Controlli automatici

Assegnamento degli autovalori

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria

Introduzione

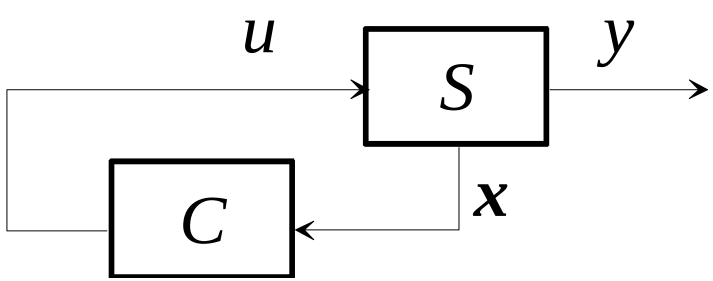
Con la tecnica dell'assegnamento degli autovalori ci proponiamo, dato un sistema lineare tempo invariante descritto nello spazio di stato, di progettare una legge di controllo in retroazione tale da posizionare gli autovalori del sistema in anello chiuso in punti desiderati del piano complesso (purché simmetrici rispetto all’asse reale).

Perché siamo interessati a questo problema?

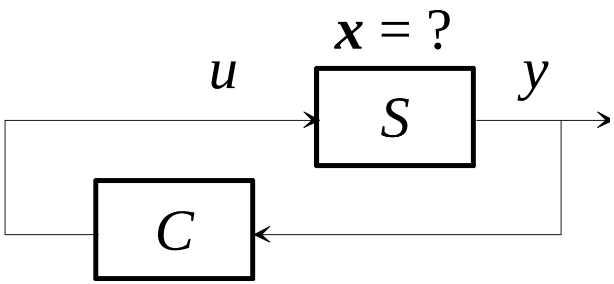
- Per stabilizzare un sistema instabile
- Per modificare le caratteristiche dei transitori del sistema, anche quelli associati ad autovalori a parte reale negativa.

Scenari

A) Informazione completa (stato accessibile)
Si assume che il controllore abbia a disposizione le misure di tutte le variabili di stato.



B) Informazione parziale (stato non accessibile)
Si assume che il controllore abbia a disposizione le misure solo delle variabili di uscita, non delle variabili di stato.



Assegnamento con stato accessibile

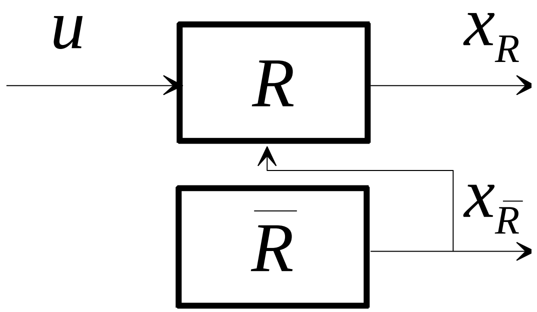
Date le equazioni del sistema sotto controllo a singolo ingresso:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$

ci proponiamo di trovare una legge di controllo non dinamica:

$$u(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

che risolva il problema.
Osserviamo che sarà possibile spostare gli autovalori solo della parte raggiungibile del sistema, dal momento che la parte non raggiungibile non è influenzata dall'ingresso.



Possiamo quindi assumere (***A***, ***B***) raggiungibile.

Sistema in forma canonica di controllo

Se il sistema è in forma canonica di controllo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$ è quindi:

$$\chi_A(s) = \det(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$$

Le equazioni del sistema in anello chiuso si ottengono sostituendo la legge di controllo nelle equazioni del sistema sotto controllo. Si ottiene immediatamente:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)$$

Sistema in forma canonica di controllo

$$
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_1+k_1 & -a_2+k_2 & \cdots & \cdots & -a_n+k_n \end{bmatrix}.
$$

Poiché anche ***A***+***BK*** è in forma canonica di controllo, il suo polinomio caratteristico è:

$$
\chi_{A+BK}(s) = \det(s\boldsymbol{I}_n - (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})) = s^n + (a_n - k_n)s^{n-1} + \cdots + (a_2 - k_2)s + (a_1 - k_1)
$$

