

Controlli automatici

Luogo delle radici

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Politecnico di Milano

Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

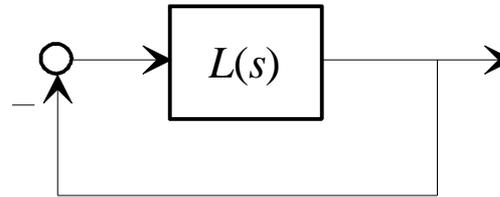


Introduzione



- Il luogo delle radici è un **metodo grafico** per l'analisi e il progetto dei sistemi di controllo
- Consente di visualizzare i luoghi percorsi dai poli in anello chiuso del sistema di controllo al variare del guadagno d'anello
- Il pregio del metodo è che risulta agevole, per mezzo di alcune semplici regole, tracciare il luogo delle radici **a mano**
- Il metodo consente anche di progettare il controllore e risulta utile in particolare per il **controllo di sistemi instabili**, laddove il metodo basato sul criterio di Bode non è applicabile

Definizione



Si consideri il sistema retroazionato di figura, con:

$$L(s) = \rho \frac{N(s)}{D(s)} = \rho \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_k (s + p_k)}$$

L'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso (le cui radici sono i poli in anello chiuso) è:

$$\chi(s) = D(s) + \rho N(s) = 0$$

Si definisce **luogo delle radici** il luogo descritto nel piano complesso dalle radici di $\chi(s)$ (poli del sistema in anello chiuso) al variare della costante di trasferimento ρ da $-\infty$ a $+\infty$.

Si parla di luogo delle radici **diretto** quando ρ varia da 0 a $+\infty$, di luogo delle radici **inverso** quando ρ varia da 0 a $-\infty$.

Calcolo diretto delle radici (1/2)



Consideriamo il sistema con funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)}$$

Il polinomio caratteristico in anello chiuso è quindi:

$$\chi(s) = (s+1)(s+2) + \rho = s^2 + 3s + 2 + \rho = 0$$

ed ha le radici:
$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{1 - 4\rho}}{2}$$

Al variare di ρ si ha:

$$\rho = 0 \Rightarrow \text{Due poli in } -1 \text{ e } -2$$

$$0 < \rho < 1/4 \Rightarrow \text{Due poli reali negativi}$$

$$\rho = 1/4 \Rightarrow \text{Due poli reali coincidenti in } -3/2$$

$$\rho > 1/4 \Rightarrow \text{Due poli complessi con parte reale } -3/2$$

$$\rho < 0 \Rightarrow \text{Due poli reali}$$

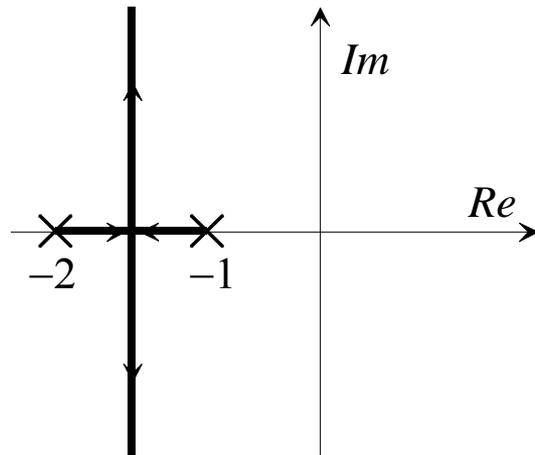
Calcolo diretto delle radici (2/2)



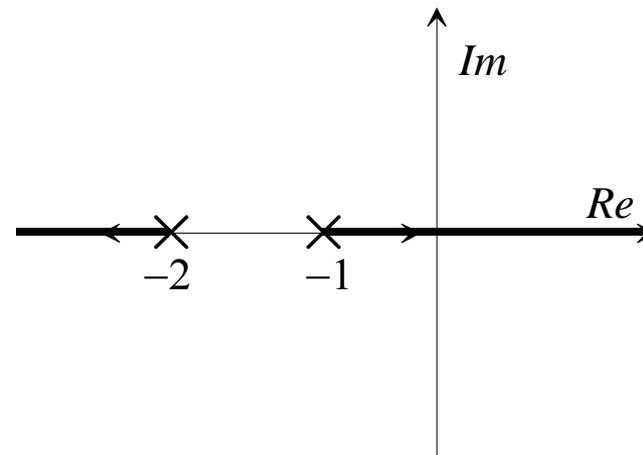
$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{1 - 4\rho}}{2}$$

Sulla base della discussione precedente, si possono tracciare i luoghi:

luogo diretto



luogo inverso



È evidente che in questo caso il tracciamento dei luoghi è stato possibile grazie al fatto che le radici si possono calcolare esplicitamente.

