



Controlli automatici per la mecatronica

Controllo del moto

Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Controllo del moto



Parte I

Pianificazione della traiettoria

Pianificazione della traiettoria



Nelle macchine automatiche la movimentazione delle parti meccaniche avviene sempre più spesso mediante attuatori elettrici (cosiddette *camme elettriche*) che stanno via via soppiantando le movimentazioni meccaniche (*camme meccaniche*), eseguite mediante cinematismi

Ciascuno di questi attuatori compie un movimento, passando genericamente da un punto iniziale ad un punto finale.

Pianificare la traiettoria significa stabilire la modalità con cui il movimento dal punto iniziale al punto finale deve avvenire, ovvero con quali profili di posizione, velocità ed accelerazione. Una corretta pianificazione consente al sistema di controllo del moto in anello chiuso di inseguire correttamente la traiettoria, evitando raggiungimento delle saturazioni e sollecitazioni alla struttura.

Spazio operativo e spazio di giunto



Nella pianificazione della traiettoria per macchine a più assi di moto (come i manipolatori robotici) si opera una distinzione:

Traiettorie nello spazio operativo: si tratta di movimenti definiti nel comune spazio cartesiano, comprensivi di moti di traslazione e di rotazione. Si specifica il moto di un punto della macchina (tipicamente l'organo terminale).

Traiettorie nello spazio di giunto: si specifica direttamente l'andamento desiderato per la posizione, la velocità e l'accelerazione dei singoli assi (o giunti).

Cammino geometrico e legge oraria



Cammino geometrico: può essere definito nello spazio operativo o in quello di giunto, ed impone dei vincoli di tipo solamente geometrico sul percorso desiderato (segmenti di retta, archi di circonferenza o di parabola, ecc..)

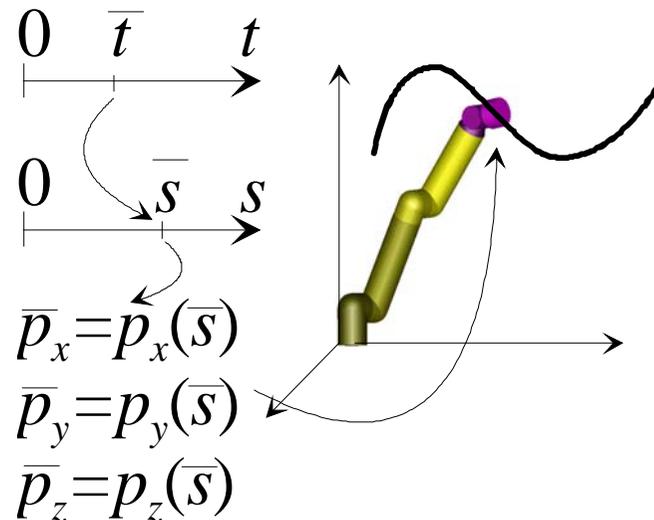
Legge oraria: specifica come il cammino geometrico debba essere percorso, in quanto tempo, con quali velocità, accelerazioni, se fermandosi in qualche punto, ecc..

Il cammino geometrico può essere espresso nella forma:

$p=p(s)$ spazio operativo

$q=q(s)$ spazio dei giunti

con $s=s(t)$ (legge oraria).



Traiettorie nello spazio dei giunti



Con la pianificazione della traiettoria nello spazio dei giunti si desidera generare una funzione $q(t)$ che interpola i valori assegnati per le variabili di giunto, rispettando i vincoli imposti.

Alcuni criteri per la scelta della traiettoria possono essere:

- Bassa complessità computazionale
- Continuità di posizioni e velocità (ed eventualmente di accelerazioni)
- Minimizzazione di effetti indesiderati (curvatura non regolare)

Operiamo una distinzione:

Moto punto-punto:

si specificano solo i punti estremi ed il tempo di transizione

Moto su percorso assegnato:

si specificano anche dei punti intermedi

N.B. Nel seguito faremo riferimento alla pianificazione della traiettoria per una singola variabile di giunto.

Traiettorie polinomiali



Il caso più semplice di pianificazione della traiettoria per moto punto-punto si ha quando sono specificate alcune condizioni iniziali e finali sulla posizione, velocità ed eventualmente anche su accelerazione e jerk (derivata dell'accelerazione) ed il tempo di percorrenza.

Si possono prendere in considerazione funzioni polinomiali del tipo:

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$$

Più alto è il grado n del polinomio, più condizioni al contorno si possono soddisfare e più *smooth* (dolce) sarà la traiettoria.



Traiettorie cubiche

Si supponga che siano specificate le seguenti condizioni al contorno:

- un istante iniziale ed un istante finale t_i e t_f
- posizione e velocità iniziale q_i e \dot{q}_i
- posizione e velocità finale q_f e \dot{q}_f

Si hanno quindi quattro condizioni al contorno, per poter rispettare le quali occorre utilizzare un polinomio di grado almeno pari a tre (cubica):

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + a_3(t - t_i)^3$$

Imponiamo le condizioni al contorno:

$$q(t_i) = q_i$$

$$\dot{q}(t_i) = \dot{q}_i$$

$$q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f$$

si ottiene:

$$a_0 = q_i$$

$$a_1 = \dot{q}_i$$

$$a_2 = \frac{-3(q_i - q_f) - (2\dot{q}_i + \dot{q}_f)T}{T^2}$$

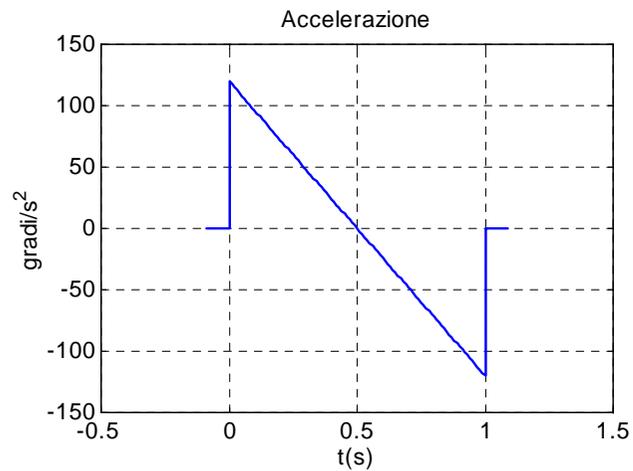
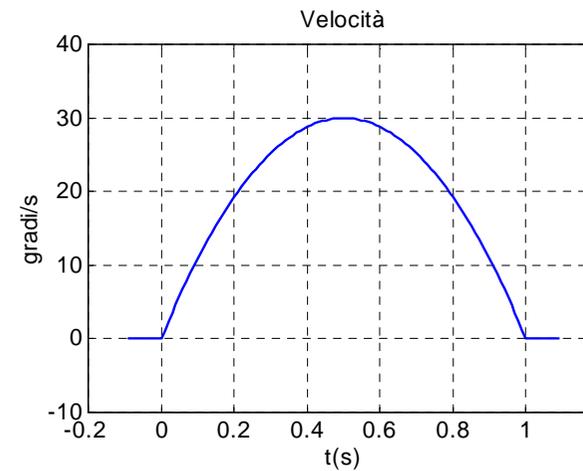
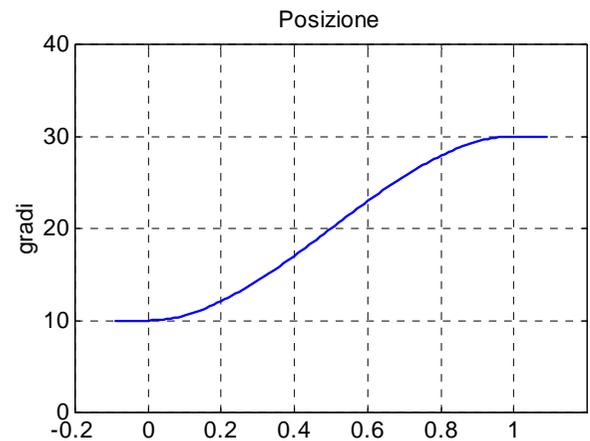
$$a_3 = \frac{2(q_i - q_f) + (\dot{q}_i + \dot{q}_f)T}{T^3}$$

$$T = t_f - t_i$$



Traiettorie cubiche: esempio

$$t_i = 0, t_f = 1s, q_i = 10^\circ, q_f = 30^\circ, \dot{q}_i = \dot{q}_f = 0^\circ/s$$



Polinomi di grado cinque



Per imporre condizioni anche sulle accelerazioni, occorre passare a polinomi di grado 5:

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_i) + a_2(t - t_i)^2 + a_3(t - t_i)^3 + a_4(t - t_i)^4 + a_5(t - t_i)^5$$

Imponendo le condizioni al contorno:

$$q(t_i) = q_i \quad q(t_f) = q_f$$

$$\dot{q}(t_i) = \dot{q}_i \quad \dot{q}(t_f) = \dot{q}_f$$

$$\ddot{q}(t_i) = \ddot{q}_i \quad \ddot{q}(t_f) = \ddot{q}_f$$

si ottiene:

$$a_0 = q_i$$

$$a_1 = \dot{q}_i$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \ddot{q}_i$$

$$a_3 = \frac{20(q_f - q_i) - (8\dot{q}_f + 12\dot{q}_i)T - (3\ddot{q}_f - \ddot{q}_i)T^2}{2T^3}$$

$$a_4 = \frac{30(q_i - q_f) + (14\dot{q}_f + 16\dot{q}_i)T + (3\ddot{q}_f - 2\ddot{q}_i)T^2}{2T^4}$$

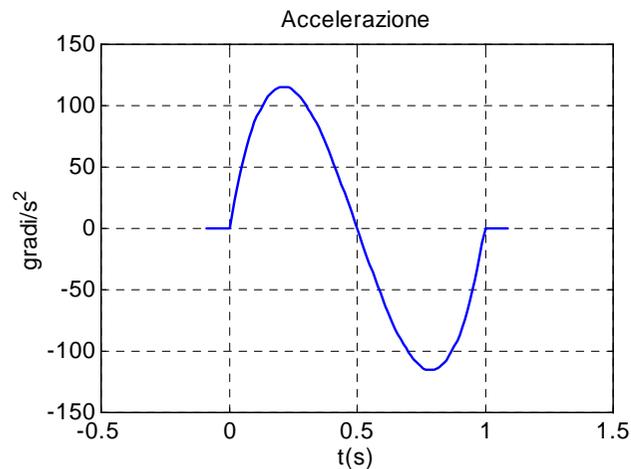
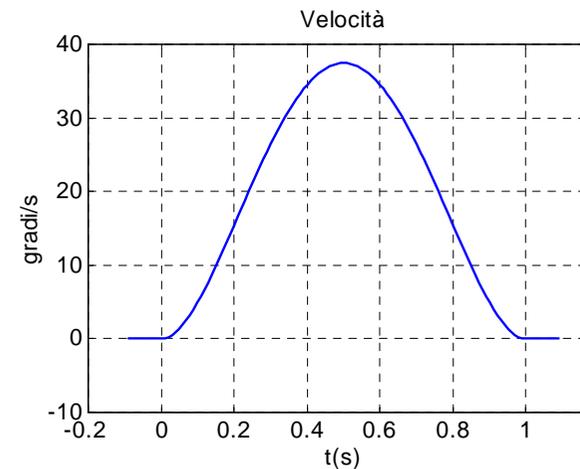
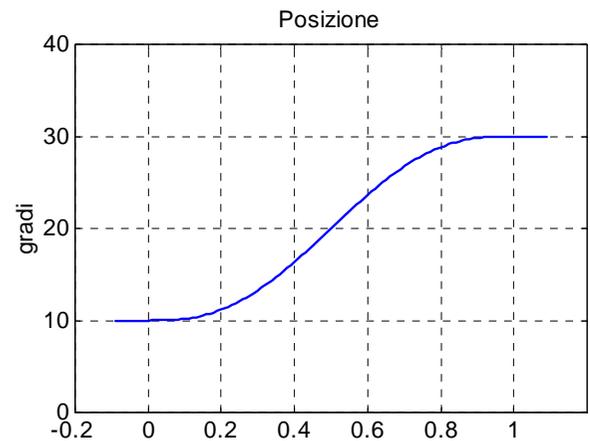
$$a_5 = \frac{12(q_f - q_i) - 6(\dot{q}_f + \dot{q}_i)T - (\ddot{q}_f - \ddot{q}_i)T^2}{2T^5}$$

$$T = t_f - t_i$$



Polinomio di grado cinque: esempio

$$t_i = 0, t_f = 1s, q_i = 10^\circ, q_f = 30^\circ, \dot{q}_i = \dot{q}_f = 0^\circ/s, \ddot{q}_i = \ddot{q}_f = 0^\circ/s^2$$





Traiettoria armonica

La traiettoria armonica generalizza l'equazione di un moto armonico, nel quale l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, ma di segno opposto. Una traiettoria armonica presenta derivate continue in tutti i punti interni all'intervallo temporale della traiettoria, per qualsiasi ordine di derivazione.