Polinomio caratteristico desiderato

Siano ora λ_i^o, i=1,…,n gli autovalori desiderati per il sistema in anello chiuso, radici del polinomio caratteristico desiderato**:**

$$\chi^o(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(s - \lambda_i^o\right) = s^n + b_n s^{n-1} + \cdots + b_2 s + b_1$$

Uguagliando questo polinomio a quello già determinato per la matrice dinamica del sistema in anello chiuso ***A***+***BK***, si ottengono le relazioni:

$$b_i = a_i - k_i, \quad i = 1 \cdots n$$

Pertanto esiste una e una sola legge di controllo che risolve il problema dell'assegnamento degli autovalori, i cui coefficienti sono:

$$\boxed{k_i = a_i - b_i, \quad i = 1 \cdots n}$$

Sistema non in forma canonica di controllo

In questo caso occorre effettuare un cambiamento di variabili di stato per riportare il sistema in forma canonica di controllo:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t)$$

Le matrici del sistema nelle nuove variabili di stato sono, come è noto, le seguenti:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}$$

La matrice $\boldsymbol{T}$ si ottiene a partire dalle matrici di raggiungibilità prima e dopo il cambiamento di variabili di stato:

$$\boldsymbol{K}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{K}}_r = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{B}} & \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}} & \hat{\boldsymbol{A}}^2\hat{\boldsymbol{B}} & \cdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}_r$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{K}}_r \boldsymbol{K}_r^{-1}$$

Sistema non in forma canonica di controllo

A questo punto si risolve il problema dell'assegnamento degli autovalori per il sistema in forma canonica di controllo con la metodologia indicata al punto precedente, trovando:

$$u(t) = \hat{\boldsymbol{K}}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$$

Tornando alle variabili di stato originarie (che per ipotesi sono anche quelle direttamente misurabili), si ottiene la legge di controllo:

$$u(t) = \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$$

con:

$$\boxed{\boldsymbol{K} = \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}}$$

Conclusione**:** Se lo stato del sistema è accessibile, esiste una e una sola legge di controllo che consente di assegnare arbitrariamente gli n autovalori del sistema in anello chiuso se e solo se il sistema è completamente raggiungibile.

Esempio (1/3)

Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 2u \end{cases}$$

$$y = x_1 + x_2$$

in cui $\boldsymbol{x}$ è misurabile, si vuole progettare una legge di controllo che posizioni gli autovalori entrambi nel punto -1.

Risulta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo la raggiungibilità:

$$\boldsymbol{K}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{K}_r) = -6 \neq 0$$

Il sistema è quindi completamente raggiungibile.

Esempio (2/3)

Gli autovalori di ***A*** sono in –1 e 2. Il polinomio caratteristico di ***A*** è quindi:

$$\chi_A(s) = (s+1)(s-2) = s^2 - s - 2$$

Poiché si vogliono entrambi gli autovalori nel punto –1, il polinomio caratteristico desiderato è:

$$\chi^o(s) = (s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1$$

La legge di controllo per il sistema in forma canonica di controllo è quindi costituita dalla matrice con coefficienti:

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= a_1 - b_1 = -2 - 1 = -3 \\ \hat{k}_2 &= a_2 - b_2 = -1 - 2 = -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Tuttavia il sistema non è in forma canonica di controllo, per cui occorre trovare la matrice di trasformazione ***T***.

Esempio (3/3)

La forma canonica di controllo del sistema è:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cui corrisponde la matrice di raggiungibilità:

$$\hat{\boldsymbol{K}}_r = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{B}} & \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice del cambiamento di variabili di stato è quindi:

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{K}}_r \boldsymbol{K}_r^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Infine la legge di controllo nelle originarie variabili di stato è data da:

$$\boldsymbol{K} = \hat{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Sistemi a più ingressi