Equazioni del modulo e della fase



L'equazione caratteristica può essere riscritta nella forma:

$$\frac{D(s)}{N(s)} = -\rho$$

ed equivale alle due equazioni nel campo reale:

$$\frac{|D(s)|}{|N(s)|} = |\rho|$$

$$\angle D(s) - \angle N(s) = \angle(-\rho)$$

La seconda equazione determina compiutamente la **forma del luogo**, mentre la prima consente di attribuire ad ogni punto del luogo il corrispondente valore di ρ , ossia, come si suol dire, di “**punteggiare**” il luogo rispetto a ρ .

Il tracciamento del luogo è fortemente agevolato dall'uso di alcune **semplici regole**. Ci limiteremo di seguito ad enunciarne le principali.

Regole di tracciamento (1/3)



Regola 1: Detto m il grado del polinomio $N(s)$ (numero di zeri di $L(s)$) e n il grado del polinomio $D(s)$ (numero di poli di $L(s)$), il luogo diretto e il luogo inverso sono costituiti da n rami.

Regola 2: Il luogo è simmetrico rispetto all'asse reale.

Regola 3: Ogni ramo parte (per $\rho=0$) da un polo di L .

Regola 4: I rami terminano (per $|\rho|\rightarrow\infty$) in uno zero di L , oppure tendono all'infinito, secondo un asintoto. Tanto il luogo diretto quanto il luogo inverso presentano un numero di asintoti pari alla differenza $n-m$ (grado relativo di L).

Regola 5: Tutti gli asintoti si incontrano in un punto dell'asse reale, individuato dall'ascissa:

$$x_a = \frac{\sum_i z_i - \sum_k p_k}{n - m}$$

Regole di tracciamento (2/3)



Regola 6: Gli $n - m$ asintoti formano con il semiasse reale positivo i seguenti angoli:

$$\vartheta_{ah} = \begin{cases} \frac{180^\circ + h360^\circ}{n - m}, & \text{per il luogo diretto} \\ \frac{h360^\circ}{n - m}, & \text{per il luogo inverso} \end{cases}$$

dove h assume i valori $0, 1, 2, \dots, n - m - 1$.

Regola 7: Tutti i punti dell'asse reale appartengono al luogo. Precisamente, appartengono al luogo diretto i punti dell'asse reale che hanno alla loro destra un numero dispari di poli e zeri di L , mentre appartengono al luogo inverso i punti dell'asse reale che hanno alla loro destra un numero pari di poli e zeri di L .

Regola 8: Se $n - m \geq 2$, la somma delle parti reali dei poli del sistema in anello chiuso si conserva al variare di ρ (regola del **baricentro**).

Regole di tracciamento (3/3)



Regola 9: Il valore di $|\rho|$ corrispondente ad un punto \bar{s} del luogo si ottiene eseguendo il rapporto tra il prodotto delle distanze di \bar{s} dai poli di L ed il prodotto delle distanze di \bar{s} dagli zeri di L .

$$|\rho| = \frac{\prod_k |\bar{s} + p_k|}{\prod_i |\bar{s} + z_i|}$$

Regola 10: I punti di diramazione dall'asse reale (cioè i punti in cui il luogo abbandona l'asse reale per entrare nel piano complesso) sono individuati da valori dell'ascissa x_d che risolvono la seguente equazione implicita (oltre all'equazione del luogo):

$$\sum_k \frac{1}{x_d + p_k} - \sum_i \frac{1}{x_d + z_i} = 0$$

È utile osservare che l'innesto o il disinnesto di *due* rami in un punto (diramazione) dell'asse reale avviene, di norma, con tangente verticale.

