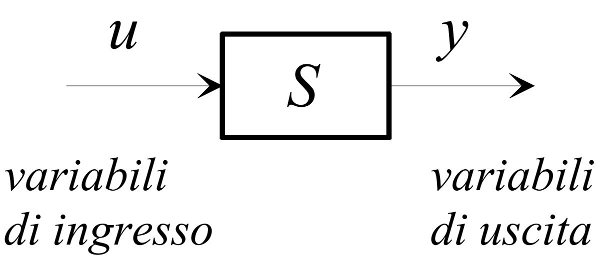
Controlli automatici per la meccatronica

Sistemi di controllo

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Che cos'è un sistema dinamico?

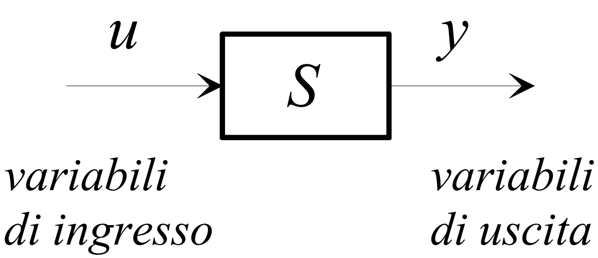


Un sistema dinamico si interfaccia con il "resto del mondo" per mezzo di una serie di variabili, che definiremo di **ingresso**, ed altre che definiremo di **uscita**.

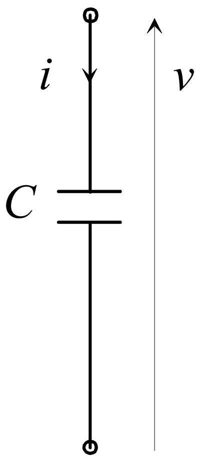
Definiamo di ingresso le variabili con cui dall'esterno si influenza il comportamento del sistema, di uscita quelle che caratterizzano il comportamento del sistema e sulle quali soffermiamo il nostro interesse (tipicamente perché costituiscono l'obiettivo del controllo).

La relazione che sussiste tra variabili di ingresso e di uscita è di **causa-effetto** e non ha nulla a che vedere con relazioni di afflusso ed efflusso di materia o energia (la portata di uscita in un serbatoio può essere variabile di ingresso per il sistema, se per esempio è comandata da una pompa).

L’ordine del sistema



E’ sufficiente descrivere il comportamento dinamico di un sistema mediante relazioni algebriche tra i suoi ingressi e le sue uscite? Quasi sempre no, per due motivi: occorre conoscere i valori assunti dalle variabili di ingresso a partire dall’istante iniziale ed occorre conoscere una o più condizioni iniziali.



ingresso: $u = i$

uscita: $y = v$

$$C\dot{y}(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = y(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau$$

Occorre quindi conoscere il valore iniziale della tensione e l’andamento della corrente dall’istante iniziale. Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite del sistema, noti gli andamenti degli ingressi a partire dall’istante iniziale, prende il nome di ***ordine*** del sistema: lo si indica con n .

Lo stato

Lo **stato** del sistema ad un dato istante riassume tutta la storia passata del sistema fino a quell'istante ed è quindi quanto occorre conoscere per calcolare le uscite da quell'istante in poi, noti gli ingressi. Per quanto affermato sopra, lo stato si può esprimere per mezzo di n variabili, indicate con i simboli x_1, x_2, ... , x_n, che prendono il nome di **variabili di stato**.

Sia m il numero delle variabili di ingresso e p il numero di variabili di uscita. Si introducono i tre vettori:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Definizione di sistema dinamico

Introdotte le due funzioni vettoriali:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m) \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m) \end{bmatrix},$$

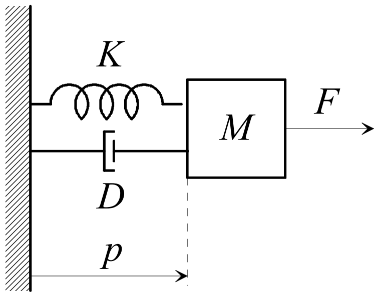
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix} g_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m) \\ g_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m) \\ \vdots \\ g_p(x_1,x_2,\dots,x_n,u_1,u_2,\dots,u_m) \end{bmatrix}$$

la formulazione vettoriale del sistema dinamico è la seguente :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)) \end{aligned}$$

Il sistema dinamico: esempi

Oscillatore meccanico: $F(t) = M\dot{v}(t) + Dv(t) + Kp(t)$



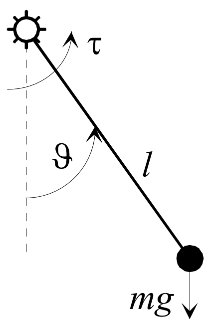
ingresso: $u = F$
uscita: $y = p$
var. di stato: $x_1 = p,\ x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}\left(-Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t)\right)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Pendolo: $\tau(t) = ml^2\dot{\omega}(t) + mgl\sin(\vartheta(t))$



ingresso: $u = \tau$
uscita: $y = \vartheta$
var. di stato: $x_1 = \vartheta,\ x_2 = \omega$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Il sistema dinamico: classificazioni

• Si dicono *SISO* (Single Input Single Output) i sistemi per cui $m=p=1$, genericamente *MIMO* (Multiple Input Multiple Output) gli altri.