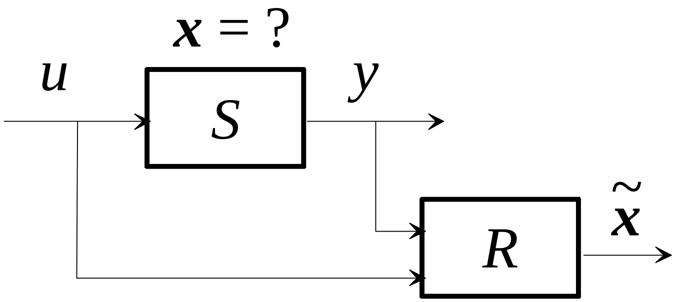
Nel caso generale la matrice $\boldsymbol{B}$ del sistema ha n righe e m colonne, m essendo il numero delle variabili di ingresso. Può succedere che da uno o più degli m ingressi il sistema sia completamente raggiungibile, ossia che, detta $\boldsymbol{B}_i$ la i-sima colonna di $\boldsymbol{B}$, la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_i$) risulti raggiungibile per qualche i.
In questo caso è possibile ricondursi al problema monovariabile appena risolto, agendo su uno di questi ingressi, senza utilizzare gli altri, ovvero progettare una matrice riga di guadagni $\boldsymbol{K}_i$ in modo che gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i$ siano in posizioni desiderate del piano complesso.

Se così non è, occorre dapprima assicurarsi che la coppia ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) sia completamente raggiungibile nel senso dei sistemi a più ingressi, ovvero che la matrice di raggiungibilità abbia *rango n*. Se questa ipotesi è verificata, è possibile dimostrare che esiste sempre almeno una matrice $\boldsymbol{K}$ di dimensioni $m \times n$ per cui gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ sono in posizioni desiderate del piano complesso.

Si osservi che, contrariamente al caso di sistema a singolo ingresso, per i sistemi a più ingressi esiste una pluralità di soluzioni al problema dell'assegnamento degli autovalori.

Stima dello stato

Sia ora lo stato del sistema non accessibile, e si disponga solo di misure delle uscite (oltre ovviamente a disporre degli ingressi di controllo).
Ci proponiamo di progettare un sistema che, alimentato da ingressi ed uscite del sistema oggetto dello studio, fornisca una stima delle variabili di stato del sistema



Chiameremo il sistema che fornisce la stima dello stato ricostruttore o osservatore (asintotico) dello stato.
Supporremo il sistema sotto controllo LTI , strettamente proprio e SISO:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

- *u* e *y* sono variabili scalari.
- le matrici ***A***, ***B***, ***C*** sono note senza incertezza.
- non si fanno ipotesi sulla stabilità di *S*

Replica del sistema

Costruiamo ora una replica del sistema, cioè un sistema con le stesse equazioni ed alimentato dallo stesso ingresso:

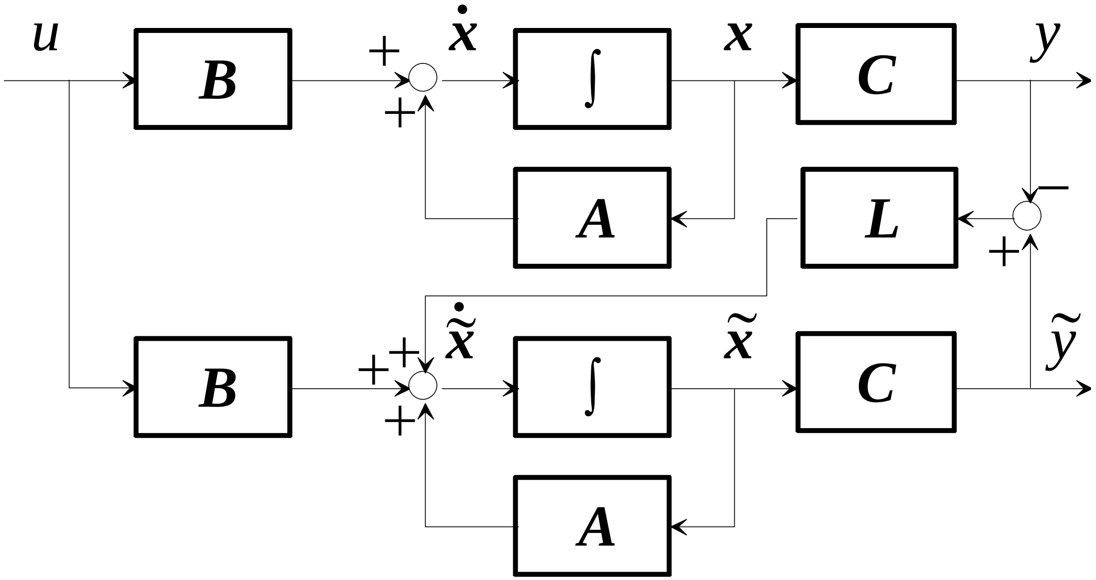
$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\
\tilde{\boldsymbol{x}}(0) &= \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \\
\tilde{y}(t) &= \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}$$