Primo esempio di tracciamento (1/3)

$$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Si ha $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $m = 0$, $n = 3$. Poiché $n - m = 3$, sia il luogo diretto sia quello inverso presentano 3 asintoti, che si incontrano sull'asse reale nel punto:

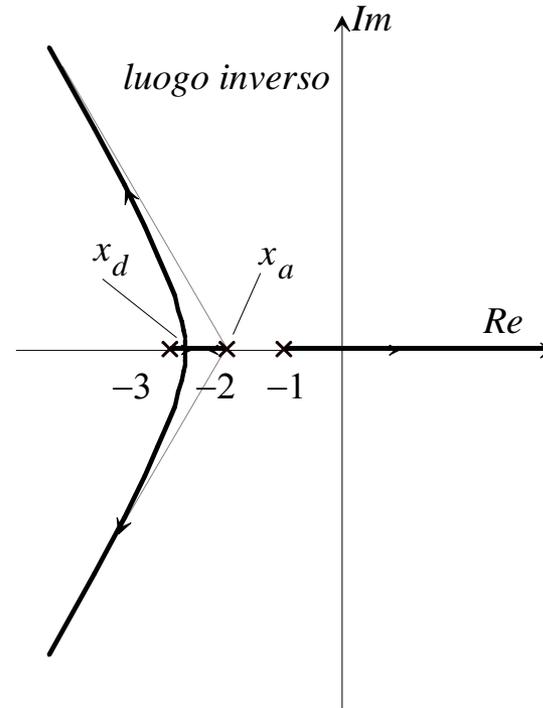
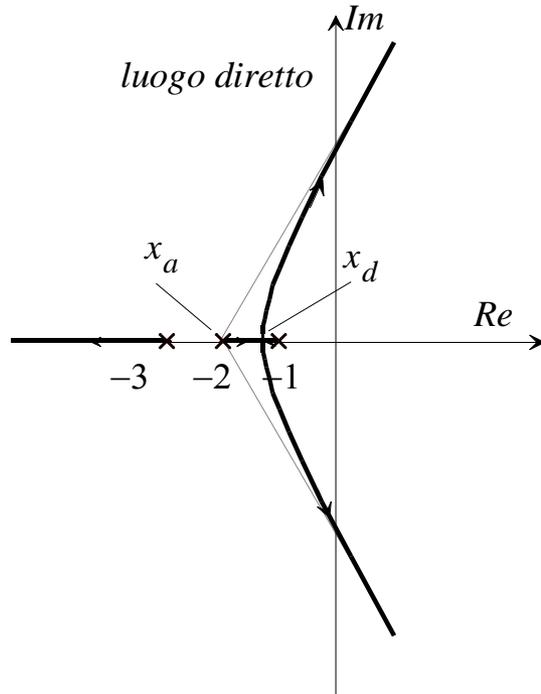
$$x_a = \frac{-p_1 - p_2 - p_3}{n - m} = \frac{-1 - 2 - 3}{3} = -2$$

Gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli:

$$\vartheta_{ah} = \begin{cases} \frac{180^\circ + h360^\circ}{3} = \begin{cases} 60^\circ \\ 180^\circ, & \text{per il luogo diretto} \\ 300^\circ \end{cases} \\ \frac{h360^\circ}{3} = \begin{cases} 0^\circ \\ 120^\circ, \\ 240^\circ \end{cases} & \text{per il luogo inverso} \end{cases}$$

Primo esempio di tracciamento (2/3)

Tenendo conto della regola sull'appartenenza dei punti dell'asse reale, si possono facilmente tracciare i luoghi:



I punti di diramazione dell'asse reale si possono calcolare con la formula:

$$\frac{1}{x_d + 1} + \frac{1}{x_d + 2} + \frac{1}{x_d + 3} = 0 \Rightarrow 3x_d^2 + 12x_d + 11 = 0 \Rightarrow x_d = \begin{cases} -1.42 \text{ (L.D.)} \\ -2.58 \text{ (L.I.)} \end{cases}$$



Primo esempio di tracciamento (3/3)

È interessante determinare per quali valori della costante di trasferimento ρ il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile (cioè tutti i suoi poli si trovano nel semipiano sinistro aperto).