Le equazioni sono le seguenti:

$$q(t) = \frac{q_f - q_i}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right) \right) + q_i$$

$$\dot{q}(t) = \frac{\pi(q_f - q_i)}{2(t_f - t_i)} \sin \left(\frac{\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right)$$

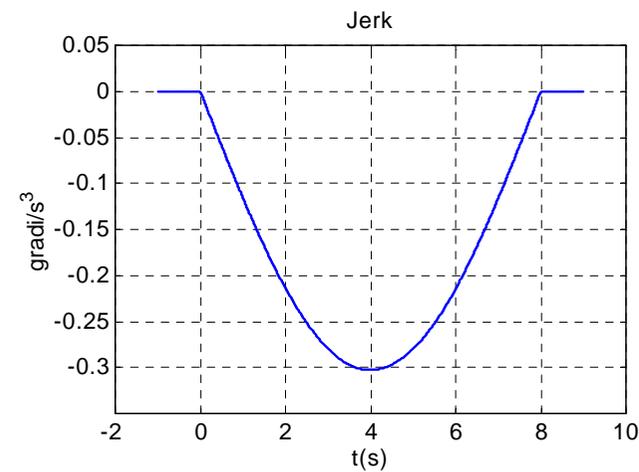
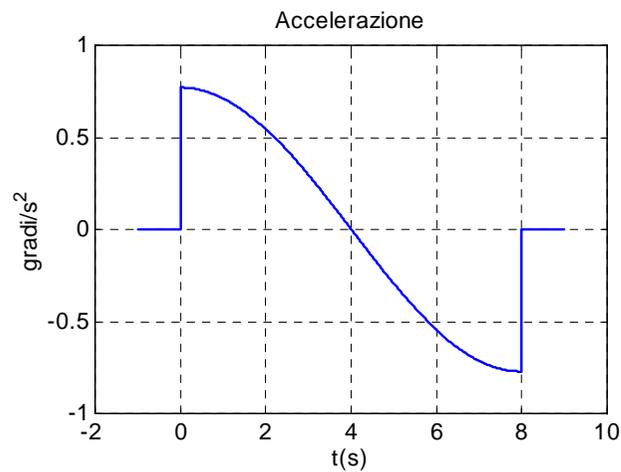
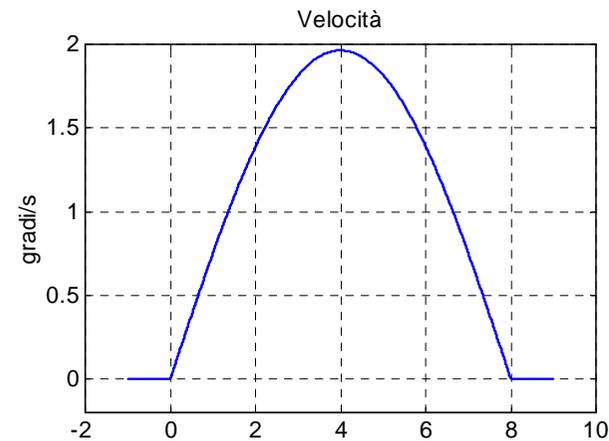
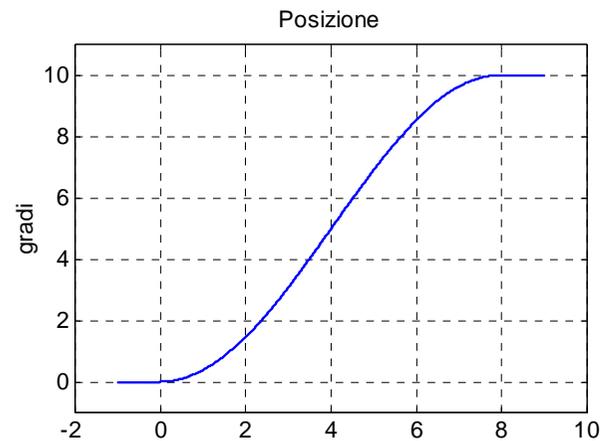
$$\ddot{q}(t) = \frac{\pi^2(q_f - q_i)}{2(t_f - t_i)^2} \cos \left(\frac{\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right)$$

$$j(t) = -\frac{\pi^3(q_f - q_i)}{2(t_f - t_i)^3} \sin \left(\frac{\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right) \quad (\text{jerk})$$

Traiettoria armonica (esempio)



$$t_i = 0, t_f = 8s, q_i = 0^\circ, q_f = 10^\circ$$





Traiettoria cicloidale

La traiettoria armonica presenta discontinuità nell'accelerazione negli istanti iniziale e finale, e quindi valori non definiti (o infiniti) di jerk. Un'alternativa è la traiettoria cicloidale, che presenta continuità anche nell'accelerazione. Le formule sono:

$$q(t) = (q_f - q_i) \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right) \right) + q_i$$

$$\dot{q}(t) = \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right) \right)$$

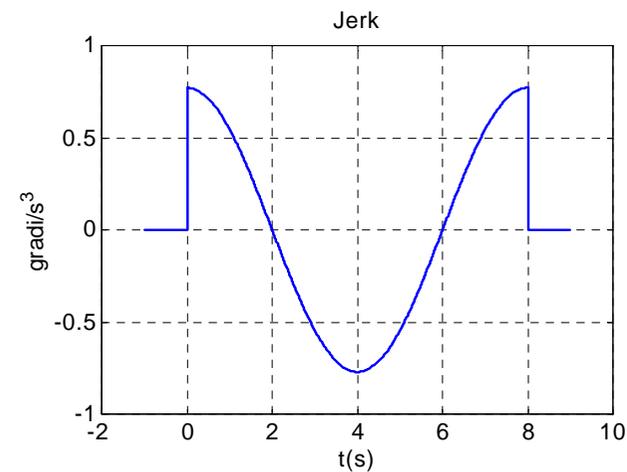
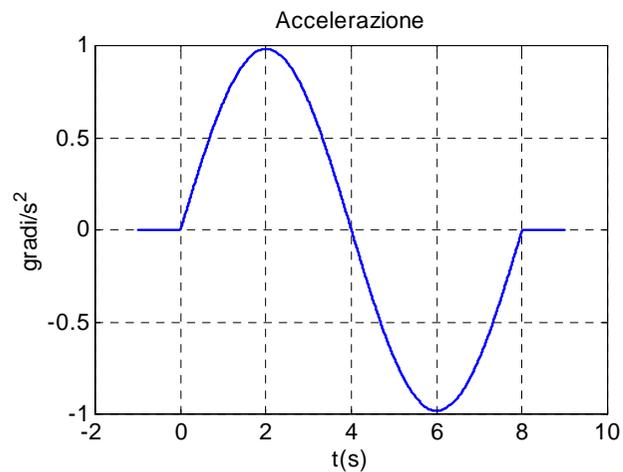
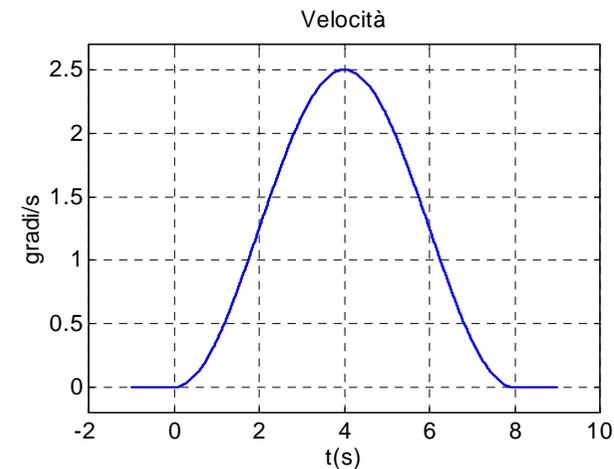
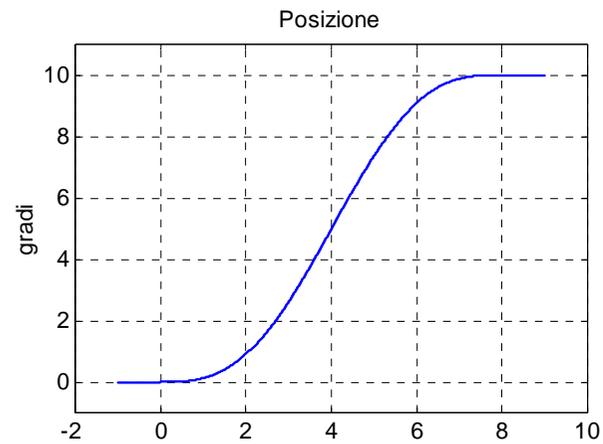
$$\ddot{q}(t) = \frac{2\pi(q_f - q_i)}{(t_f - t_i)^2} \sin \left(\frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right)$$

$$j(t) = \frac{4\pi^2(q_f - q_i)}{(t_f - t_i)^3} \cos \left(\frac{2\pi(t - t_i)}{t_f - t_i} \right)$$



Traiettoria cicloidale (esempio)

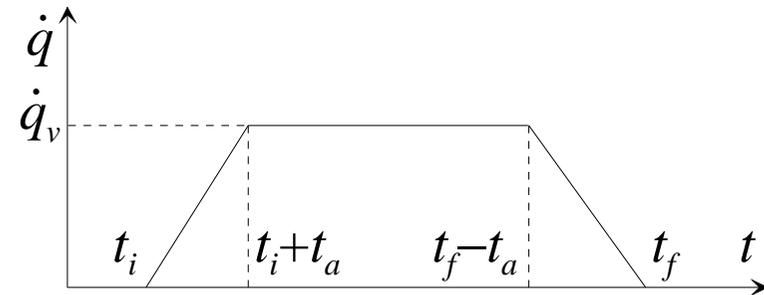
$$t_i = 0, t_f = 8s, q_i = 0^\circ, q_f = 10^\circ$$



Profilo di velocità trapezoidale (P.v.t.)



Un procedimento di largo utilizzo nella pratica industriale per generare la traiettoria consiste nel pianificare un profilo di posizione lineare raccordato all'inizio e alla fine della traiettoria con tratti parabolici. Il **profilo di velocità** che ne risulta ha il tipico **andamento trapezoidale**.



La traiettoria è quindi divisa in **tre parti**:

1. Accelerazione costante, velocità a rampa, posizione a parabola;
2. Accelerazione nulla, velocità costante, posizione lineare;
3. Decelerazione costante, velocità a rampa, posizione a parabola.

Spesso la durata t_a della fase di accelerazione (fase 1) è posta uguale alla durata della fase di decelerazione (fase 3): si ottiene in questo modo una traiettoria simmetrica rispetto all'istante medio tra quelli iniziale e finale. Naturalmente deve essere $t_a \leq (t_f - t_i)/2$.