La replica differisce dal sistema originario solo per lo stato iniziale, che non è noto. Se lo stato iniziale fosse noto senza incertezza, l'uscita vera y e la sua replica coinciderebbero. In presenza di incertezza sullo stato iniziale si forma un errore tra le due uscite. Appare allora ragionevole correggere le equazioni dinamiche della replica del sistema con un termine che pesi la differenza tra $\tilde{y}$ e y:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}\left(\tilde{y}(t) - y(t)\right) \\
\tilde{\boldsymbol{x}}(0) &= \tilde{\boldsymbol{x}}_0 \\
\tilde{y}(t) &= \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)
\end{aligned}$$

Il ricostruttore dello stato

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}\left(\tilde{y}(t) - y(t)\right)$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \tilde{\boldsymbol{x}}_0$$
$$\tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$



Se, come ipotizzato, il sistema è a singola uscita, ***L*** è dimensionalmente un vettore colonna di *n* componenti.

L'errore di stima

Dobbiamo trovare sotto quali condizioni il ricostruttore opera correttamente, ossia produce una stima dello stato che differisce dallo stato vero $\boldsymbol{x}$ per un errore limitato nel tempo e asintoticamente nullo.
Per questo sottraiamo membro a membro le equazioni:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\left(\boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)\right)$$

Introducendo quindi la variabile:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

errore di stima dello stato, si ottiene l'equazione dinamica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

L'errore è quindi governato da un sistema privo di ingresso di matrice dinamica $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$. Dobbiamo quindi essere in grado di scegliere la matrice $\boldsymbol{L}$ in modo tale da posizionare arbitrariamente gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$.

La condizione di osservabilità

È già stato dimostrato che, data una coppia di matrici (***A***, ***B***) raggiungibile, è possibile determinare una matrice ***K*** in modo tale che gli autovalori della matrice ***A***+***BK*** siano in punti desiderati del piano complesso.

D'altra parte se λ_i[.] dà il generico autovalore di una matrice:

$$\lambda_i\left[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}\right]=\lambda_i\left[\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}\right)^T\right]=\lambda_i\left[\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{L}^T\right]$$

Ne consegue che, se la coppia ($\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{C}^T$) è raggiungibile, saremo in grado di risolvere il problema dell'assegnamento degli autovalori, che è uguale a quello già risolto pur di porre $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}^T$. D'altra parte è immediato verificare che la coppia ($\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{C}^T$) è raggiungibile se e solo se la coppia (***A***, ***C***) è osservabile.

Conclusione: Esiste una e una sola matrice di guadagni che consente di assegnare arbitrariamente gli *n* autovalori della dinamica dell'errore di stima dello stato se e solo se il sistema è completamente osservabile.

Il progetto del ricostruttore

La procedura per ricavare la matrice dei guadagni $\boldsymbol{L}$ si ottiene facilmente per dualità di quella già illustrata per ricavare la matrice $\boldsymbol{K}$ dell'assegnamento degli autovalori. Si ricorda che, data una terna ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$) che definisce un sistema dinamico strettamente proprio, si definisce sistema duale il sistema definito dalla terna ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$), con $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}^T$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}^T$.