Luogo diretto

Occorre determinare il valore di ρ che porta due rami nel semipiano destro. Tuttavia il punto di intersezione con l'asse immaginario è difficile da valutare. Si può però osservare che, essendo $n-m=3(>2)$, si conserva la somma delle parti reali dei poli in anello chiuso: quando due dei poli hanno parte reale nulla, il terzo avrà parte reale -6 (somma delle parti reali). Eseguendo la punteggiatura in $s=-6$:

$$\rho_M = |-6 + p_1| |-6 + p_2| |-6 + p_3| = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Luogo inverso

Occorre determinare il valore di ρ per cui uno dei rami entra nel semipiano destro. Eseguendo la punteggiatura in $s=0$:

$$\rho_m = -|p_1| |p_2| |p_3| = -1 \times 2 \times 3 = -6$$

Sistema asintoticamente stabile $\Leftrightarrow -6 < \rho < 60$
--

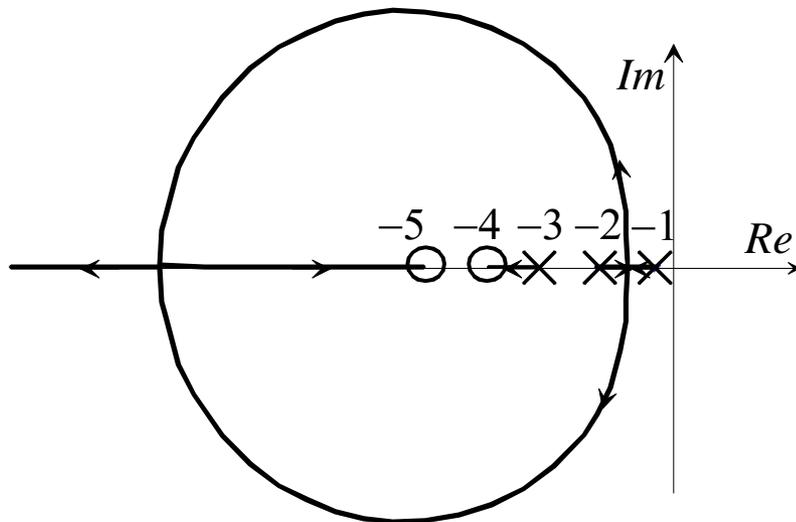
Secondo esempio di tracciamento (1/2)



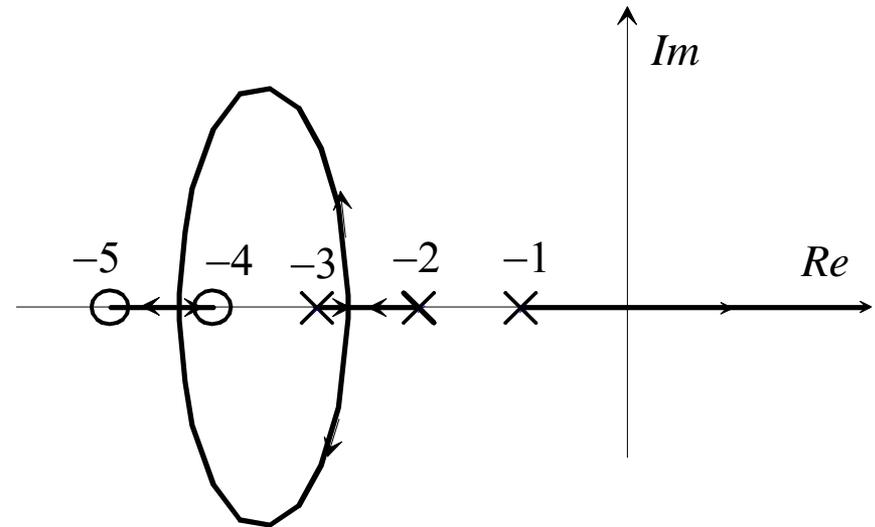
$$L(s) = \rho \frac{(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Si ha $z_1 = 4$, $z_2 = 5$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $m = 2$, $n = 3$. Poiché $n - m = 1$, sia il luogo diretto sia quello inverso presentano un asintoto, che si sovrappone all'asse reale:

Luogo diretto



Luogo inverso



Secondo esempio di tracciamento (2/2)



Analizziamo la stabilità del sistema in anello chiuso.

Luogo diretto

Tutto il luogo è compreso nel semipiano sinistro: il sistema è asintoticamente stabile per tutti i valori di $\rho > 0$.