• Si dicono *lineari* i sistemi in cui tutte le equazioni di stato e tutte le trasformazioni di uscita sono funzioni lineari delle variabili di stato e delle variabili di ingresso, *non lineari* tutti gli altri.

<u>Oscillatore meccanico</u>: SISO, lineare

<u>Pendolo</u>: SISO, non lineare

Movimento

Assegnata una condizione iniziale all'istante t_0:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

e una funzione di ingresso a partire da t_0:

$$\boldsymbol{u}(t) = \overline{\boldsymbol{u}}(t), \quad t \geq t_0$$

diciamo **movimento dello stato** $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ la soluzione delle equazioni di stato corredate dalla condizione iniziale assegnata:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}(t), \overline{\boldsymbol{u}}(t))$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$$

e movimento dell'uscita la conseguente uscita, ricavabile dalla trasformazione d'uscita:

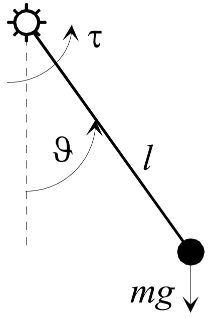
$$\overline{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{g}(\overline{\boldsymbol{x}}(t), \overline{\boldsymbol{u}}(t))$$

Equilibrio

I particolari movimenti costanti nel tempo, associati a ingressi costanti, prendono il nome di **equilibri**. La ricerca di eventuali stati di equilibrio associati all'ingresso $\bar{\boldsymbol{u}}$ si conduce annullando le derivate nelle equazioni di stato e ricercando le eventuali soluzioni dell'equazione vettoriale implicita in $\bar{\boldsymbol{x}}$:

$$\boldsymbol{f}\left(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}}\right) = 0$$

Pendolo:



ingresso: $u = \tau$
uscita: $y = \vartheta$
var. di stato: $x_1 = \vartheta$, $x_2 = \omega$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -\dfrac{g}{l}\sin\left(\bar{x}_1\right) + \dfrac{1}{ml^2}\bar{u} = 0 \end{cases}$$

Se $\bar{u} = 0$ si hanno i punti di equlibrio:

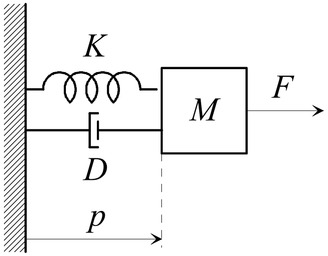
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = \pi \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemi lineari

Quando tutte le equazioni del sistema sono lineari nelle varibili di stato e di ingresso, il sistema è lineare ed è descritto dalle equazioni:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
\end{aligned}
$$

Oscillatore meccanico:



$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{M}\left(-Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t)\right) \\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}
$$

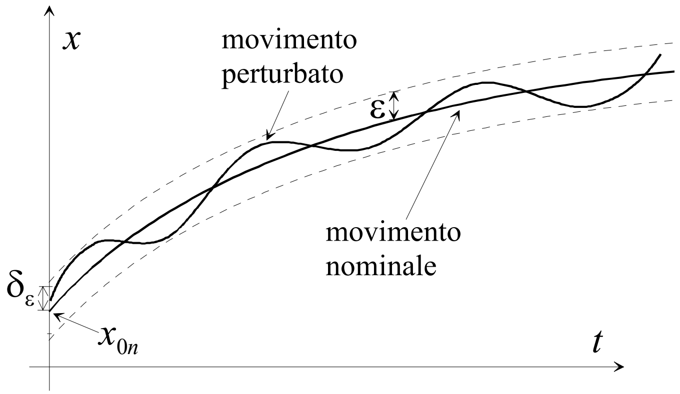
$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{D} = 0
$$

Un sistema lineare si può anche ottenere per **linearizzazione** di un sistema non lineare nell'intorno di un suo stato di equilibrio:

$$
\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}} \quad \boldsymbol{C} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}, \quad \boldsymbol{D} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}
$$