P.v.t.: equazioni traiettoria



Fase di accelerazione

$$t \in [t_i, t_i + t_a]$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = \frac{\dot{q}_v}{t_a} \\ \dot{q}(t) = \frac{\dot{q}_v}{t_a} (t - t_i) \\ q(t) = q_i + \frac{\dot{q}_v}{2t_a} (t - t_i)^2 \end{cases}$$

Fase di velocità costante

$$t \in [t_i + t_a, t_f - t_a]$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = 0 \\ \dot{q}(t) = \dot{q}_v \\ q(t) = q_i + \dot{q}_v \left(t - t_i - \frac{t_a}{2} \right) \end{cases}$$

Fase di decelerazione

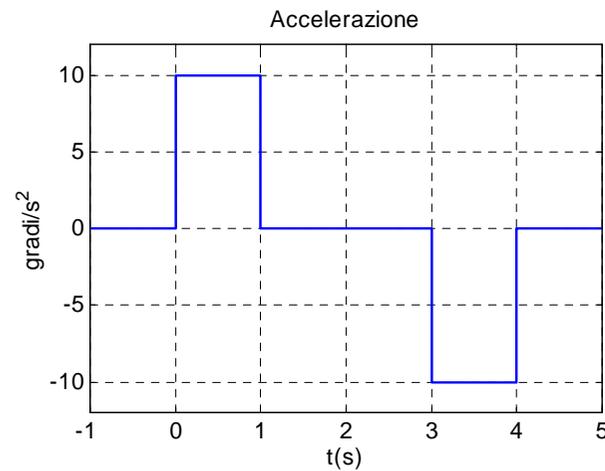
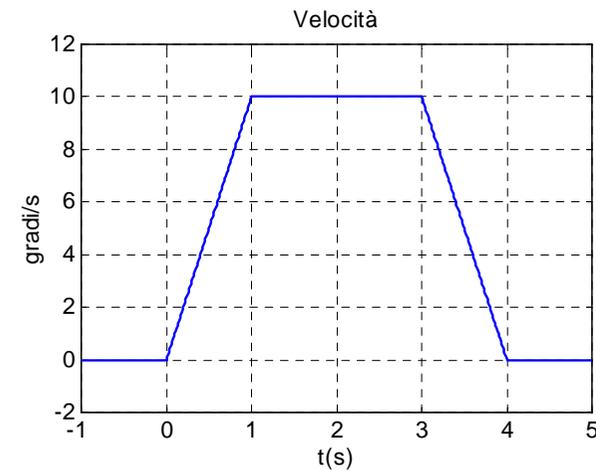
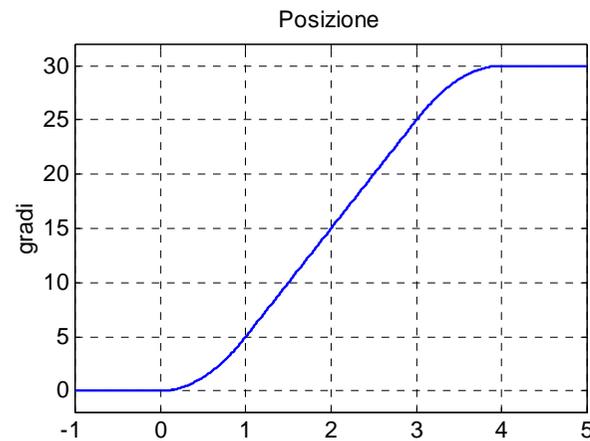
$$t \in [t_f - t_a, t_f]$$

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = -\frac{\dot{q}_v}{t_a} \\ \dot{q}(t) = \frac{\dot{q}_v}{t_a} (t_f - t) \\ q(t) = q_f - \frac{\dot{q}_v}{2t_a} (t_f - t)^2 \end{cases}$$



P.v.t.: esempio

$$t_i = 0, t_f = 4s, t_a = 1s, q_i = 0^\circ, q_f = 30^\circ, \dot{q}_v = 10^\circ/s$$





P.v.t.: vincoli

Nella scelta dei parametri della traiettoria devono essere soddisfatti dei vincoli, che assicurano il posizionamento corretto nel tempo prestabilito. Si osservi che la velocità all'istante t_i+t_a si può ottenere come:

$$\ddot{q}t_a = \frac{q_m - q_a}{t_m - t_a} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} q_a = q(t_i + t_a) \\ q_m = (q_i + q_f)/2 \\ t_m = (t_f - t_i)/2 \end{cases}$$

Inoltre risulta:

$$q_a = q_i + \frac{1}{2}\ddot{q}t_a^2$$

Eliminando dalle precedenti equazioni le variabili q_m , q_a , t_m , si ricava il vincolo:

$$\ddot{q}t_a^2 - \ddot{q}(t_f - t_i)t_a + (q_f - q_i) = 0$$

Un vincolo sulla velocità si ottiene dalla formula:

$$\dot{q}_v = \frac{q_f - q_i}{t_f - t_i - t_a}$$



P.v.t.: possibili specifiche

Dati:

- la distanza da percorrere $h=q_f-q_i$
- il tempo di percorrenza $T=t_f-t_i$

Se imponiamo $t_a \leq T/2$:

$$t_a \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_v = \frac{h}{T-t_a} \\ \ddot{q} = \frac{\dot{q}_v}{t_a} \end{cases}$$

Se imponiamo la velocità:

$$\dot{q}_v \Rightarrow \begin{cases} t_a = \frac{T\dot{q}_v - h}{\dot{q}_v} \\ \ddot{q} = \frac{\dot{q}_v}{t_a} \end{cases}$$

Se imponiamo l'accelerazione:

$$\ddot{q} \Rightarrow \begin{cases} t_a = \frac{\ddot{q}T - \sqrt{\ddot{q}^2T^2 - 4\ddot{q}h}}{2\ddot{q}} \\ \dot{q}_v = \ddot{q}t_a \end{cases}$$

(deve essere: $|\ddot{q}| \geq \frac{4|h|}{T^2}$)



P.v.t.: accelerazione e velocità max

Se si vogliono imporre i **valori massimi di velocità ed accelerazione** consentiti dall'attuatore, si pone:

$$\begin{cases} t_a = \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} & \text{tempo di accelerazione} \\ h = \dot{q}_{\max}(T - t_a) & \text{distanza percorsa} \end{cases}$$

La durata del moto (che non è imposta) vale quindi:

$$T = \frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}$$

da cui:

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_{\max} (t - t_i)^2 & t_i \leq t < t_i + t_a \\ q_i + \dot{q}_{\max} t_a \left(t - t_i - \frac{t_a}{2} \right) & t_i + t_a \leq t < t_f - t_a \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_{\max} (t_f - t)^2 & t_f - t_a \leq t \leq t_f \end{cases}$$

Attenzione: il tratto lineare esiste se e solo se: $h \geq \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$



P.v.t.: velocità max non raggiunta

Se: $h < \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}}$

si impone:
$$\begin{cases} t_a = \sqrt{\frac{h}{\ddot{q}_{\max}}} \\ T = 2t_a \end{cases}$$

da cui:

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_{\max} (t - t_i)^2 & t_i \leq t < t_i + t_a \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_{\max} (t_f - t)^2 & t_f - t_a \leq t \leq t_f \end{cases}$$

La velocità massima raggiunta in questo caso è quindi:

$$\dot{q}_{\max} = \ddot{q}_{\max} t_a = \frac{h}{t_a} = 2 \frac{h}{T}$$

P.v.t.: tempo di posizionamento



Imponendo la massima accelerazione e/o la massima velocità, nella pianificazione della traiettoria non si impone la durata del posizionamento. Esso risulta dalle seguenti formule.

1) Se non si raggiunge la velocità massima:

$$T = 2t_a = 2\sqrt{\frac{h}{\ddot{q}_{\max}}}$$

2) Se si raggiunge la velocità massima:

$$T = \frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}}$$

P.v.t.: moto coordinato di più giunti



Se si devono coordinare più giunti con gli stessi vincoli sulle accelerazioni e velocità massime, per quello che deve effettuare il movimento maggiore si imposta il massimo valore di accelerazione \ddot{q}_{\max} e si calcolano i valori t_a e T corrispondenti.

Per gli altri giunti si pianifica il movimento sulla base della durata T e del tempo di accelerazione t_a , secondo le formule viste precedentemente.



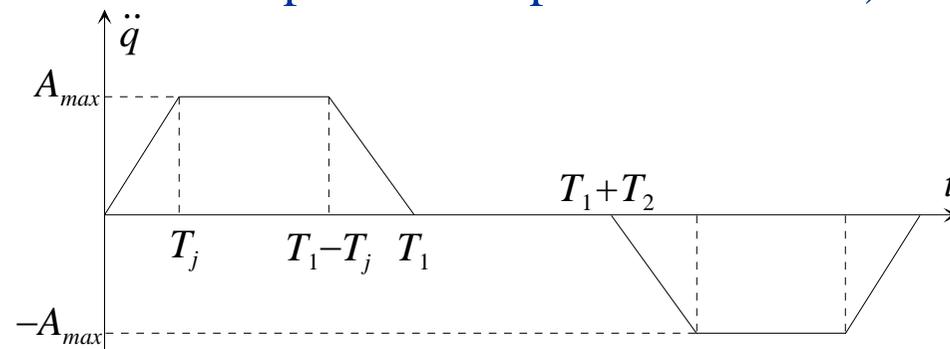
Limitazione del jerk

Nella traiettoria a profilo di velocità trapezoidale l'accelerazione ha un andamento discontinuo. Ne consegue che il jerk (derivata dell'accelerazione) assume valori infiniti. Questo provoca forti sollecitazioni sul sistema meccanico, che possono indurre vibrazioni.

Per ovviare a questo problema, si può modificare la pianificazione della traiettoria, dando continuità al profilo di accelerazione, che assume andamento trapezoidale nelle due fasi di accelerazione iniziale e decelerazione finale.

La traiettoria è quindi divisa in tre parti principali:

1. **Fase di accelerazione** (l'accelerazione viene portata linearmente al valore massimo, mantenuta al valore massimo e riportata linearmente a zero);
2. **Fase di crociera** (velocità costante);
3. **Fase di decelerazione** (si decelera in modo speculare rispetto alla fase 1).



Messa in scala di traiettorie



Una volta pianificata una traiettoria è spesso necessario scalarla per soddisfare i vincoli del sistema di attuazione, che si manifestano in termini di saturazioni.

Si parla in particolare di:

1. **Messa in scala cinematica:** si deve fare in modo che la traiettoria rispetti vincoli sulla massima velocità e sulla massima accelerazione;
2. **Messa in scala dinamica:** si deve fare in modo che agli attuatori del sistema meccanico non vengano richieste coppie superiori alle coppie massime erogabili.

Il problema della messa in scala cinematica ha rilevanza per quei profili di traiettoria (cubica, armonica, ecc.) per i quali tali valori non sono imposti nella pianificazione.

Nel seguito discuteremo alcuni aspetti solamente della messa in scala cinematica.

Normalizzazione della traiettoria



Al fine di scalare la traiettoria, è opportuno esprimerla in **forma parametrica** in funzione di un parametro $\sigma = \sigma(t)$, opportunamente normalizzato.

Data la traiettoria $q(t)$, definita tra i punti q_i e q_f e di durata $T = t_f - t_i$, la sua espressione in **forma normalizzata** è la seguente:

$$q(t) = q_i + h\sigma(\tau)$$

con $h = q_f - q_i$ e:

$$0 \leq \sigma(\tau) \leq 1, \quad \tau = \frac{t - t_i}{T}, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Ne consegue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{h}{T} \sigma'(\tau) \\ \frac{d^2q(t)}{dt^2} = \frac{h}{T^2} \sigma''(\tau) \\ \vdots \\ \frac{d^n q(t)}{dt^n} = \frac{h}{T^n} \sigma^{(n)}(\tau) \end{array} \right.$$

I valori massimi di velocità, accelerazione, ecc., si ottengono in corrispondenza dei valori massimi delle funzioni $\sigma^{(i)}(\tau)$: modificando la durata T della traiettoria è possibile soddisfare i vincoli sulle saturazioni cinematiche.

Traiettoria polinomiale di grado 3



La traiettoria può essere parametrizzata con il polinomio:

$$\sigma(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3$$

Imponendo le condizioni al contorno $\sigma'(0)=0$, $\sigma'(1)=0$ (oltre a $\sigma(0)=0$, $\sigma(1)=1$):

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = -2$$

da cui:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &= 3\tau^2 - 2\tau^3 & \sigma''(\tau) &= 6 - 12\tau \\ \sigma'(\tau) &= 6\tau - 6\tau^2 & \sigma'''(\tau) &= -12 \end{aligned}$$

I valori massimi di velocità ed accelerazione sono quindi:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\max} = \sigma'(0.5) = \frac{3}{2} & \Rightarrow \dot{q}_{\max} = \frac{3h}{2T} \\ \sigma''_{\max} = \sigma''(0) = 6 & \Rightarrow \ddot{q}_{\max} = \frac{6h}{T^2} \end{aligned}$$

Operando sulla durata T della traiettoria possiamo rispettare i vincoli su velocità ed accelerazione.