Dobbiamo quindi individuare la matrice $\boldsymbol{L}^T$ in modo da assegnare gli autovalori della matrice $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}^T$. Per questo si calcolerà dapprima $\hat{\boldsymbol{L}}^T$ che risolve il problema per ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$) in forma canonica di controllo, quindi si ricaverà la matrice $\boldsymbol{T}$ del cambiamento di variabili di stato ed infine:

$$\boldsymbol{L}^T = \hat{\boldsymbol{L}}^T \boldsymbol{T}$$

ossia:

$$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T}^T \hat{\boldsymbol{L}}}$$

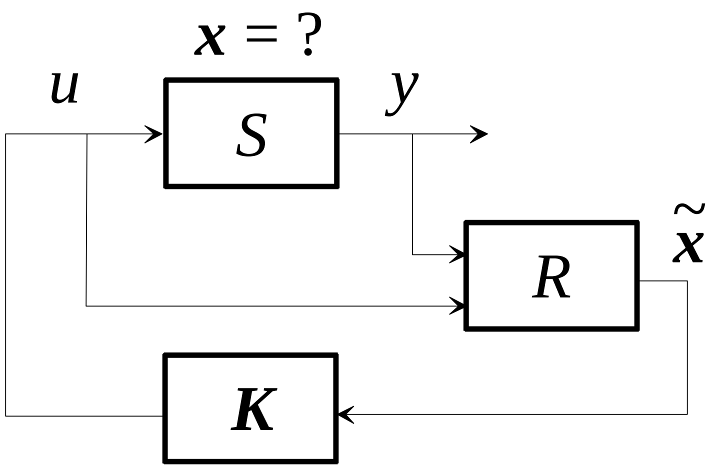
Osservazioni

- Come il problema dell'assegnamento degli autovalori, anche il problema della stima dello stato può essere risolto con strumenti analoghi a quelli qui sviluppati anche nel caso di sistema multivariabile (con più uscite).

- Si è supposto che il ricostruttore dello stato avesse lo stesso ordine *n* del sistema sotto controllo, ovvero che tutte le variabili di stato venissero ricostruite. È tuttavia possibile anche progettare dei ricostruttori di ordine ridotto, che forniscono la stima di un sottoinsieme di variabili di stato.

Assegnamento con stato non accessibile

Una volta progettato il ricostruttore dello stato, ci si chiede se sia possibile risolvere il problema dell'assegnamento degli autovalori con una legge di controllo agente sulla stima dello stato:



Ci poniamo nelle ipotesi che la coppia (***A***, ***B***) sia raggiungibile e la coppia (***A***, ***C***) osservabile.

Il sistema in anello chiuso (1/2)

Scriviamo le equazioni del sistema sotto controllo, del ricostruttore e della legge di controllo:

S
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

R
$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}\left(\tilde{y}(t) - y(t)\right) \\ \tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases}$$

LDC $\quad u(t) = \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$

Eliminando u, y e $\tilde{y}$ otteniamo:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = -\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\right)\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

Nulla vieta, a questo punto, di effettuare un cambiamento di variabili di stato, esprimendo il sistema nelle variabili $\boldsymbol{x}(t)$ e $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$.

Il sistema in anello chiuso (2/2)

Sottraendo membro a membro le equazioni si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{BK}\boldsymbol{\varepsilon}(t)$$
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC})\boldsymbol{\varepsilon}(t)$$

Il sistema in anello chiuso si può quindi rappresentare come:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{BK} \\ \hdashline \mathbf{0} & \boldsymbol{A} + \boldsymbol{LC} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{bmatrix}$$

e la sua matrice dinamica risulta triangolare a blocchi.
Ne consegue che gli autovalori della matrice sono la riunione degli autovalori delle due sottomatrici, ***A***+***BK*** e ***A***+***LC***, sulla diagonale. Ora:

- Se la coppia (***A***, ***B***) è raggiungibile, sappiamo posizionare $\lambda_i[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}]$, $\forall i$
- Se la coppia (***A***, ***C***) è osservabile, sappiamo posizionare $\lambda_i[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}]$, $\forall i$

Conclusione**:** è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori del sistema in anello chiuso misurando la sola uscita del sistema se e solo se il sistema è raggiungibile e osservabile.