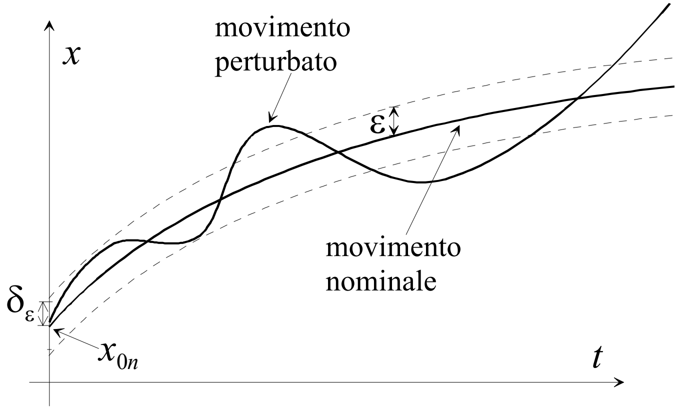
Stabilità

Movimento stabile

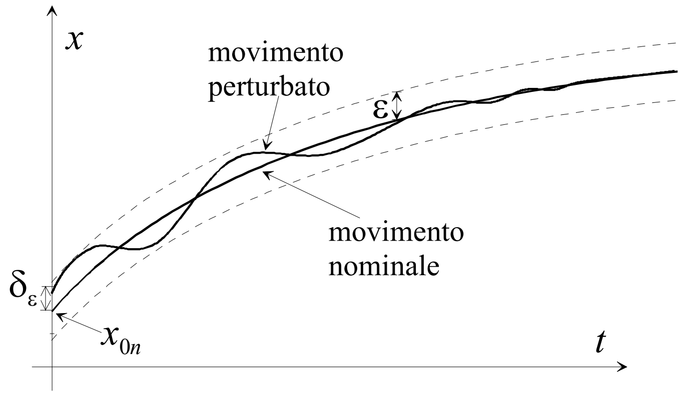


La stabilità è la proprietà dei movimenti del sistema di reagire a **perturbazioni** che intervengono sullo **stato iniziale**, dando luogo ad un movimento perturbato che non si allontana indefinitamente da quello nominale.

Movimento instabile



Movimento asintoticamente stabile



Stabilità nei sistemi lineari

In generale la stabilità è una proprietà dei singoli movimenti.
Per i sistemi lineari si dimostra che la discussione della stabilità di ogni movimento porta all'analisi delle soluzioni dell'equazione:

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}(t), \quad \delta\boldsymbol{x}(0) = \delta\boldsymbol{x}_0 .$$

con:

$$\delta\boldsymbol{x}(t) := \boldsymbol{x}_p(t) - \boldsymbol{x}_n(t), \quad \delta\boldsymbol{x}_0 := \boldsymbol{x}_{p0} - \boldsymbol{x}_{n0} .$$

Poiché il risultato di questa analisi è lo stesso qualunque sia il movimento di partenza, si può concludere che tutti i movimenti del sistema sono stabili, o instabili o asintoticamente stabili.
La stabilità è quindi una **proprietà del sistema**.

Criterio degli autovalori

Dall'analisi delle soluzioni dell'equazione:

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}(t), \quad \delta\boldsymbol{x}(0) = \delta\boldsymbol{x}_0.$$

si possono trarre le seguenti conclusioni (valide per matrice $\boldsymbol{A}$ diagonalizzabile).

Un sistema dinamico lineare è:

asintoticamente stabile: se e solo se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ hanno parte reale negativa;

stabile: se e solo se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ hanno parte reale negativa o nulla e ne esistono a parte reale nulla;

instabile: se e solo se esistono autovalori di $\boldsymbol{A}$ a parte reale positiva

Funzione di trasferimento

Si consideri un sistema lineare:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

E' noto che una rappresentazione alternativa del sistema si ottiene introducendo i vettori $\boldsymbol{U}(s)$ e $\boldsymbol{Y}(s)$, rispettivamente vettori delle trasformate di Laplace degli ingressi e delle uscite del sistema dinamico.

$$\begin{tikzcd}
u(t) \arrow[r, "\text{trasformata}"] \arrow[d, bend right, "\textit{eq. differenziali}"'] & U(s) \arrow[d, bend left, "\textit{eq. algebriche}"] \\
y(t) & Y(s) \arrow[l, "\text{antitrasformata}"']
\end{tikzcd}$$

Assunto lo stato iniziale del sistema nullo, il legame tra i due vettori è espresso dalla **funzione di trasferimento** (matrice $p \times m$):

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

Calcolo della funzione di trasferimento

Dal sistema (SISO) in *t* ...