Luogo inverso

Occorre determinare il valore di ρ per cui uno dei rami entra nel semipiano destro. Eseguendo la punteggiatura in $s=0$:

$$\rho_m = -\frac{|p_1||p_2||p_3|}{|z_1||z_2|} = -\frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5} = -\frac{6}{20} = -0.3$$

Sistema asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \rho > -0.3$

Progetto del regolatore

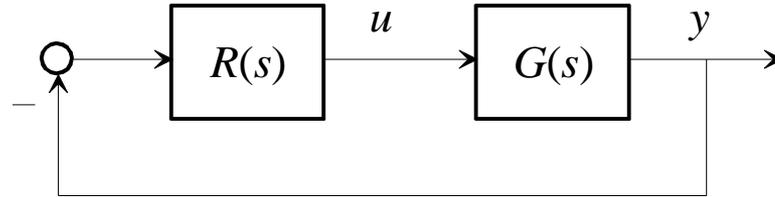


- Oltre che per l'analisi della stabilità dei sistemi in anello chiuso, il metodo del luogo delle radici costituisce un valido ausilio anche per la sintesi del regolatore
- E' infatti possibile affrontare in maniera particolarmente intuitiva il problema della **stabilizzazione** in anello chiuso di sistemi instabili in anello aperto, nonché condurre a termine progetti che presentano specifiche di un certo dettaglio sulla forma dei transitori in anello chiuso
- Le caratteristiche di tali transitori sono infatti legate strettamente alla posizione nel piano complesso dei poli del sistema in anello chiuso, sui quali si ha completo controllo con il metodo del luogo delle radici

Esempio di progetto (1/3)



Sistema di controllo:



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

Si vuole progettare $R(s)$ in modo tale che il sistema in anello chiuso abbia due poli in -2 .

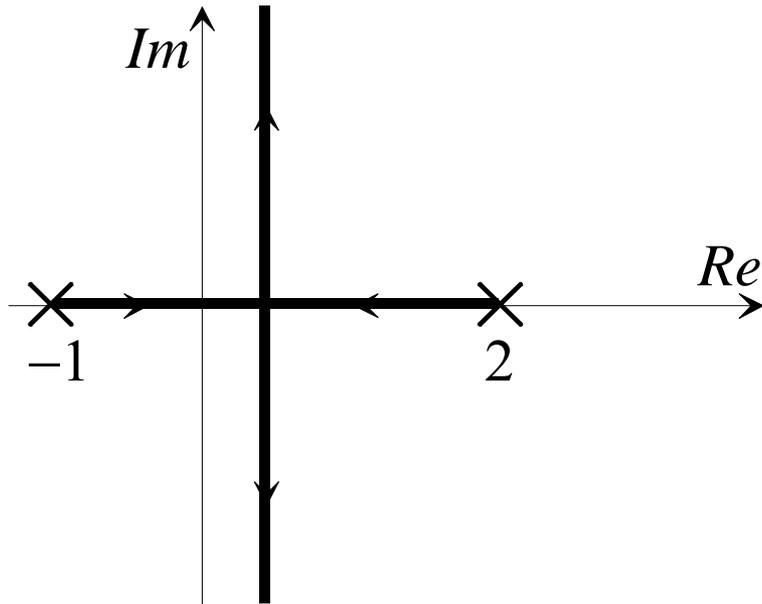
È opportuno esplorare la possibilità che la stabilizzazione sia ottenuta con un regolatore proporzionale. Si pone quindi:

$$R(s) = \rho_R \quad \Rightarrow \quad L(s) = R(s)G(s) = \frac{\rho_R}{(s+1)(s-2)}$$