Osservazioni

1) Di fatto se il sistema è di ordine n si perviene ad un sistema dinamico in anello chiuso di ordine $2n$ i cui autovalori sono posizionabili arbitrariamente.

2) Si osservi che vige un importante principio di separazione: si può progettare la legge di controllo $\boldsymbol{K}$ come se lo stato fosse misurabile e si può progettare il ricostruttore dello stato (matrice $\boldsymbol{L}$) come se il sistema sotto controllo fosse in anello aperto.

3) Il fatto che gli autovalori del sistema in anello chiuso possano essere scelti in modo arbitrario è naturalmente da intendersi come un risultato di valenza concettuale, ma al quale vanno associate anche delle limitazioni di ordine pratico che non emergono dalla trattazione formale dell'argomento. Apparirebbe infatti possibile rendere un sistema in anello chiuso arbitrariamente più veloce del sistema in anello aperto, spostando gli autovalori in posizioni arbitrariamente lontane. È evidente che ciò comporta conseguenze negative sulla variabile di controllo.

Proprietà del controllore

Riprendiamo le equazioni del ricostruttore e della legge di controllo:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}\left(\tilde{y}(t) - y(t)\right)$$
$$\tilde{y}(t) = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$
$$u(t) = \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

Eliminiamo $\tilde{y}$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{L}y(t)$$
$$u(t) = \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

Queste sono le equazioni un sistema dinamico SISO di ordine n, con ingresso y, uscita u e stato . La matrice dinamica è $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{BK}$+$\boldsymbol{LC}$.

Si osservi che, poiché dalla stabilità delle matrici $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{BK}$ e $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{LC}$ non si evince la stabilità della matrice $\boldsymbol{A}$+$\boldsymbol{BK}$+$\boldsymbol{LC}$, non c'è alcuna garanzia a priori che questo sistema dinamico (il controllore) sia asintoticamente stabile.

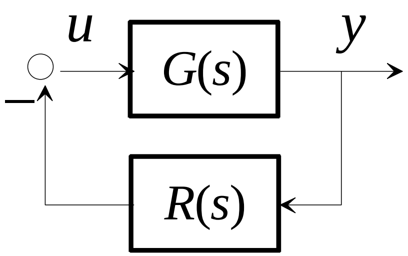
Funzione di trasferimento del controllore

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{L}y(t)$$
$$u(t) = \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$

Definendo le due funzioni di trasferimento, rispettivamente del sistema sotto controllo e del controllore:

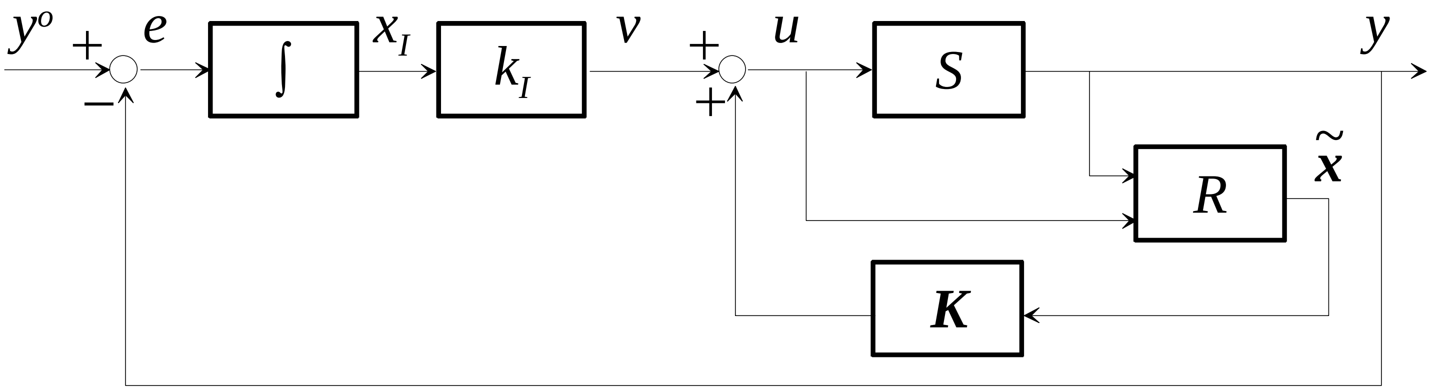
$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$
$$R(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{LC}))^{-1}\boldsymbol{L}$$

si riconosce che la connessione tra *G* e *R* è in retroazione negativa, come la connessione dei regolatori progettati con i metodi classici nel dominio della frequenza:



Regolazione a zero dell'errore

Il problema di assegnamento degli autovalori come lo abbiamo affrontato finora non prevede la presenza di un segnale di riferimento per l'uscita del sistema.
Se viceversa assume rilevanza anche un problema di inseguimento del riferimento ("servo problem" in terminologia inglese) allora è noto che per garantire precisione statica è di norma necessario un integratore.
Uno schema per l'introduzione dell'integratore in un sistema di controllo ad assegnamento degli autovalori con stima dello stato è il seguente:



Il progetto del guadagno k_I dell'integratore può essere condotto congiuntamente a quello della matrice dei guadagni $\boldsymbol{K}$ in modo tale da allocare gli autovalori del sistema in anello chiuso comprensivo dello stato dell'integratore.

Progetto dell'integratore

Detto x_I dello stato dell'integratore si ha:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$\dot{x}_I(t) = y^o(t) - y(t) = y^o(t) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

Definiamo:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_I \end{bmatrix}$$

Lo stato del sistema "aumentato". Si ha:

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{G}_u u(t) + \boldsymbol{G}_{y^o} y^o(t) \qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_{y^o} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

È possibile allocare arbitrariamente gli autovalori del sistema aumentato, agendo sulla variabile di ingresso u se e solo se la coppia ($\boldsymbol{F}$,$\boldsymbol{G}_u$) è raggiungibile.

Si dimostra che questo è possibile, ossia il problema della regolazione a zero dell'errore è risolvibile se e solo se il sistema non ha zeri in s=0.

Progetto dell'integratore

Valutiamo la matrice di raggiungibilità:

$$\boldsymbol{K}_{r(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}_u)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_u & \boldsymbol{F}\boldsymbol{G}_u & \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{G}_u & \cdots & \boldsymbol{F}^n\boldsymbol{G}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B} \\ 0 & -\boldsymbol{CB} & -\boldsymbol{CAB} & \cdots & -\boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{K}_r \\ 1 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

Per ipotesi $\boldsymbol{K}_r$ è non singolare, e quindi non lo è il secondo fattore del prodotto. Per quanto riguarda il primo fattore, se $\boldsymbol{A}$ è non singolare:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{CA}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\left(\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\right)$$

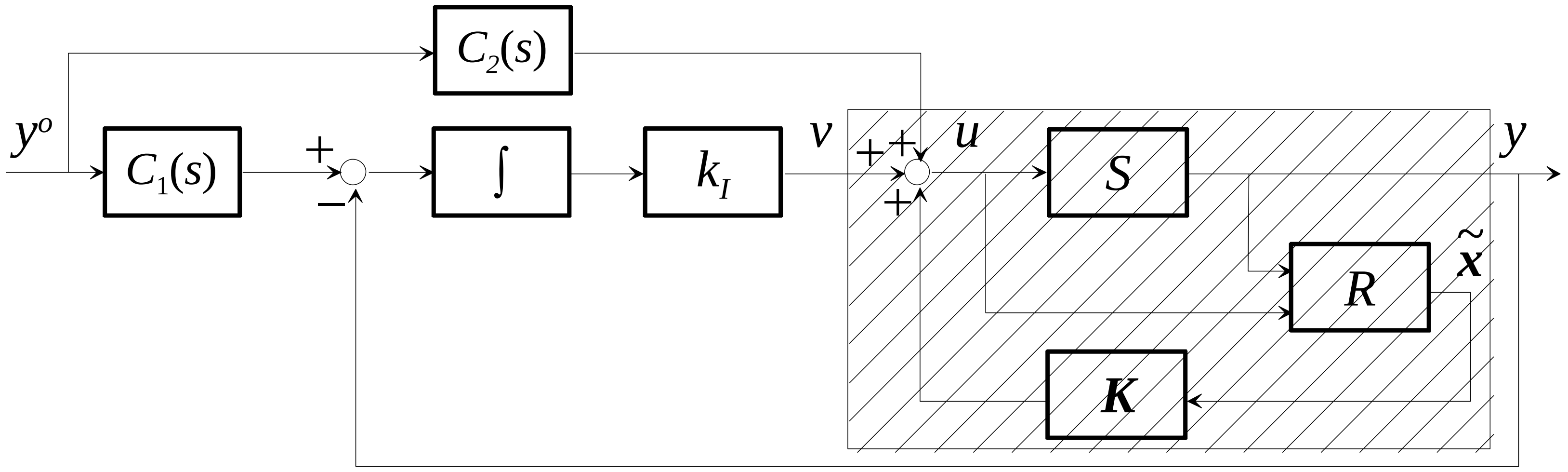
$$\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B} = -G(0)$$