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \end{cases}$$

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t) + du(t)$$

… al sistema in *s*

$$\begin{cases} sX_1(s) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \ldots + a_{1n}X_n(s) + b_1U(s) \\ sX_2(s) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \ldots + a_{2n}X_n(s) + b_2U(s) \\ \vdots \\ sX_n(s) = a_{n1}X_1(s) + a_{n2}X_2(s) + \ldots + a_{nn}X_n(s) + b_nU(s) \end{cases}$$

$$Y(s) = c_1X_1(s) + c_2X_2(s) + \ldots + c_nX_n(s) + dU(s)$$

Si risolve il sistema in s: $\boxed{G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}}$ f.d.t.

Struttura della funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

La funzione di trasferimento è razionale (rapporto di polinomi).

$$G(s)=\rho\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)},\ m\le n$$

Se il denominatore è di grado n, si hanno n poli (nel campo complesso)

ρ: costante di trasferimento,
z_i: zeri
p_i: poli

$$G(s)=\frac{\mu}{s^g}\frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\cdots(1+s\tau_{\tilde{m}})}{(1+sT_1)(1+sT_2)\cdots(1+sT_{\tilde{n}})}$$

g conta il numero di poli o zeri in s = 0

μ: guadagno
g: tipo
T_i, τ_i: costanti di tempo

Stabilità e f.d.t.

Il denominatore della funzione di trasferimento coincide, a meno di cancellazioni, con il polinomio caratteristico della matrice ***A***.

Pertanto l'analisi di stabilità può essere condotta anche sui poli della funzione di trasferimento:

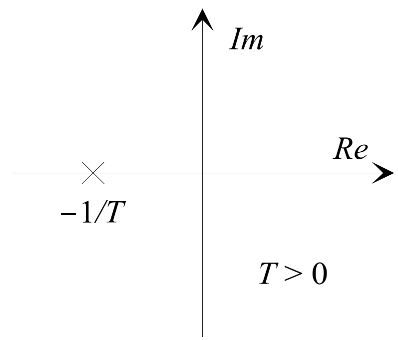
Tutti i poli a parte reale negativa	$\Rightarrow$	as. stabilità
Almeno un polo a parte reale positiva	$\Rightarrow$	instabilità

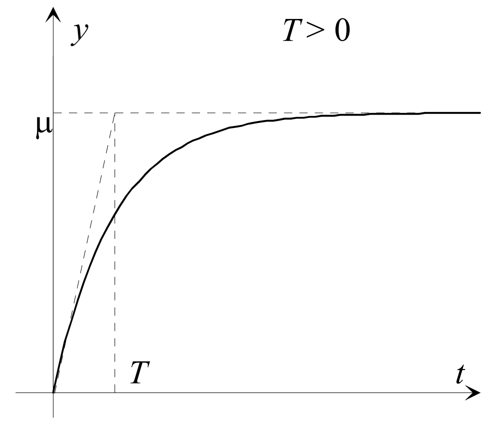
Sistemi del 1° e 2° ordine

risposte allo scalino

Un sistema del 1° ordine:

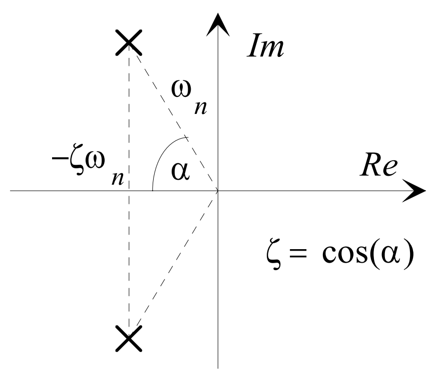
$$G(s)=\frac{\mu}{1+sT}$$

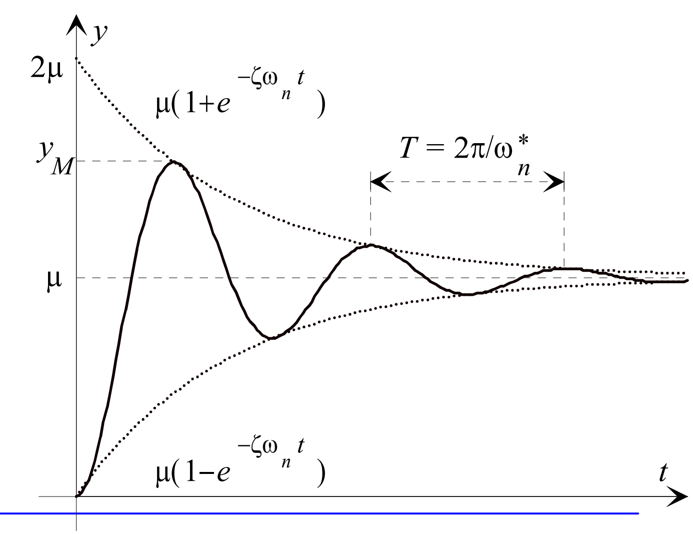




Un sistema del 2° ordine:

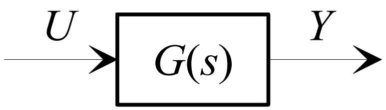
$$G(s)=\mu\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



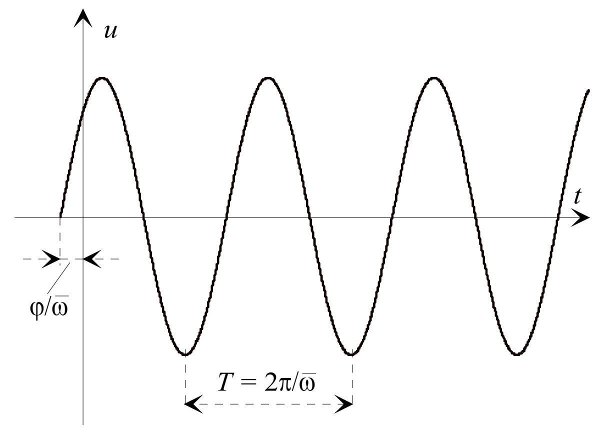


La risposta in frequenza

Imponiamo ad un sistema dinamico un ingresso sinusoidale:



$$u(t) = A \sin(\overline{\omega} t + \varphi)$$



Se il sistema è **asintoticamente stabile**, esaurito un transitorio iniziale, anche l'uscita è sinusoidale, con la stessa pulsazione della sinusoide in ingresso, e risulta in particolare:

$$y(t) = B \sin(\overline{\omega} t + \psi)$$

$$\begin{cases} B = A\left|G(j\overline{\omega})\right| \\ \psi = \varphi + \angle G(j\overline{\omega}) \end{cases}$$

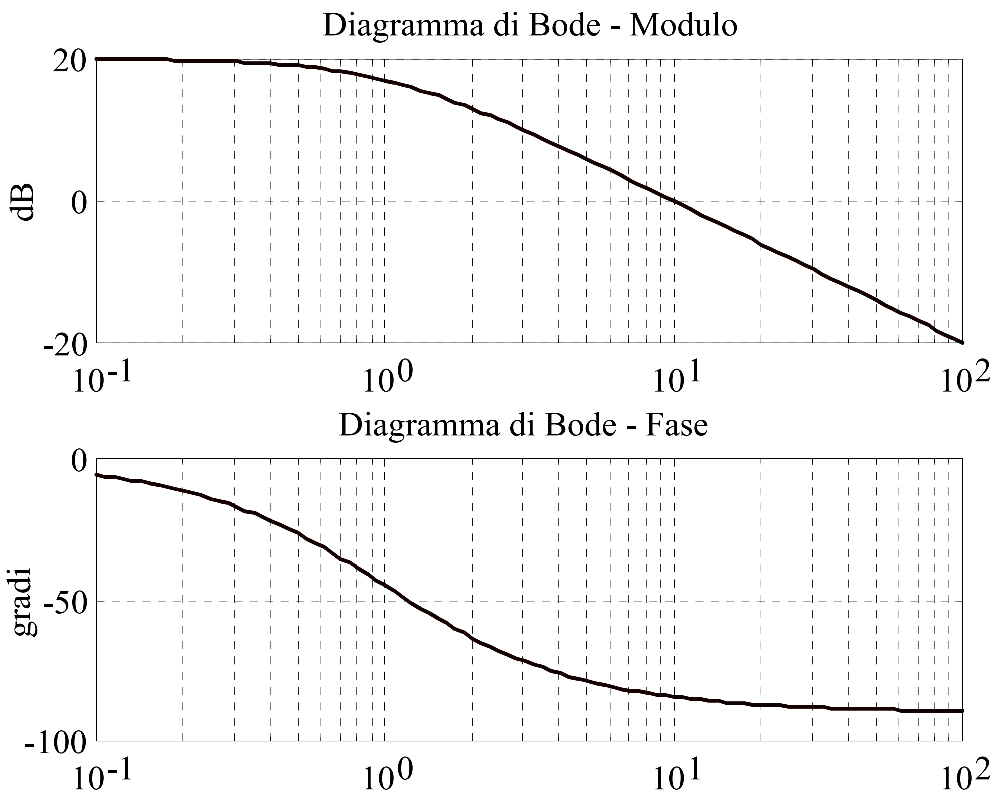
$$G(j\omega), \quad \omega > 0$$

Risposta in frequenza

Diagrammi di Bode

La risposta in frequenza è una funzione a valori complessi.

