$$q_1 = 10° \quad q_2 = 20° \quad q_3 = 0° \quad q_4 = 30° \quad q_5 = 40°$$

Interpolazione con tratti lineari

Un modo alternativo, molto semplice, per gestire il problema di interpolazione consiste nell'unire i punti con tratti lineari (segmenti). Per evitare discontinuità nella velocità, i tratti lineari possono essere connessi da raccordi parabolici.



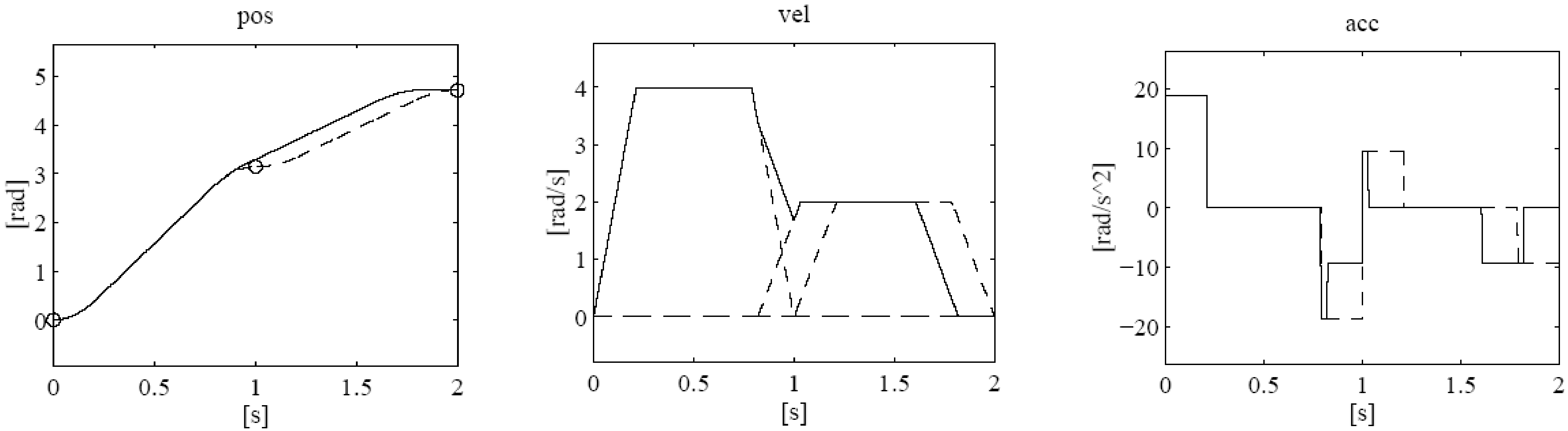
La traiettoria risultante $q(t)$ non passa dai punti intermedi, pur rimanendo vicina ad essi. In questo caso i punti intermedi sono chiamati punti di via.

L'immagine è tratta dal testo:

B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo: *Robotica: Modellistica, pianificazione e controllo, 3ª Ed.* McGraw Hill, 2008

PVT e interpolazione di punti

Se usassimo una sequenza di traiettorie con profilo di velocità trapezoidale per interpolare i punti, otterremmo un moto che passa dai punti intermedi con velocità nulla, cioè fermandosi.
Per evitare questo inconveniente si può far partire una traiettoria prima che la precedente sia completata.



L'immagine è tratta dal testo:

B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo: *Robotica: Modellistica, pianificazione e controllo, 3ª Ed.* McGraw Hill, 2008