$G(s)$ funzione di trasferimento del sistema

Pertanto il problema della regolazione a zero dell'errore è risolvibile se e solo se il sistema non ha zeri in s=0 (valido anche se $\boldsymbol{A}$ è singolare).

Elementi in feedforward

Per attribuire anche precisione dinamica al sistema di controllo si utilizzano elementi del sistema di controllo che agiscono in linea d'andata (feedforward).

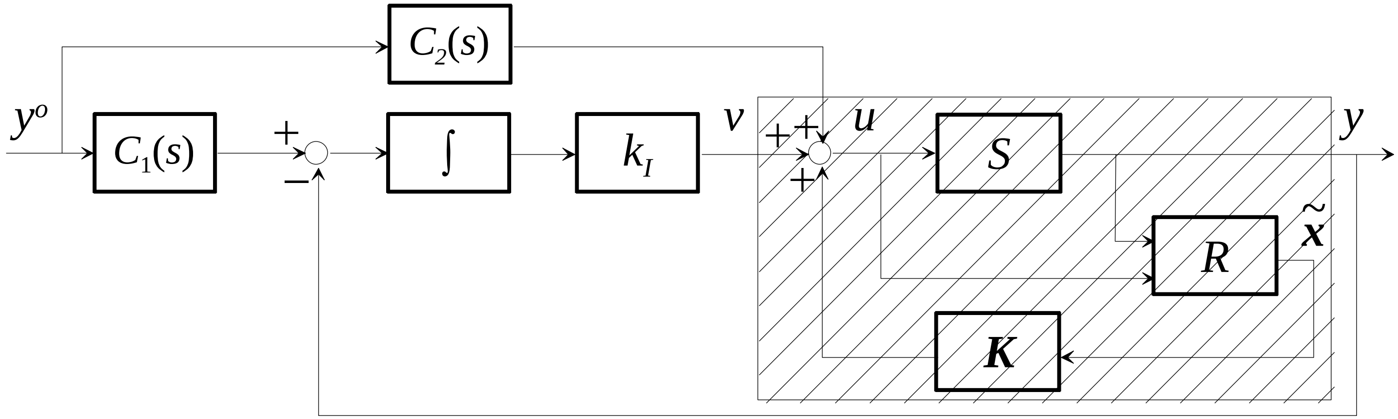


$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$ sistema sotto controllo

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = G_k(s) = \frac{N(s)}{D_k(s)}$$ sistema tratteggiato (la dinamica del ricostruttore non interviene in questa funzione di trasferimento)

$$D_k(s) = \det(s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK}))$$

Elementi in feedforward



$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = \frac{\left[C_1(s)k_I/s + C_2(s)\right]G_k(s)}{1 + k_I/s\,G_k(s)}$$

Gli elementi in feedforward si progettano secondo la regola:

$$C_1(s) = F^o(s), \quad C_2(s) = F^o(s)G_k(s)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{Y^o(s)} = F^o(s)$$

modello di riferimento

Requisiti su $F^o(s)$:

- guadagno unitario
- grado relativo almeno pari a quello di $G_k(s)$
- deve contenere gli eventuali zeri a parte reale positiva di $G_k(s)$