Un modo per rappresentarla graficamente è riportarne il modulo e la fase al variare di ω:



Modulo

-ascissa: ω in scala log.

-ordinata:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right|$$

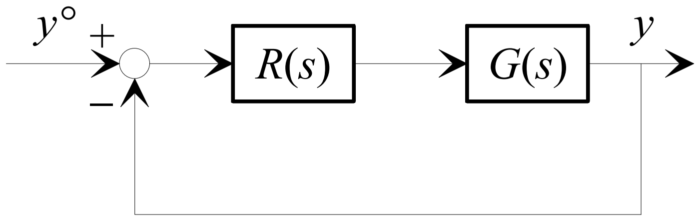
Fase

-ascissa: ω in scala log.

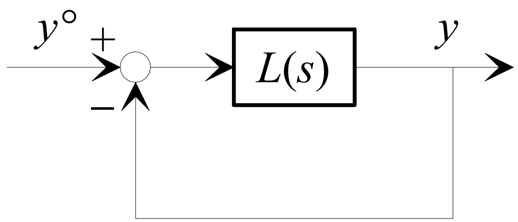
-ordinata: fase in gradi

I sistemi in anello chiuso

I sistemi di controllo prevedono di norma la chiusura di anelli di retroazione



$R(s)$: regolatore
$G(s)$: sistema sotto controllo



$L(s) = R(s)\ G(s)$: f.d.t. d'anello

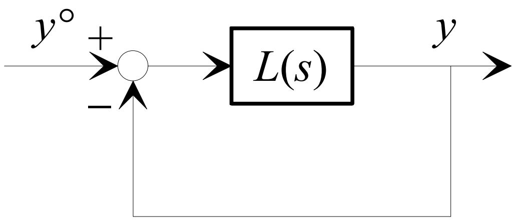
$$\frac{y(s)}{y^{\circ}(s)} = F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

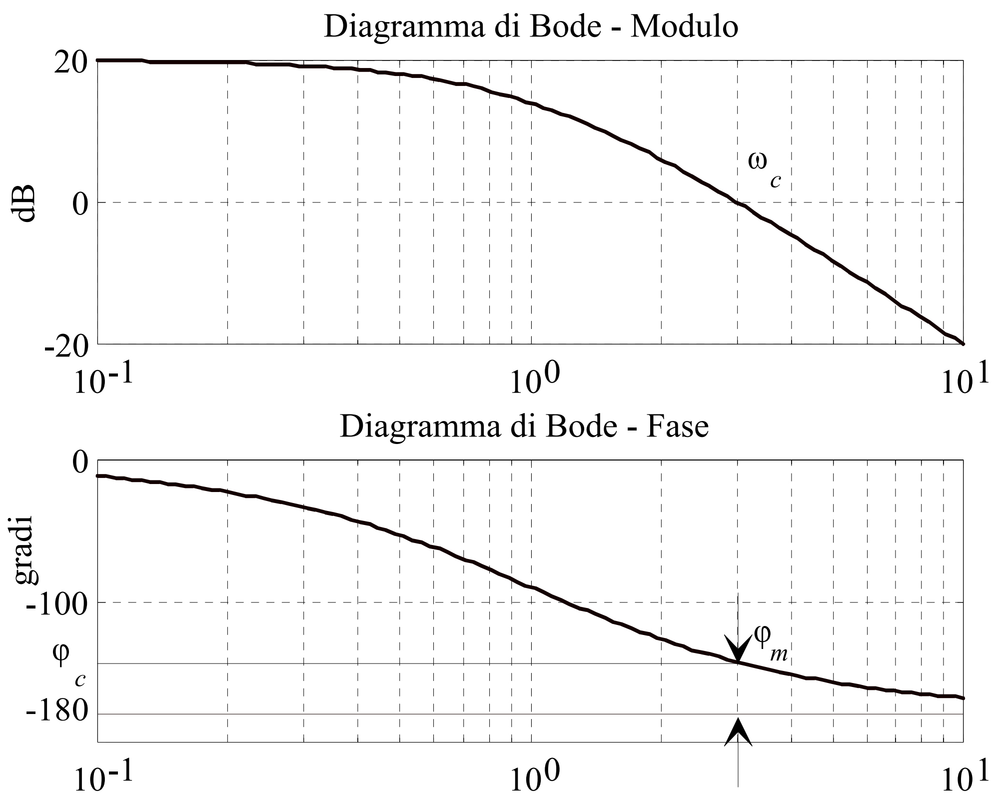
$F(s)$: f.d.t. in anello chiuso

Sul sistema di controllo in anello chiuso si possono compiere analisi di stabilità (nominale e robusta) e prestazioni (statiche e dinamiche)