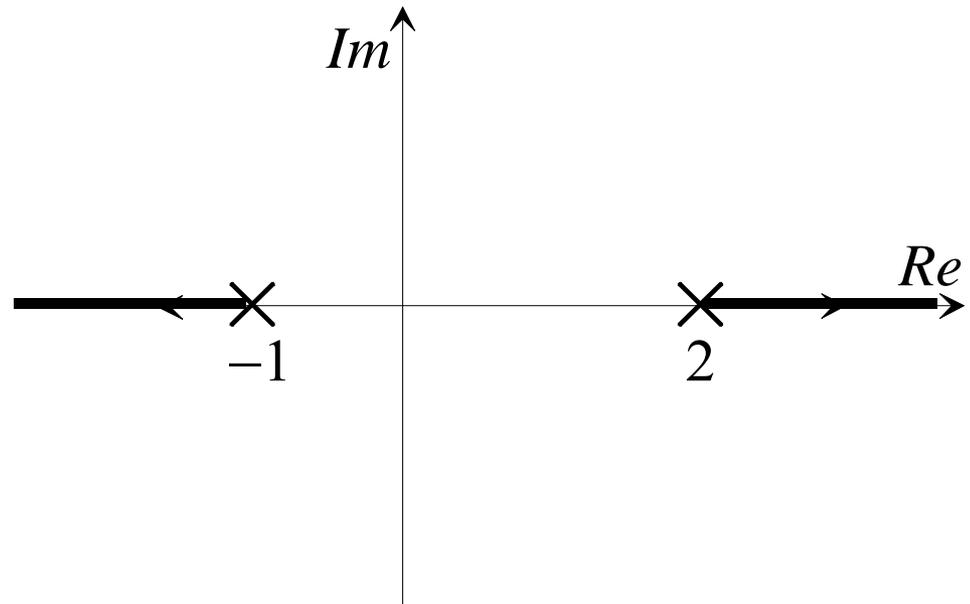
Esempio di progetto (2/3)



luogo diretto



luogo inverso



Per nessun valore di ρ_R il sistema in anello chiuso risulta asintoticamente stabile (c'è sempre un ramo nel semipiano destro).

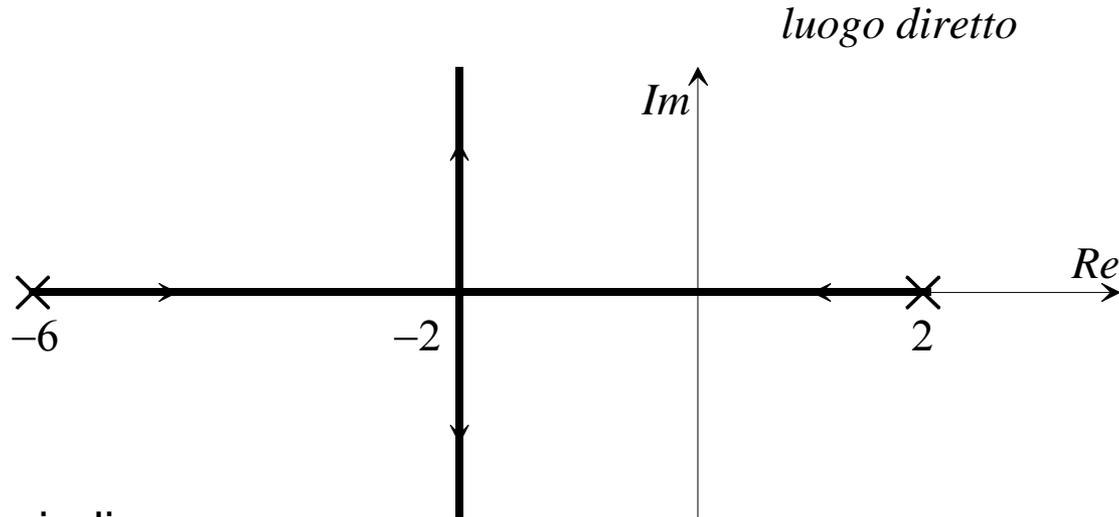
Occorre quindi complicare la struttura del regolatore, [modificando la forma del luogo](#) delle radici.

In particolare si può cercare di portare l'asse verticale del luogo diretto nel semipiano sinistro.

Esempio di progetto (3/3)



Con riferimento al luogo diretto prima tracciato, si supponga di cancellare il polo in -1 con uno zero del regolatore, e di sostituirlo con un polo messo in modo tale che l'asse passi per il punto -2 : è immediato dedurre che il nuovo polo va posto nel punto -6 .



Il regolatore è quindi:

$$R(s) = \rho_R \frac{s+1}{s+6} \Rightarrow L(s) = \frac{\rho_R}{(s+6)(s-2)}$$

Punteggiando nel punto -2 : $\rho_R = |-2-2||-2+6| = 4 \times 4 = 16$