Traiettoria polinomiale di grado 5



La traiettoria può essere parametrizzata con il polinomio:

$$\sigma(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + a_4\tau^4 + a_5\tau^5$$

Imponendo le condizioni al contorno $\sigma(0)=0$, $\sigma(1)=1$, $\sigma'(0)=0$, $\sigma'(1)=0$, $\sigma''(0)=0$, $\sigma''(1)=0$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = -15, \quad a_5 = 6$$

da cui:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &= 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5 & \sigma''(\tau) &= 60\tau - 180\tau^2 + 120\tau^3 \\ \sigma'(\tau) &= 30\tau^2 - 60\tau^3 + 30\tau^4 & \sigma'''(\tau) &= 60 - 360\tau + 360\tau^2 \end{aligned}$$

I valori massimi di velocità, accelerazione e jerk sono quindi:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\max} = \sigma'(0.5) = \frac{15}{8} & \Rightarrow \dot{q}_{\max} = \frac{15h}{8T} \\ \sigma''_{\max} = \sigma''(0.2123) = \frac{10\sqrt{3}}{3} & \Rightarrow \ddot{q}_{\max} = \frac{10\sqrt{3}h}{3T^2} \\ \sigma'''_{\max} = \sigma'''(0) = 60 & \Rightarrow j_{\max} = 60 \frac{h}{T^3} \end{aligned}$$



Traiettoria armonica

La traiettoria può essere parametrizzata con la funzione:

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi\tau)$$

da cui: $\sigma'(\tau) = \frac{\pi}{2} \sin \pi\tau$

$$\sigma''(\tau) = \frac{\pi^2}{2} \cos \pi\tau$$

$$\sigma'''(\tau) = \frac{\pi^3}{2} \sin \pi\tau$$

I valori massimi di velocità, accelerazione e jerk sono quindi:

$$\sigma'_{\max} = \sigma'(0.5) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_{\max} = \frac{\pi h}{2T}$$

$$\sigma''_{\max} = \sigma''(0) = \frac{\pi^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_{\max} = \frac{\pi^2 h}{2T^2}$$

$$\sigma'''_{\max} = \sigma'''(0.5) = \frac{\pi^3}{2} \quad \Rightarrow \quad j_{\max} = \frac{\pi^3 h}{2T^3}$$



Traiettoria cicloidale

La traiettoria può essere parametrizzata con la funzione:

$$\sigma(\tau) = \tau - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\tau$$

da cui:

$$\sigma'(\tau) = 1 - \cos 2\pi\tau$$

$$\sigma''(\tau) = 2\pi \sin 2\pi\tau$$

$$\sigma'''(\tau) = 4\pi^2 \cos 2\pi\tau$$

I valori massimi di velocità, accelerazione e jerk sono quindi:

$$\sigma'_{\max} = \sigma'(0.5) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_{\max} = 2 \frac{h}{T}$$

$$\sigma''_{\max} = \sigma''(0.25) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \ddot{q}_{\max} = 2\pi \frac{h}{T^2}$$

$$\sigma'''_{\max} = \sigma'''(0) = 4\pi^2 \quad \Rightarrow \quad j_{\max} = 4\pi^2 \frac{h}{T^3}$$



Messa in scala cinematica: esempio

Si vuole realizzare una traiettoria con $q_i=10^\circ$, $q_f=50^\circ$, per un attuatore caratterizzato da: $\dot{q}_{\max} = 30$, $\ddot{q}_{\max} = 80$

Si hanno i seguenti risultati ($h=40^\circ$):

Traiettoria	Formule	Vincoli	T_{\min}
Polin. grado 3	$\begin{cases} \dot{q}_{\max} = \frac{3h}{2T} \\ \ddot{q}_{\max} = \frac{6h}{T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{3h}{60} = 2 \\ T = \sqrt{\frac{6h}{80}} = 1.732 \end{cases}$	2
Polin. grado 5	$\begin{cases} \dot{q}_{\max} = \frac{15h}{8T} \\ \ddot{q}_{\max} = \frac{10\sqrt{3}h}{3T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{15h}{240} = 2.5 \\ T = \sqrt{\frac{10\sqrt{3}h}{240}} = 1.699 \end{cases}$	2.5
Armonica	$\begin{cases} \dot{q}_{\max} = \frac{\pi h}{2T} \\ \ddot{q}_{\max} = \frac{\pi^2 h}{2T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{\pi h}{60} = 2.094 \\ T = \sqrt{\frac{\pi^2 h}{160}} = 1.571 \end{cases}$	2.094
Cicloidale	$\begin{cases} \dot{q}_{\max} = 2\frac{h}{T} \\ \ddot{q}_{\max} = 2\pi\frac{h}{T^2} \end{cases}$	$\begin{cases} T = \frac{2h}{30} = 2.667 \\ T = \sqrt{\frac{2\pi h}{80}} = 1.772 \end{cases}$	2.667

Traiettorie passanti per più punti



Il problema di determinare una traiettoria che passi per n punti può essere risolto in modo univoco adottando una funzione polinomiale di grado $n-1$, del tipo:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$$

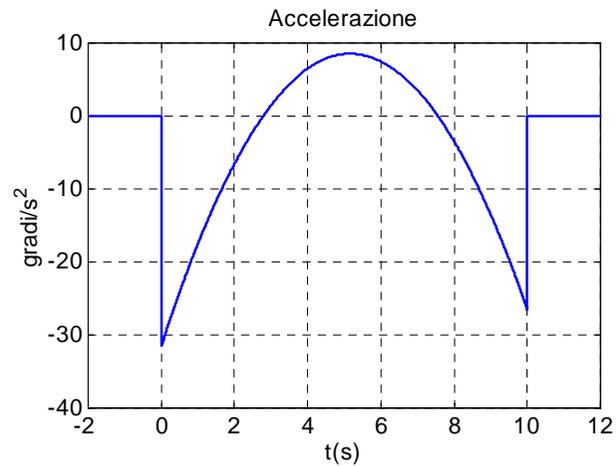
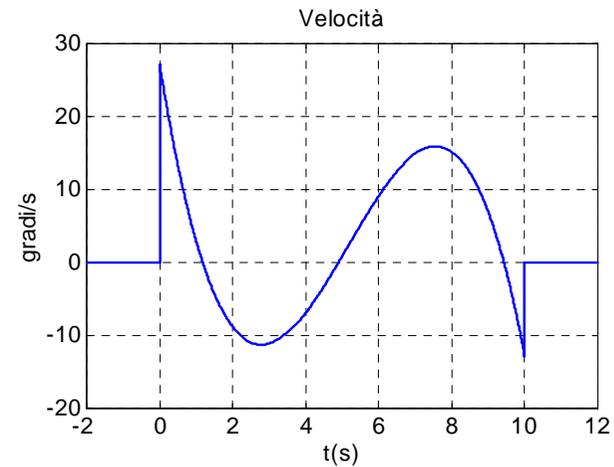
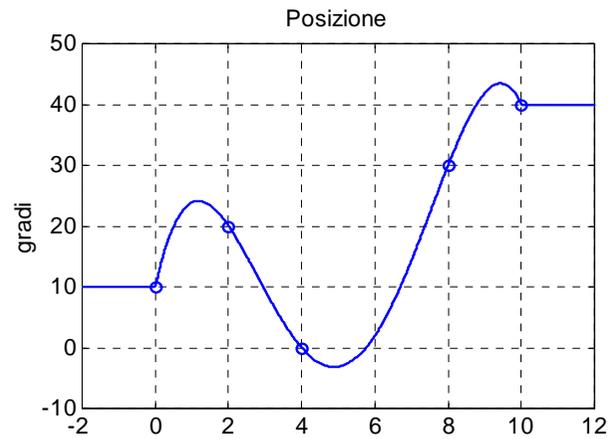
Dati i valori $t_i, q_i, i=1, \dots, n$ si costruiscono i vettori \mathbf{q}, \mathbf{a} e la matrice \mathbf{T} (di Vandermonde) come:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{n-1} \\ & & \vdots & \\ 1 & t_{n-1} & \dots & t_{n-1}^{n-1} \\ 1 & t_n & \dots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{a}$$

Ne consegue:

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{q} \quad (\text{la matrice } \mathbf{T} \text{ è sempre invertibile se } t_i > t_{i-1}, i = 1, \dots, n)$$

Interpolazione mediante polinomi: esempio



$$\begin{array}{cccccc} t_1 = 0 & t_2 = 2 & t_3 = 4 & t_4 = 8 & t_5 = 10 \\ q_1 = 10^\circ & q_2 = 20^\circ & q_3 = 0^\circ & q_4 = 30^\circ & q_5 = 40^\circ \end{array}$$

Interpolazione mediante polinomi



Un vantaggio evidente dell'interpolazione polinomiale è che la funzione $q(t)$ ha derivate continue di ordine qualsiasi all'interno dell'intervallo $[t_1, t_n]$.

Tuttavia il metodo non è efficiente dal punto di vista numerico: all'aumentare del numero n di punti aumenta il numero condizionante k (rapporto tra il massimo ed il minimo valor singolare) della matrice T di Vandermonde, rendendo il problema della sua inversione mal condizionato numericamente.

Se, per esempio, $t_i = i/n$, $i=1, \dots, n$:

n	3	4	5	6	10	15	20
k	15.1	98.87	686.43	4924.37	$1.519 \cdot 10^7$	$4.032 \cdot 10^{11}$	$1.139 \cdot 10^{16}$

Esistono anche altri metodi, più efficienti, per calcolare i coefficienti del polinomio, ma le difficoltà numeriche permangono per valori elevati di n .

Interpolazione mediante polinomi



Anche prescindendo dalle difficoltà numeriche, l'interpolazione di n punti mediante un unico polinomio di grado $n-1$ presenta degli svantaggi:

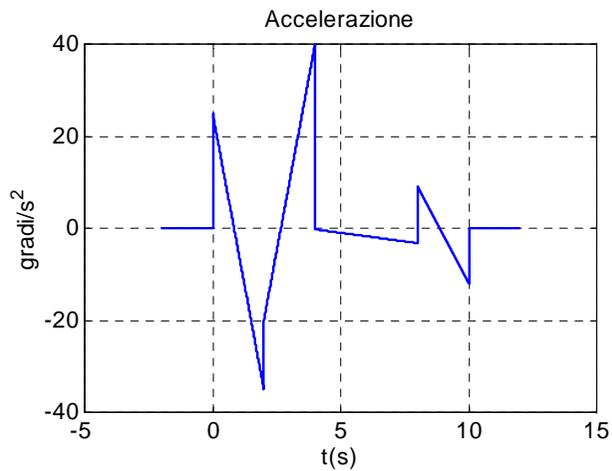
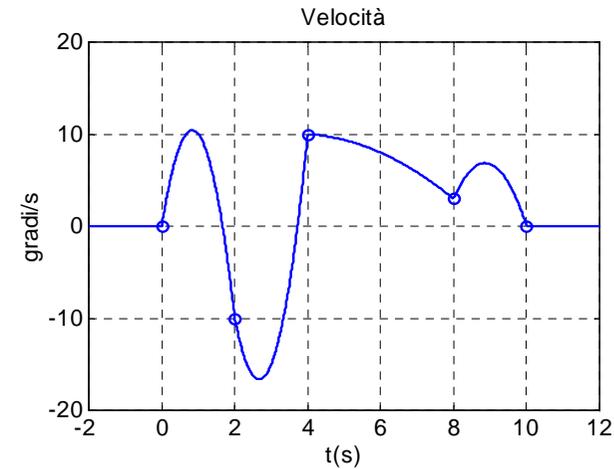
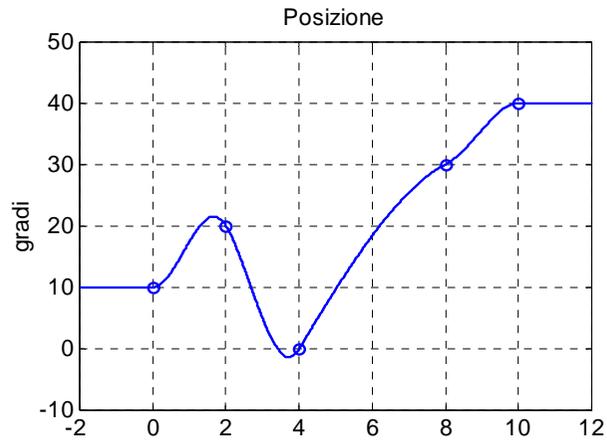
1. il grado del polinomio dipende da n e, per elevati valori di n , la quantità di calcoli da eseguire può essere notevole;
2. la variazione di un solo punto (t_i, q_i) implica il ricalcolo dell'intero polinomio;
3. l'aggiunta di un punto finale (t_{n+1}, q_{n+1}) implica l'utilizzo di un polinomio di grado maggiore ed il ricalcolo di tutti i coefficienti
4. la soluzione che si ottiene presenta in generale oscillazioni indesiderate

Un'alternativa è, anziché considerare un unico polinomio di grado $n-1$, utilizzare $n-1$ polinomi di grado p (tipicamente inferiore), ognuno dei quali definito in un tratto della traiettoria.