Il criterio di stabilità di Bode

Ipotesi su $L(s)$
- guadagno positivo
- nessun polo a parte reale positiva





ω_c : pulsazione critica
φ_c : fase critica
φ_m : margine di fase

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$$

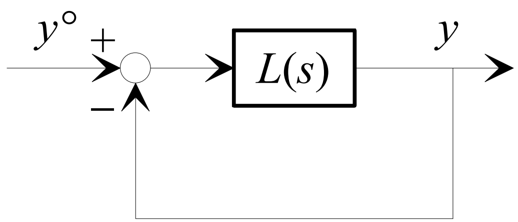
Sistema as. stabile

$\Leftrightarrow$

$\varphi_m > 0$

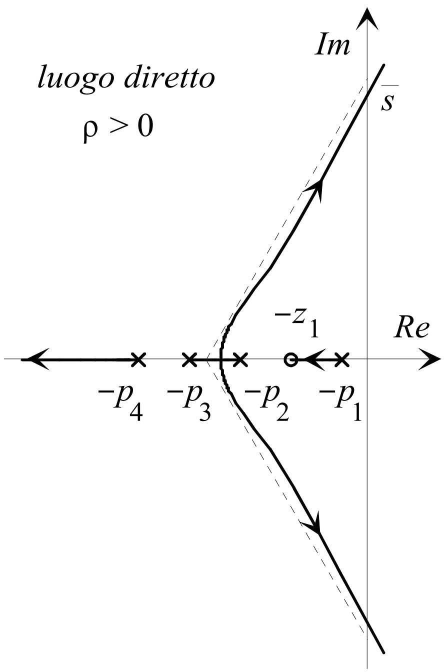
Il luogo delle radici

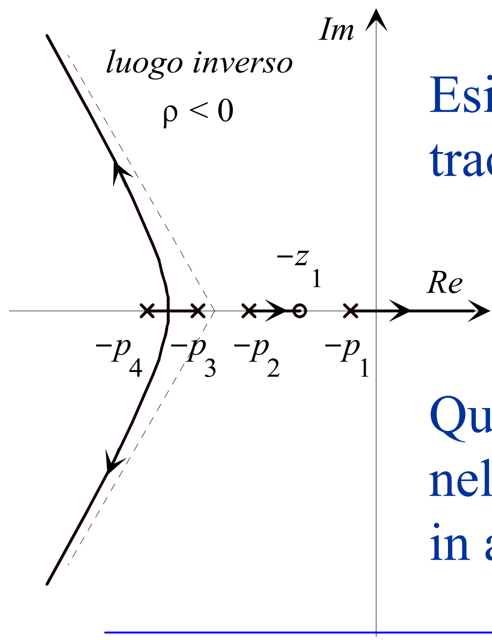
Dato un sistema di controllo:



$$L(s) = \rho \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Come variano i poli del **sistema in anello chiuso** al variare di ρ?

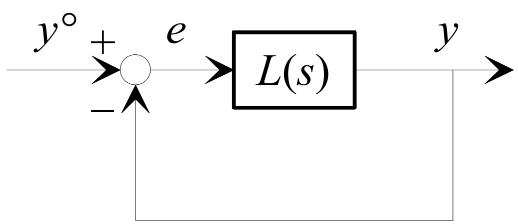




Esistono regole per tracciare rapidamente i luoghi

Quando almeno un ramo è nel semipiano destro il sistema in anello chiuso è instabile.

Prestazioni statiche in anello chiuso



$$L(s) = \frac{\mu_L}{s^{g_L}} \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\cdots(1+s\tau_m)}{(1+sT_1)(1+sT_2)\cdots(1+sT_n)}$$

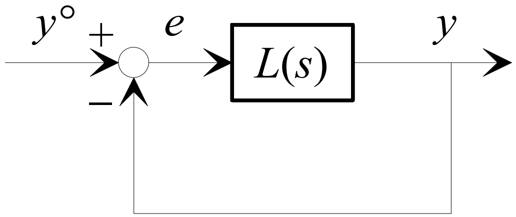
Quanto vale l'errore a regime quando si perturba $y°$?

