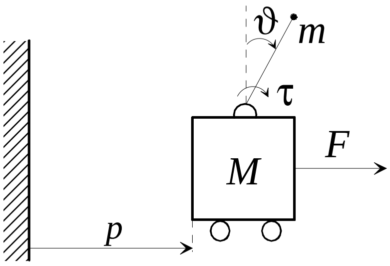
Laboratorio Informatico-Numerico di Controlli Automatici

Proff. Paolo Rocco, Luca Bascetta

Assegnamento degli autovalori



Si consideri il sistema meccanico (carrello con pendolo inverso) riportato in figura. Il carrello, di massa *M*, è in moto rettilineo sotto l'azione di una forza *F* e porta incernierata un'asta di massa trascurabile e lunghezza *l*, al cui estremo è presente una massa concentrata di valore *m*. Alla cerniera dell'asta è possibile esercitare una coppia τ. Detta *p* la posizione del carrello e ϑ la posizione angolare dell'asta, misurata come in figura, il modello matematico del sistema (ricavabile con le equazioni di Lagrange) è il seguente:

$$(M+m)\ddot{p} - ml\dot{\vartheta}^2 \sin(\vartheta) + ml\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta) = F$$
$$ml^2\ddot{\vartheta} + ml\ddot{p}\cos(\vartheta) - mgl\sin(\vartheta) = \tau$$

Linearizzando le equazioni intorno allo stato di equilibrio caratterizzato da posizioni e velocità (lineari e angolari) nulle e da forzanti (forza e coppia) nulle, ed esplicitando le derivate seconde, si ottiene:

$$\delta\ddot{p} = -\frac{m}{M} g\delta\vartheta + \frac{1}{M}\delta F - \frac{1}{lM}\delta\tau$$
$$\delta\ddot{\vartheta} = \frac{g}{l}\frac{M+m}{M}\delta\vartheta - \frac{1}{lM}\delta F + \frac{1}{l^2}\frac{M+m}{Mm}\delta\tau \; .$$

Si ponga *M*=10, *m*=1, *l*=1, *g*=9.8.

1. Posto $x_1 = \delta p,\ x_2 = \delta\dot{p},\ x_3 = \delta\vartheta,\ x_4 = \delta\dot{\vartheta},\ u_1 = \delta F,\ u_2 = \delta\tau,\ y_1 = \delta p,\ y_2 = \delta\vartheta$, si ricavino le matrici ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** del sistema linearizzato.

```
A=[0,1,0,0; 0,0,-m/M*g,0; 0,0,0,1; 0,0,g/l*(M+m)/M,0];
B=[0,0; 1/M,-1/(l*M); 0,0; -1/(M*l),1/l^2*(M+m)/(M*m)];
C=[1,0,0,0; 0,0,1,0];
D=zeros(2);
```

2. Si verifichi che il sistema è raggiungibile e osservabile utilizzando come ingresso e uscita rispettivamente la forza e la posizione del carrello, e non è né raggiungibile, né osservabile, utilizzando come ingresso e uscita rispettivamente la coppia e la posizione dell'asta.

det(ctrb(A,B(:,1))), det(ctrb(A,B(:,2))), det(obsv(A,C(1,:))), det(obsv(A,C(2,:)))

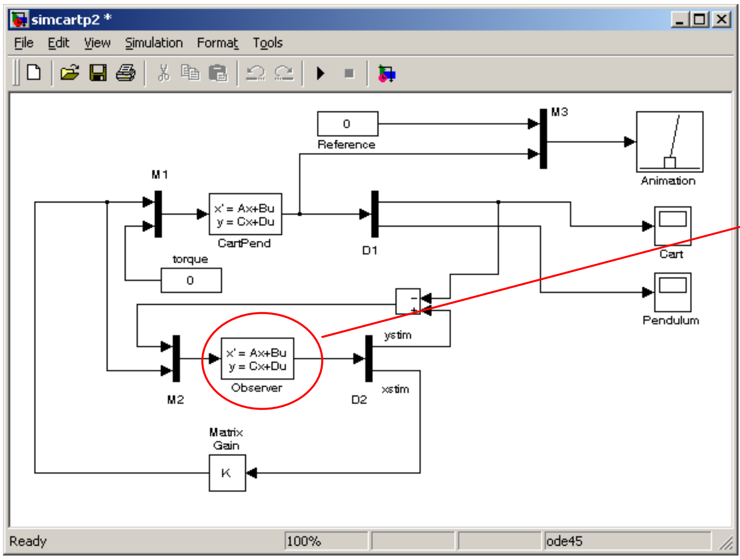
3. Si progetti una legge di controllo con retroazione dello stato che, agendo sulla forza δF, assegni gli autovalori del sistema in anello chiuso come radici del polinomio: $\chi^o(s) = (s^2 + 1.5s + 1)(s^2 + 2s + 1)$.

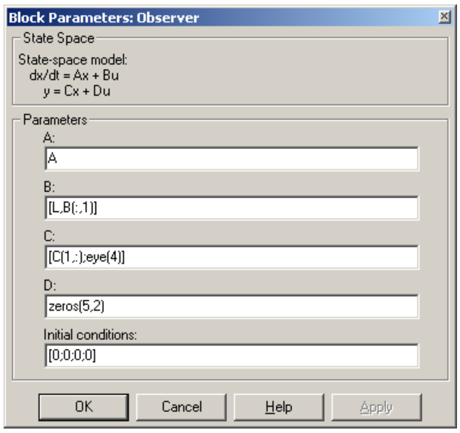
```
p=conv([1 1.5 1],[1 2 1]);
K=-place(A,B(:,1),roots(p));
```

4. Si progetti un ricostruttore dello stato che, misurando δp, assegni gli autovalori della dinamica dell'errore di stima come radici del polinomio: $\chi^o(s) = (s^2 + 15s + 100)(s^2 + 20s + 100)$.

```
pobs=conv([1 15 100],[1 20 100]);
L=-place(A',C(1,:)',roots(pobs))';
```

5. Utilizzando il seguente schema SIMULINK, si simuli il moto del sistema a partire da una condizione perturbata (per esempio posizione iniziale dell'asta diversa da zero).





Avvertenze

- Il blocco "Animation" si può prelevare dalla demo `penddemo` di Simulink, se presente nella versione utilizzata. Il blocco Animation prevede la presenza del blocco di nome `reference` (costituito da una costante);
- I parametri da indicare nei blocchi mux e demux, indicanti rispettivamente il numero di ingressi e di uscite, sono i seguenti:

  M1: 2; M2: 2; M3: [1;2]; D1: 2; D2: [1;4].
- Viene riportata anche la maschera per l'introduzione dei dati relativi al blocco "observer".
- Per assegnare la perturbazione iniziale si può porre il campo "initial condition" del blocco CartPend a **`[0;0;0.1;0]`**

6. Si progetti uno schema con regolazione a zero dell'errore. Si determini la legge di controllo in modo da assegnare globalmente gli autovalori del sistema aumentato con lo stato dell'integratore, come radici del polinomio:
$\chi^o(s) = (s^2 + 1.5s + 1)(s^2 + 2s + 1)(s + 2)$

```
Ktot=-place([A,zeros(4,1);-C(1,:),0],[B(:,1);0],[roots(p); -2]);
K=Ktot(1:4);ki=Ktot(5);
```

7. Utilizzando il seguente schema SIMULINK, si simuli la risposta ad uno scalino sul riferimento