Il grado p dei polinomi è normalmente preso uguale a 3 (tratti di traiettoria **cubica**).

Una primo, ovvio, modo di procedere consiste nell'assegnare posizioni e velocità in tutti i punti e calcolare i coefficienti delle cubiche tra due punti consecutivi.

Interpolazione mediante cubiche



$t_1 = 0$	$t_2 = 2$	$t_3 = 4$	$t_4 = 8$	$t_5 = 10$
$q_1 = 10^\circ$	$q_2 = 20^\circ$	$q_3 = 0^\circ$	$q_4 = 30^\circ$	$q_5 = 40^\circ$
$\dot{q}_1 = 0^\circ/s$	$\dot{q}_2 = -10^\circ/s$	$\dot{q}_3 = 10^\circ/s$	$\dot{q}_4 = 3^\circ/s$	$\dot{q}_5 = 0^\circ/s$

Interpolazione mediante cubiche



Se vengono solo specificati i punti di passaggio senza specificare le velocità intermedie, queste si possono calcolare approssimativamente con regole del tipo:

$$\dot{q}_1 = 0$$

$$\dot{q}_k = \begin{cases} 0 & \text{sign}(v_k) \neq \text{sign}(v_{k+1}) \\ \frac{v_k + v_{k+1}}{2} & \text{sign}(v_k) = \text{sign}(v_{k+1}) \end{cases}$$

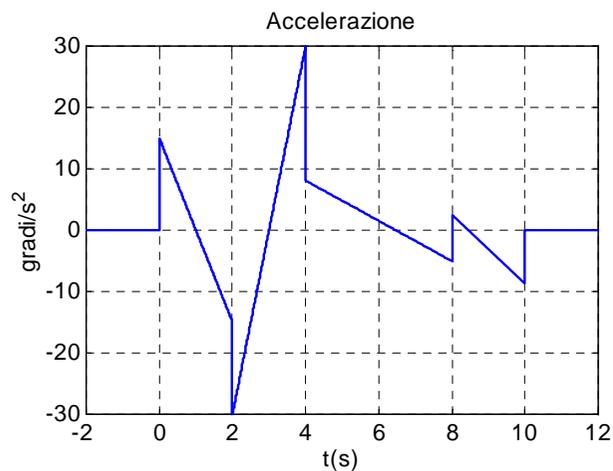
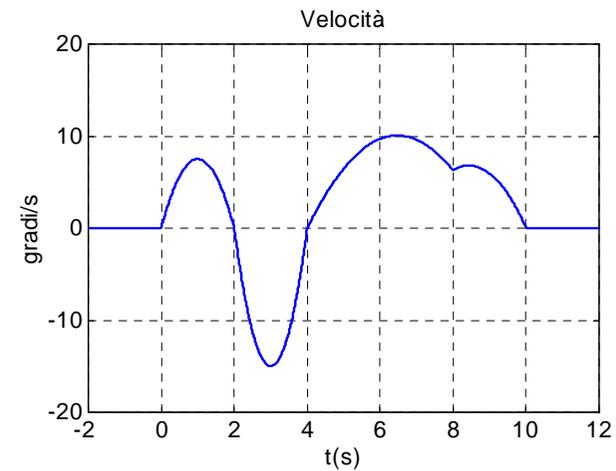
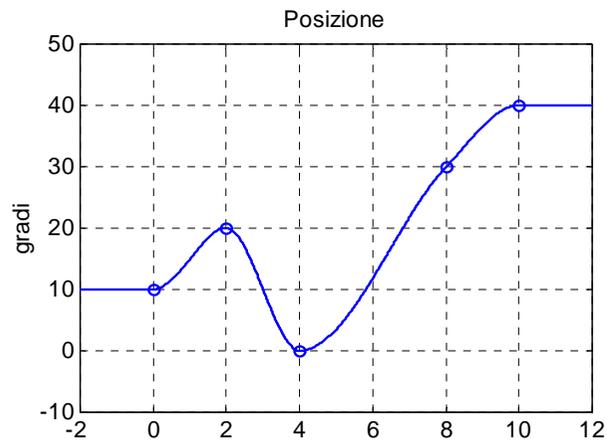
$$\dot{q}_n = 0$$

essendo:

$$v_k = \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$$

la pendenza (rapporto incrementale) nel tratto $[t_{k-1}, t_k]$.

Interpolazione mediante cubiche



$$\begin{array}{ccccc} t_1 = 0 & t_2 = 2 & t_3 = 4 & t_4 = 8 & t_5 = 10 \\ q_1 = 10^\circ & q_2 = 20^\circ & q_3 = 0^\circ & q_4 = 30^\circ & q_5 = 40^\circ \end{array}$$

Spline



L'interpolazione mediante cubiche eseguita come visto precedentemente genera una traiettoria che presenta accelerazione discontinua nei punti di passaggio. Per ovviare a questo problema, sempre mantenendo interpolanti cubiche, si deve rinunciare ad imporre specifici valori di velocità nei punti intermedi, limitandosi ad imporre la continuità in due tratti contigui di posizione, velocità ed accelerazione.

La traiettoria che si ottiene con questo procedimento prende il nome di **spline** (smooth path line).

Si può dimostrare che la spline è la funzione interpolante **a curvatura minima**, a parità di condizioni di continuità sulle derivate.

Spline: condizioni da imporre



Poiché con n punti si hanno $n-1$ polinomi del tipo:

$$q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

ciascuno dei quali ha 4 coefficienti, il numero totale di coefficienti da calcolare è $4(n-1)$. Le condizioni da imporre sono:

- $2(n-1)$ condizioni di passaggio per punti (ogni cubica deve interpolare i punti alle sue estremità);
- $n-2$ condizioni sulla continuità delle velocità nei punti intermedi
- $n-2$ condizioni sulla continuità delle accelerazioni nei punti intermedi

Si hanno quindi:

$$4(n-1) - 2(n-1) - 2(n-2) = 2$$

gradi di libertà residui.

Una modalità (non unica) di utilizzare questi 2 gradi di libertà consiste nell'assegnare opportune condizioni iniziali e finali sulla velocità.

Spline: posizione analitica del problema



Si desidera determinare una funzione:

$$q(t) = \{q_k(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \dots, n-1\}$$
$$q_k(\tau) = a_{k0} + a_{k1}\tau + a_{k2}\tau^2 + a_{k3}\tau^3, \quad \tau \in [0, T_k] \quad (\tau = t - t_k, \quad T_k = t_{k+1} - t_k)$$

con le condizioni:

$$q_k(0) = q_k, \quad q_k(T_k) = q_{k+1} \quad k = 1, \dots, n-1$$
$$\dot{q}_k(T_k) = \dot{q}_{k+1}(0) = v_{k+1} \quad k = 1, \dots, n-2$$
$$\ddot{q}_k(T_k) = \ddot{q}_{k+1}(0) \quad k = 1, \dots, n-2$$
$$\dot{q}_1(0) = v_1, \quad \dot{q}_{n-1}(T_{n-1}) = v_n$$

dove le quantità $v_k, k=2, \dots, n-1$ non sono specificate.
Il problema consiste nel ricavare i coefficienti a_{ki} .

Spline: algoritmo



Si assumano inizialmente note le velocità v_k , $k=2, \dots, n-1$ nei punti intermedi. In questo modo, per ogni polinomio cubico si hanno quattro condizioni al contorno su posizione e velocità, che danno origine al sistema:

$$\begin{cases} q_k(0) = a_{k0} = q_k \\ \dot{q}_k(0) = a_{k1} = v_k \\ q_k(T_k) = a_{k0} + a_{k1}T_k + a_{k2}T_k^2 + a_{k3}T_k^3 = q_{k+1} \\ \dot{q}_k(T_k) = a_{k1} + 2a_{k2}T_k + 3a_{k3}T_k^2 = v_{k+1} \end{cases}$$

che risolto dà:

$$\begin{cases} a_{k0} = q_k \\ a_{k1} = v_k \\ a_{k2} = \frac{1}{T_k} \left[\frac{3(q_{k+1} - q_k)}{T_k} - 2v_k - v_{k+1} \right] \\ a_{k3} = \frac{1}{T_k^2} \left[\frac{2(q_k - q_{k+1})}{T_k} + v_k + v_{k+1} \right] \end{cases}$$

Spline: algoritmo



- La matrice A è a struttura dominante diagonale e risulta sempre invertibile per $T_k > 0$.
- Inoltre la matrice A è a struttura tridiagonale, per cui esistono tecniche numeriche efficienti (metodo di Gauss-Jordan) per la sua inversione.
- Una volta nota l'inversa di A si possono calcolare le velocità v_2, \dots, v_{n-1} come:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}$$

il che risolve completamente il problema.

È possibile anche determinare le spline con un algoritmo alternativo (ma del tutto equivalente) che ricava invece delle velocità le accelerazioni nei punti intermedi.

Spline: tempo di percorrenza



Il tempo totale di percorrenza della spline è dato da:

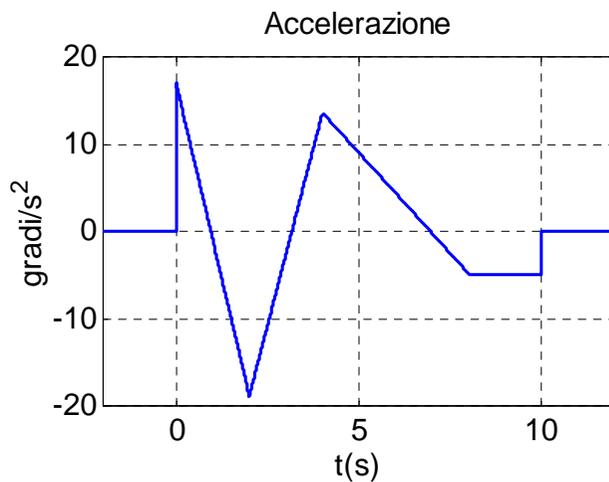
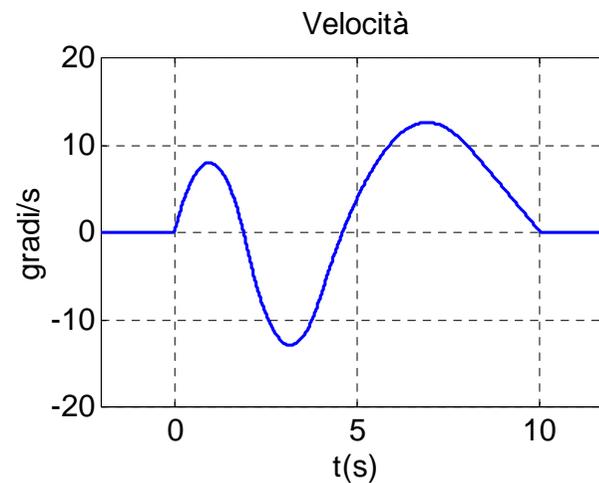
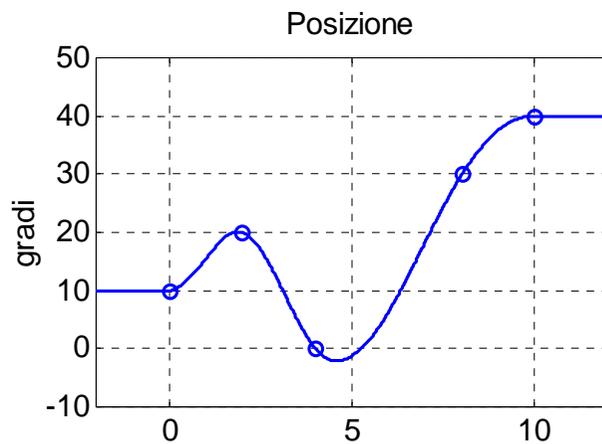
$$T = \sum_{k=1}^{n-1} T_k = t_n - t_1$$

È possibile impostare un problema di ottimo che minimizza il tempo totale di percorrenza. Il problema si pone nei termini di determinare i valori T_k in modo da minimizzare T , con i vincoli sulle massime velocità ed accelerazioni di giunto. Formalmente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{T_k} T = \sum_{k=1}^{n-1} T_k \\ \text{tale che} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} |\dot{q}(\tau, T_k)| < v_{\max} \quad \tau \in [0, T] \\ |\ddot{q}(\tau, T_k)| < a_{\max} \quad \tau \in [0, T] \end{array}$$

Si tratta quindi di un problema di ottimo non lineare con funzione obiettivo lineare, risolvibile con le tecniche della ricerca operativa.