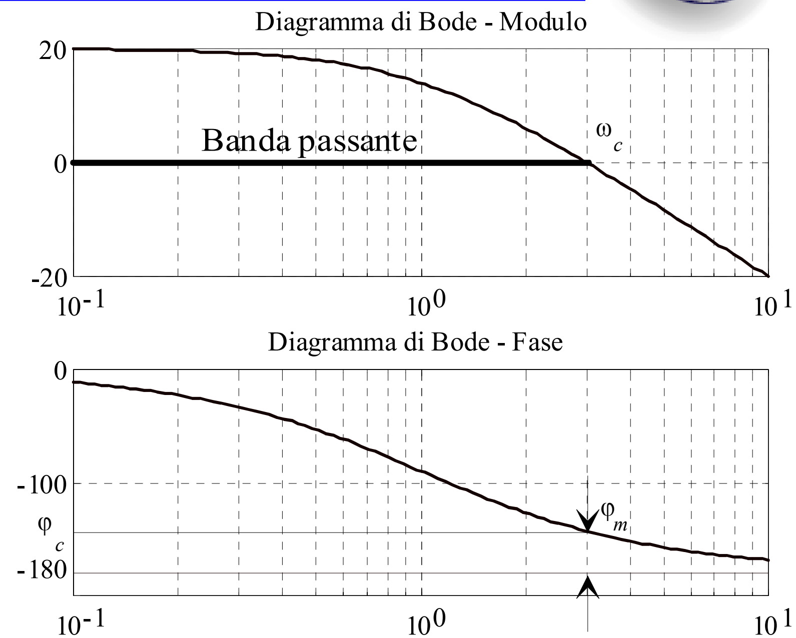
g_L	$y° = A\,\mathrm{sca}(t)$	$A\,\mathrm{ram}(t)$	$A\,\mathrm{par}(t)$
0	$A/(1+\mu_L)$	∞	∞
1	0	A/μ_L	∞
2	0	0	A/μ_L

- L'errore dipende da guadagno e tipo di L
- Perché l'errore sia nullo quando $y°$ è uno scalino occorre almeno un polo in s = 0 ($g_L > 0$).

$\mathrm{ram}(t) = t,\ t \geq 0$
$\mathrm{par}(t) = t^2/2,\ t \geq 0$

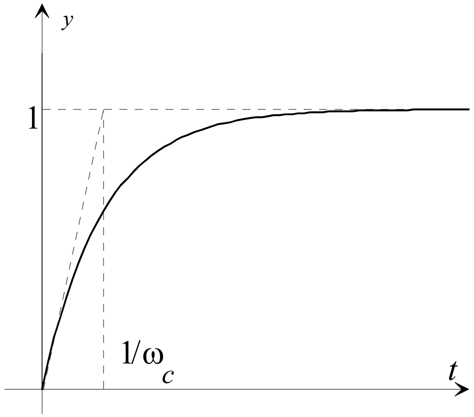
Prestazioni dinamiche in anello chiuso





Con che rapidità y insegue $y°$?

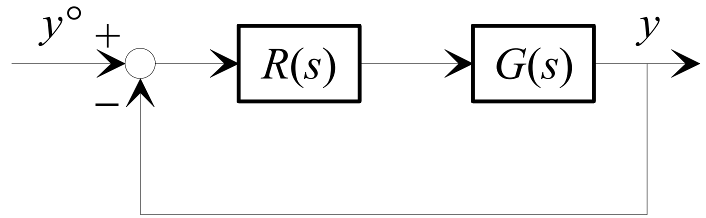
Le risposte in anello chiuso oscillano o sono smorzate?



Se φ_m è elevato le risposte sono smorzate e si esauriscono in un tempo pari a 4÷5 volte $1/\omega_c$

Es: ω_c=100 rad/s $\Rightarrow \tau_a \approx 5/\omega_c = 50$ ms

Sintesi del controllore



La sintesi (o progetto) del controllore consiste nel determinare la funzione di trasferimento $R(s)$ del controllore, data la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema sotto controllo, in modo da soddisfare alcune specifiche di progetto:

- *Stabilità*
- *Prestazioni statiche*
- *Prestazioni dinamiche*
- *Reiezione di disturbi*
- *Specifiche addizionali (struttura di R(s), vincoli all'azione di controllo…)*

In questo corso ci occuperemo del progetto del controllore per problemi di controllo del moto.

Controllori PID

Nei problemi di controllo del moto si utilizzano molto i controllori PID (ad azione Proporzionale Integrale e Derivativa).
La legge di controllo PID nel dominio del tempo è la seguente:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

In alternativa:

$$u(t) = K_P \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau)d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$T_I = \frac{K_P}{K_I}$$ (tempo integrale)

$$T_D = \frac{K_D}{K_P}$$ (tempo derivativo)

In termini di funzione di trasferimento:

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) = \frac{K_P}{T_I} \frac{1 + sT_I + s^2 T_I T_D}{s}$$