Spline: esempio



$$\begin{array}{cccccc} t_1 = 0 & t_2 = 2 & t_3 = 4 & t_4 = 8 & t_5 = 10 \\ q_1 = 10^\circ & q_2 = 20^\circ & q_3 = 0^\circ & q_4 = 30^\circ & q_5 = 40^\circ \end{array}$$

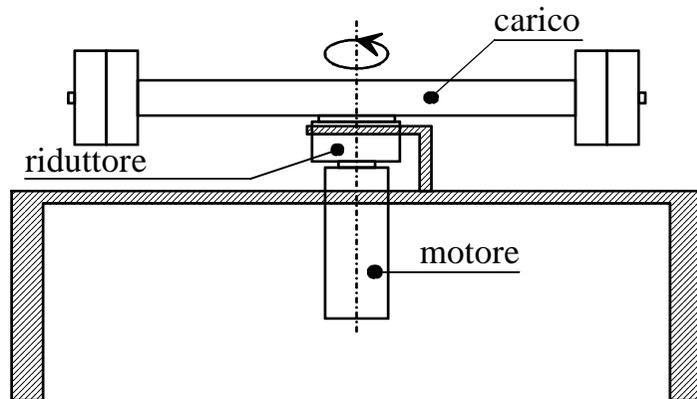
Controllo del moto



Parte II

Progetto del controllore

Il problema di controllo



Come è noto, nei suoi tratti essenziali un servomeccanismo di posizione è costituito da un motore, un riduttore ed un carico.

Il problema di controllo si pone nei termini di governare il moto del carico, modulando opportunamente la coppia erogata dal motore.

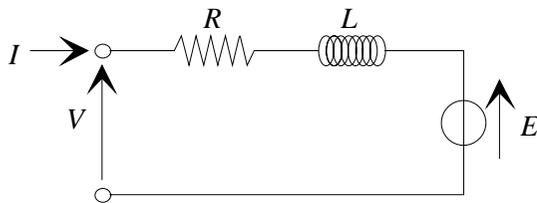
Possono presentarsi diversi scenari per quanto riguarda la **sensorizzazione** del sistema: si può infatti disporre, per la soluzione del problema di controllo, di misure di posizione o velocità del motore e/o di misure della posizione del carico.



La dinamica elettrica

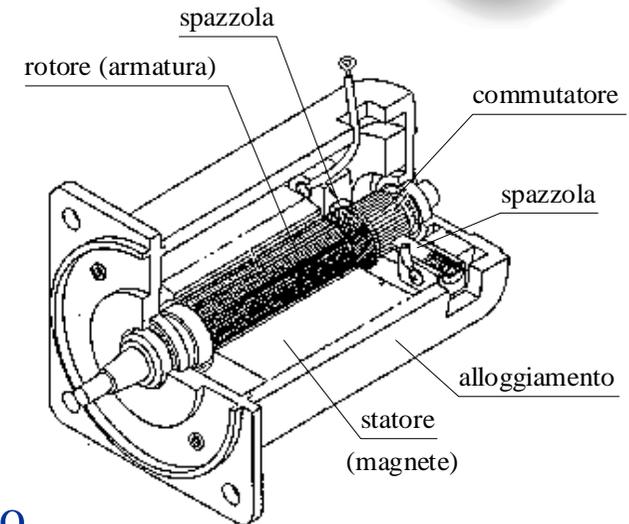


Supponiamo di adottare un motore a corrente continua, il cui circuito elettrico è, come è noto, il seguente:



Il motore, caratterizzato meccanicamente da un momento d'inerzia J_m , eroga una coppia τ_m proporzionale alla corrente I nel circuito d'armatura, conseguente all'imposizione di una tensione V . Su questo circuito, avente resistenza R ed induttanza L , agisce anche la forza controelettromotrice E , proporzionale alla velocità angolare ω_m del motore.

N.B. Le considerazioni che faremo saranno in realtà valide anche per un motore brushless a magneti permanenti, il cui modello elettrico è assimilabile, per mezzo di opportune trasformazioni di variabili, a quello del motore a corrente continua.



La dinamica elettrica



Il sistema è retto dalle seguenti equazioni:

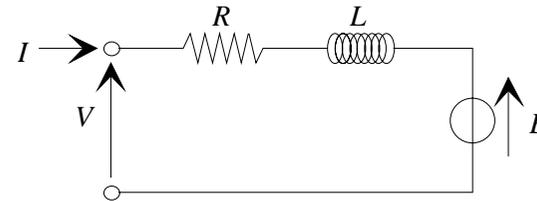
$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + E(t)$$

$$E(t) = K\omega_m(t)$$

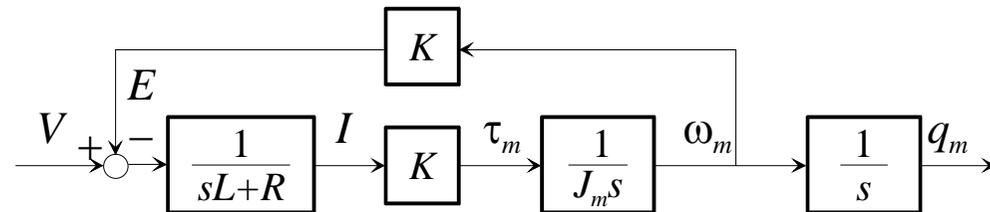
$$\tau(t) = KI(t)$$

$$\tau(t) = J_m \dot{\omega}_m(t)$$

$$\dot{q}_m(t) = \omega_m(t)$$



Traducibili nello schema a blocchi:

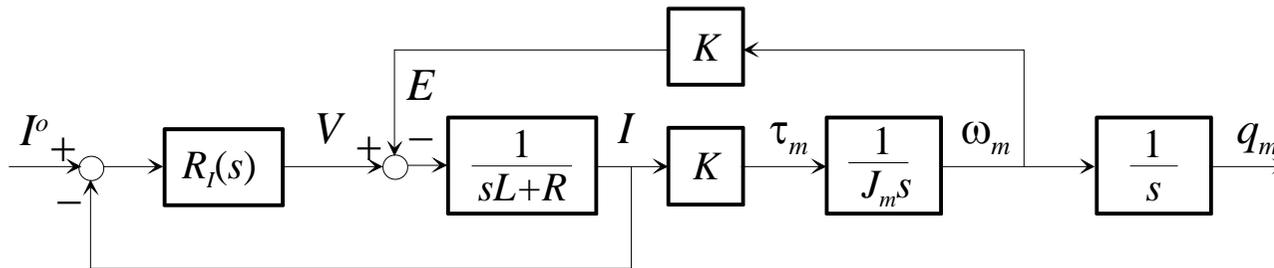


Si osservi che la forza contro elettromotrice accoppia la dinamica elettrica con la dinamica meccanica.

Il controllo di corrente



Disponendo della misura di corrente, si può chiudere un anello di controllo sulla corrente stessa:



Vista la dinamica veloce legata ai transitori elettrici si potrà progettare $R_I(s)$ per ottenere una banda passante molto ampia, dell'ordine delle migliaia di rad/s .

Nel progetto del regolatore di corrente si potrà inoltre assumere la forza controelettrica come un disturbo di bassa frequenza.

Una volta chiuso l'anello di controllo della corrente, questo potrà ritenersi praticamente istantaneo ai fini del progetto del controllore di posizione esterno:

$$\tau_m(t) = KI(t) \approx KI^o(t)$$

Potremo quindi assumere come **variabile di controllo** per il controllo posizione/velocità direttamente la **coppia motrice** τ_m

L'approssimazione rigida (1/2)

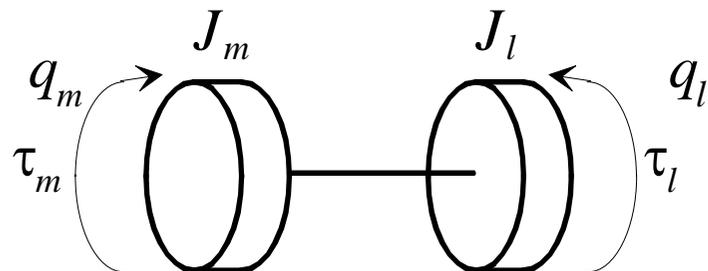


Un primo modo di affrontare il problema di controllo del moto consiste nell'assumere l'insieme motore, riduttore e carico come un sistema complessivamente **rigido**. In questo caso le equazioni del sistema sono le seguenti:

motore $J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm}$

carico $J_l \ddot{q}_l = n\tau_{lm} - \tau_l$

trasmissione $q_m = nq_l$



(D_m : coefficiente di attrito viscoso motore, J_l : momento di inerzia carico, n : rapporto di trasmissione, τ_{lm} : coppia trasmessa lato motore, τ_l : coppia esterna lato carico).

Possiamo eliminare q_l e τ_{lm} dalle equazioni, ottenendo:

$$(J_m + J_{lr}) \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lr}$$

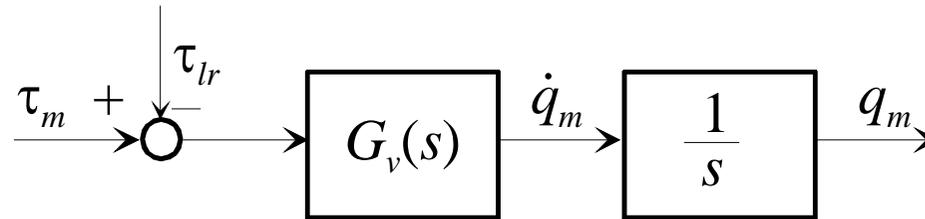
con:

$$J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad \tau_{lr} = \frac{\tau_l}{n}$$

L'approssimazione rigida (2/2)



Il sistema rigido si può quindi descrivere in termini di funzione di trasferimento:



con:

$$G_v(s) = \frac{1}{D_m + s(J_m + J_{lr})}$$

Se il coefficiente di attrito D_m è trascurabile (caso più sfavorevole, perché l'attrito dà un contributo stabilizzante), si ha:

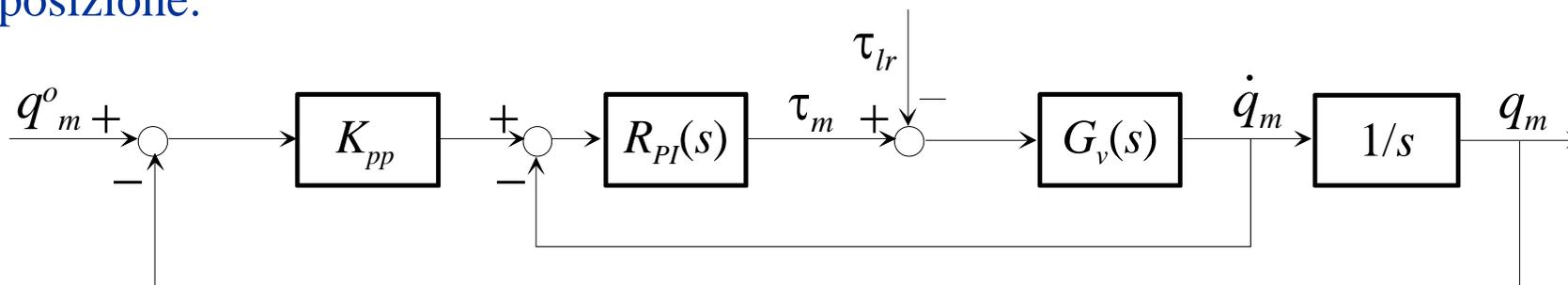
$$G_v(s) = \frac{\mu}{s}$$

$$\mu = \frac{1}{J_m + J_{lr}}$$

Il controllo P/PI



Chiudiamo un controllore PI sulla velocità, ed un controllore proporzionale sulla posizione:

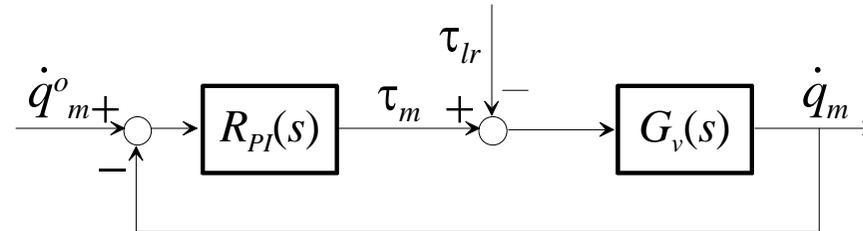


Lo schema prevede di disporre di due misure, di posizione e velocità, indipendenti. Tipicamente la misura di velocità è fornita da una dinamo tachimetrica.

Si tratta di uno schema di **controllo in cascata**: si progetta dapprima l'anello interno di velocità su banda ampia, in modo da fornire anche una buona reiezione dei disturbi.

L'anello esterno, di posizione, si progetta su una banda più ristretta.

Progetto del regolatore PI di velocità

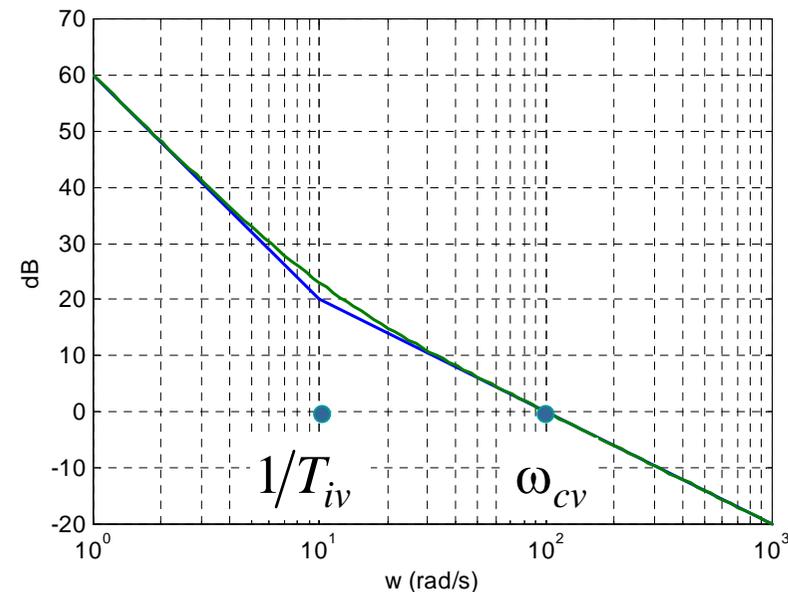


$$R_{PI}(s) = K_{pv} \left(1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Funzione d'anello:

$$L_v(s) = R_{PI}(s)G_v(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

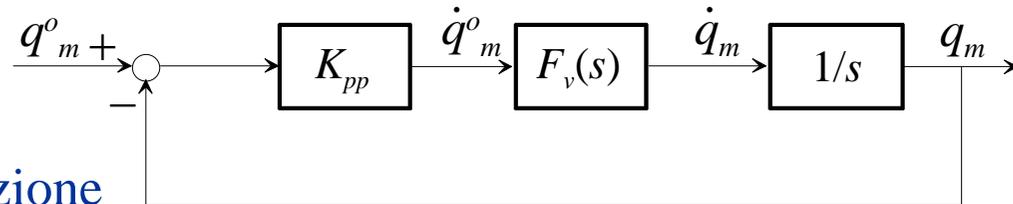
Se T_{iv} è sufficientemente grande, ossia se lo zero del PI è sufficientemente in bassa frequenza, la pulsazione critica è ben approssimata prendendo l'approssimazione di alta frequenza di L :



$$L_v(s) \approx \frac{\omega_{cv}}{s}, \quad \omega_{cv} = K_{pv}\mu$$

$$\frac{1}{T_{iv}} = (0.1 \div 0.3)\omega_{cv} \longleftarrow \text{Posizionamento dello zero del PI.}$$

Progetto del regolatore P di posizione



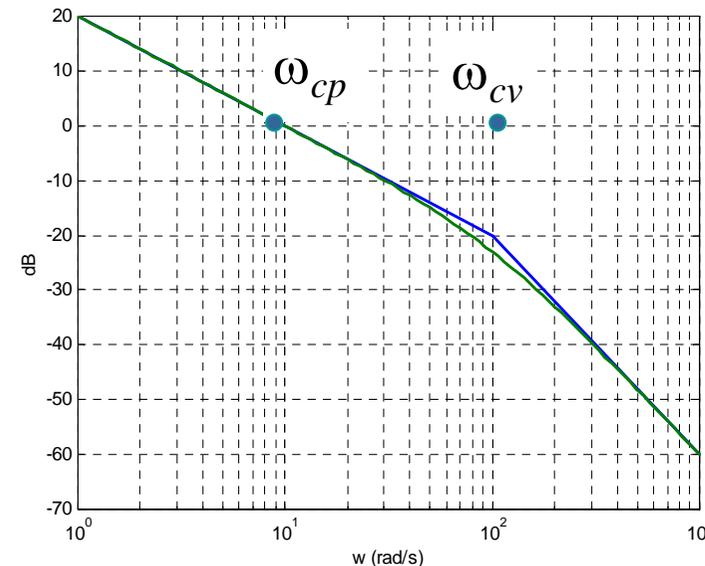
Il regolatore dell'anello di posizione “vede” l'anello chiuso di velocità, di funzione di trasferimento:

$$F_v(s) \approx \frac{1}{1 + s/\omega_{cv}}$$

La funzione d'anello è quindi:

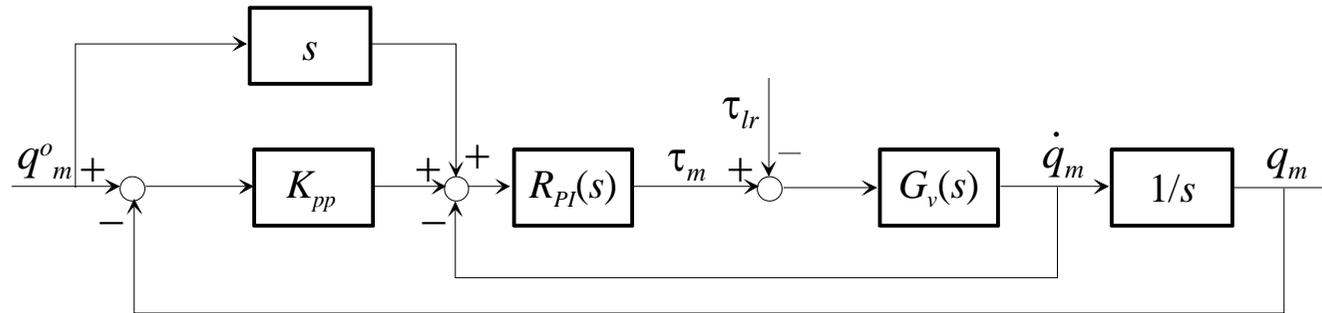
$$L_p(s) = K_{pp} F_v(s) \frac{1}{s} = \frac{K_{pp}}{s(1 + s/\omega_{cv})}$$

E' sufficiente prendere $K_{pp} \ll \omega_{cv}$ per garantire una banda sull'anello di posizione $\omega_{cp} \approx K_{pp}$. L'integratore tra velocità e posizione assicura inoltre la precisione statica a fronte di riferimenti costanti a regime.



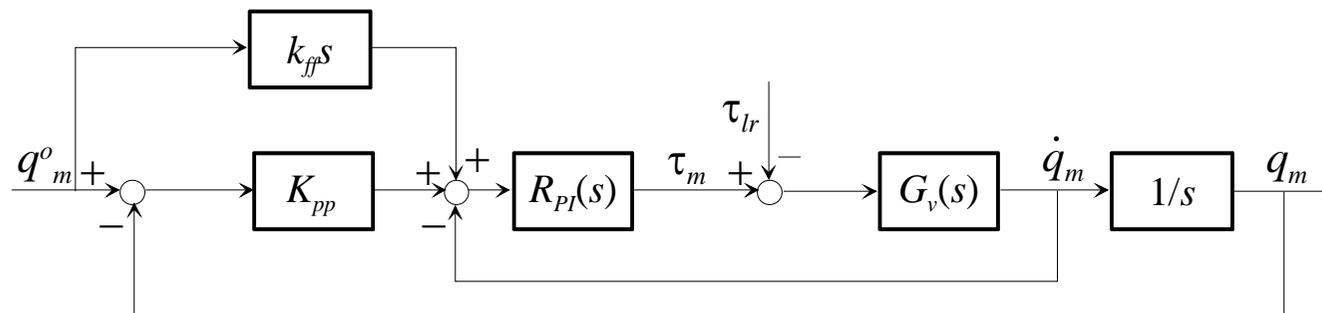


Anticipo di velocità



Per rendere la risposta al riferimento di posizione più pronta, è possibile inserire un contributo di feedforward, noto come “anticipo di velocità”: si deriva il riferimento e si somma questo contributo nel nodo sommatore dell’anello di velocità.

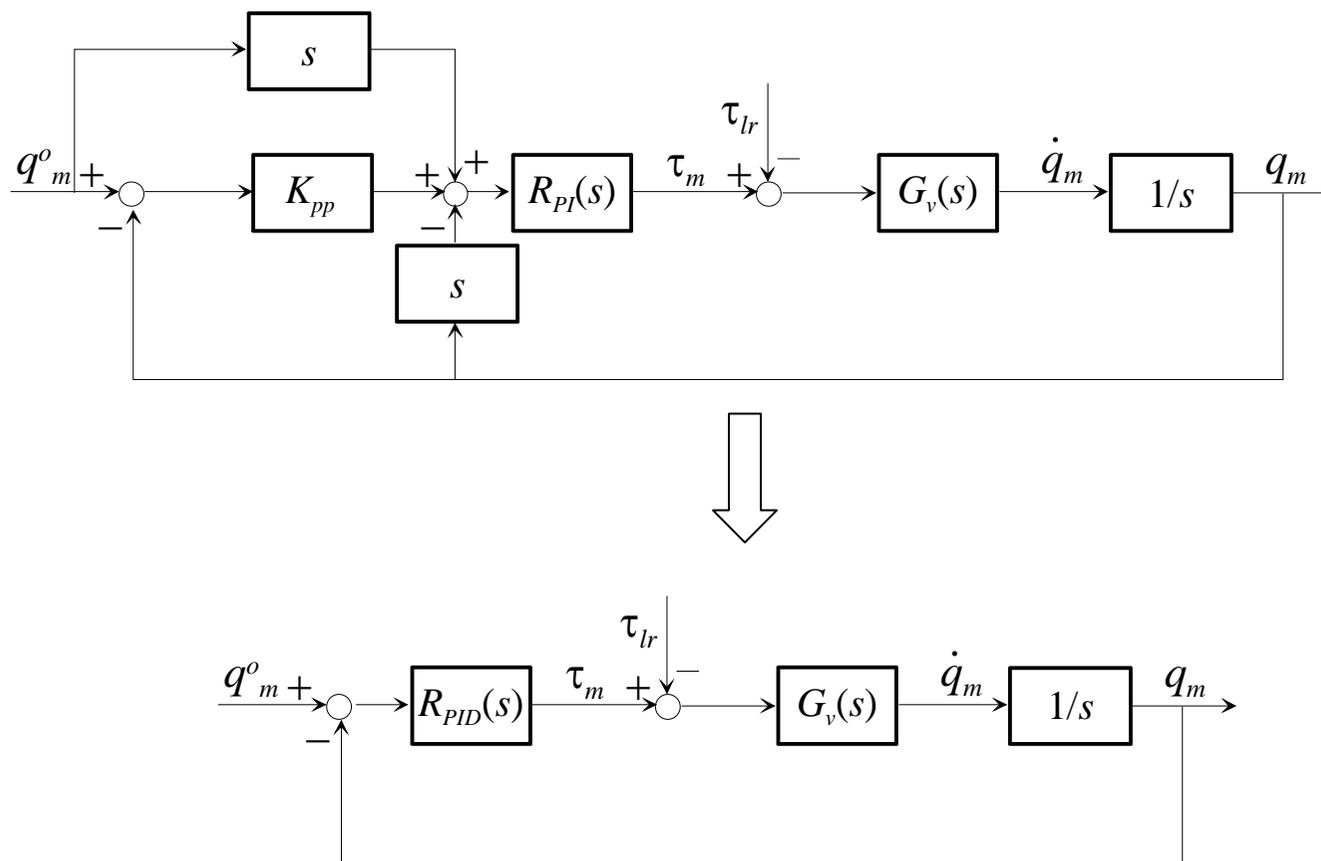
Spesso il contributo di feedforward viene pesato da un coefficiente k_{ff} compreso tra 0 e 1:



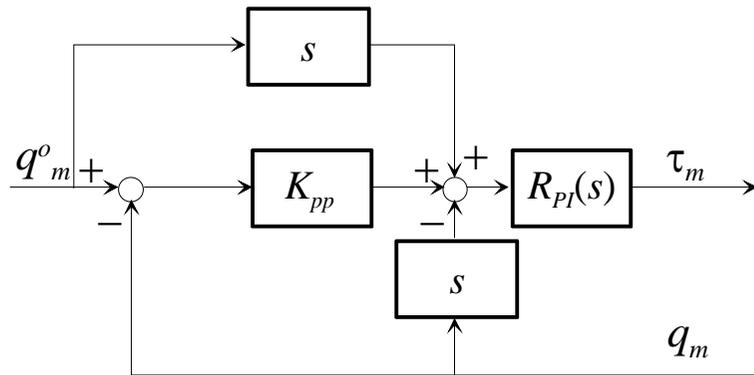
Anticipo di velocità e PID



Se si usa un solo sensore sulla posizione motore e la velocità si ottiene differenziando la misura di posizione, si ottiene uno schema di controllo del tutto equivalente ad un regolatore PID:



Anticipo di velocità e PID



Risulta:

$$\begin{aligned} \tau_m(s) &= R_{PI}(s) \left(s q_m^o(s) - s q_m(s) + K_{pp} (q_m^o(s) - q_m(s)) \right) = \\ &= K_{pv} \left(1 + \frac{1}{s T_{iv}} \right) (s + K_{pp}) (q_m^o(s) - q_m(s)) = R_{PID}(s) (q_m^o(s) - q_m(s)) \end{aligned}$$

$$R_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{s T_I} + s T_D \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_P = K_{pv} \left(K_{pp} + \frac{1}{T_{iv}} \right) \\ T_D = \frac{K_{pv}}{K_p} \\ T_I = \frac{K_p T_{iv}}{K_{pp} K_{pv}} \end{array} \right. \quad \text{(formule per il passaggio dal P/PI al PID)}$$

Limitazioni del modello rigido



Il modello rigido non mette in evidenza nessun significativo limite di banda. In linea di principio si potrebbe quindi rendere il sistema in anello chiuso arbitrariamente veloce.

All'atto pratico tuttavia emergono chiaramente limitazioni, sotto forma di vibrazioni, rumore, saturazioni, ecc..

Evidentemente il modello rigido non è in grado di spiegare bene come si comporta un servomeccanismo.

Occorre complicare il modello....



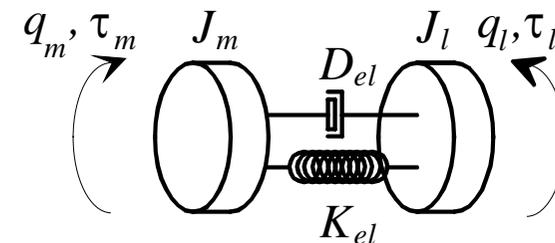
L'approssimazione a due masse

Un secondo modo di affrontare il problema di controllo consiste nell'assumere l'insieme motore, riduttore e carico come un accoppiamento elastico tra due corpi rigidi. In questo caso le equazioni del sistema sono le seguenti:

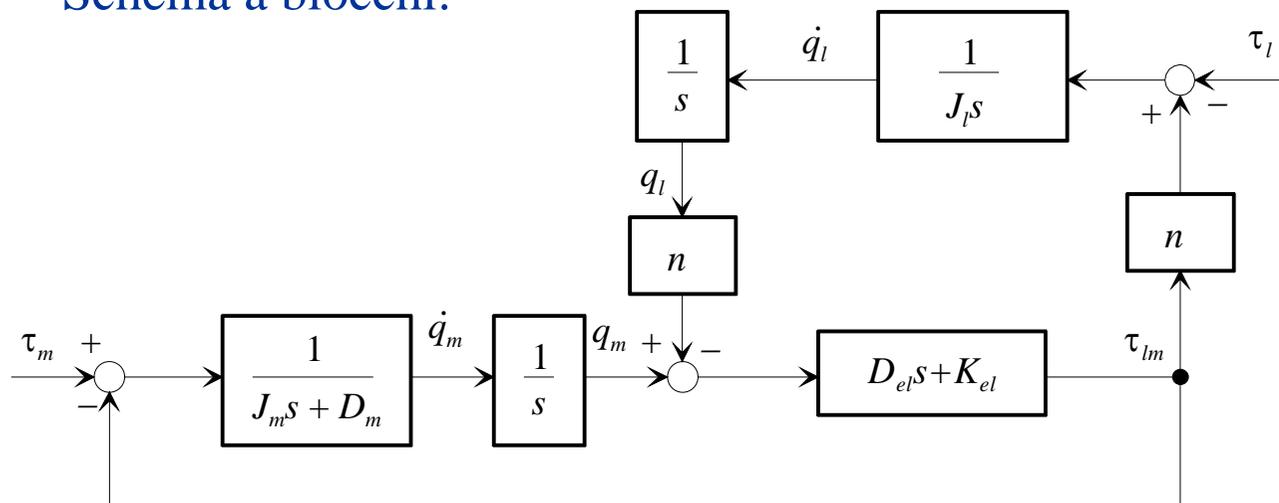
motore $J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm}$

carico $J_l \ddot{q}_l = n\tau_{lm} - \tau_l$

trasmissione $\tau_{lm} = K_{el}(q_m - nq_l) + D_{el}(\dot{q}_m - n\dot{q}_l)$



Schema a blocchi:



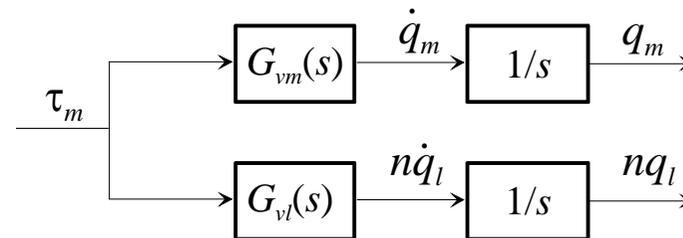
È un sistema di ordine 4 (ci sono 4 variabili di stato)



Un sistema “SITO”

Concentriamoci sulla risposta del sistema al comando di coppia τ_m (poniamo $\tau_l = 0$)

Il sistema è interpretabile come sistema ad un ingresso e due uscite (SITO: Single Input Two Outputs).



i numeratori sono diversi

Risolvendo lo schema a blocchi si ottiene:

$$G_{vm}(s) = \frac{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}}{J_{lr}J_ms^3 + (JD_{el} + J_{lr}D_m)s^2 + (JK_{el} + D_mD_{el})s + D_mK_{el}}$$

$$G_{vl}(s) = \frac{D_{el}s + K_{el}}{J_{lr}J_ms^3 + (JD_{el} + J_{lr}D_m)s^2 + (JK_{el} + D_mD_{el})s + D_mK_{el}}$$

$$\left[J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad J = J_{lr} + J_m \right]$$



Parametri notevoli

Poniamo $D_m=0$ ed introduciamo i seguenti parametri:

$$\rho = \frac{J_{lr}}{J_m} \quad (\text{rapporto di inerzia})$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}, \quad \zeta_z = \frac{D_{el}}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{lr} K_{el}}} \quad (\text{puls. naturale e smorzamento degli zeri})$$

$$\omega_p = \sqrt{1+\rho} \omega_z, \quad \zeta_p = \sqrt{1+\rho} \zeta_z \quad (\text{puls. naturale e smorzamento dei poli})$$

Si ottiene:

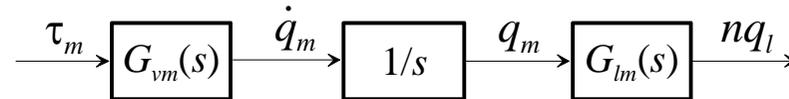
$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}} \quad G_{vl}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

$\left[\mu = \frac{1}{J} \right]$

Natural frequency e locked frequency



Si può anche rappresentare sinteticamente il sistema con il seguente schema a blocchi:

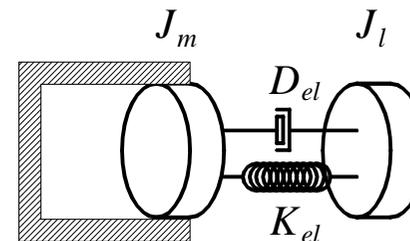
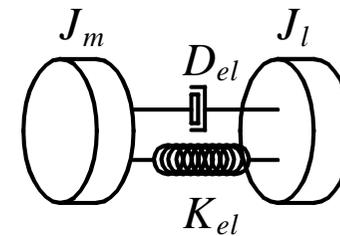


dove:

$$G_{lm}(s) = \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}$$

Il sistema libero oscilla alla pulsazione dei poli di G_{vm} , ossia ω_p : questa pulsazione è detta **natural frequency**.

Se invece si blocca meccanicamente il motore, il sistema oscilla alla pulsazione dei poli di G_{lm} , ossia ω_z : questa pulsazione è detta **locked frequency**.

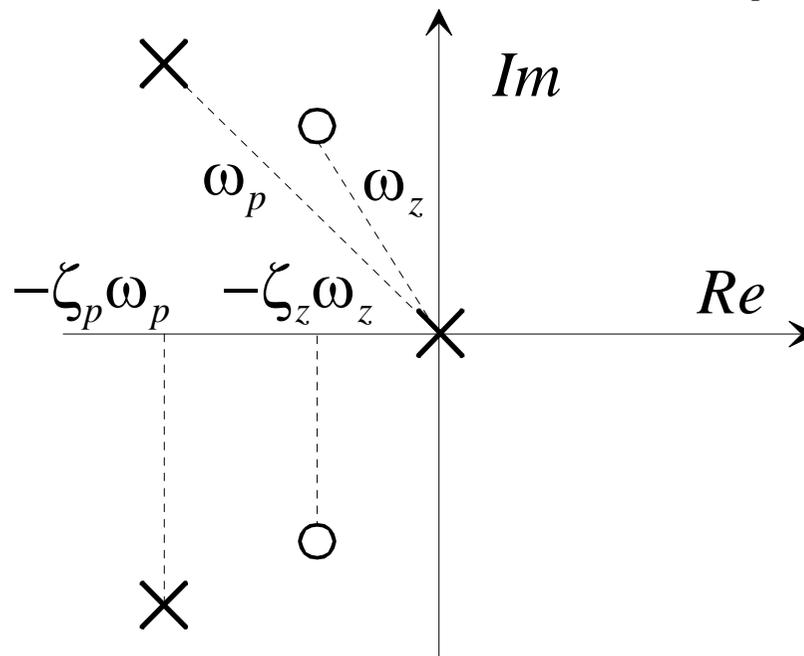




Disposizione di poli e zeri

Come sono messi nel piano complesso poli e zeri di G_{vm} ?

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$



$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{\zeta_p}{\zeta_z} = \sqrt{1 + \rho} > 1$$



I poli sono a
più alta
frequenza e più
smorzati

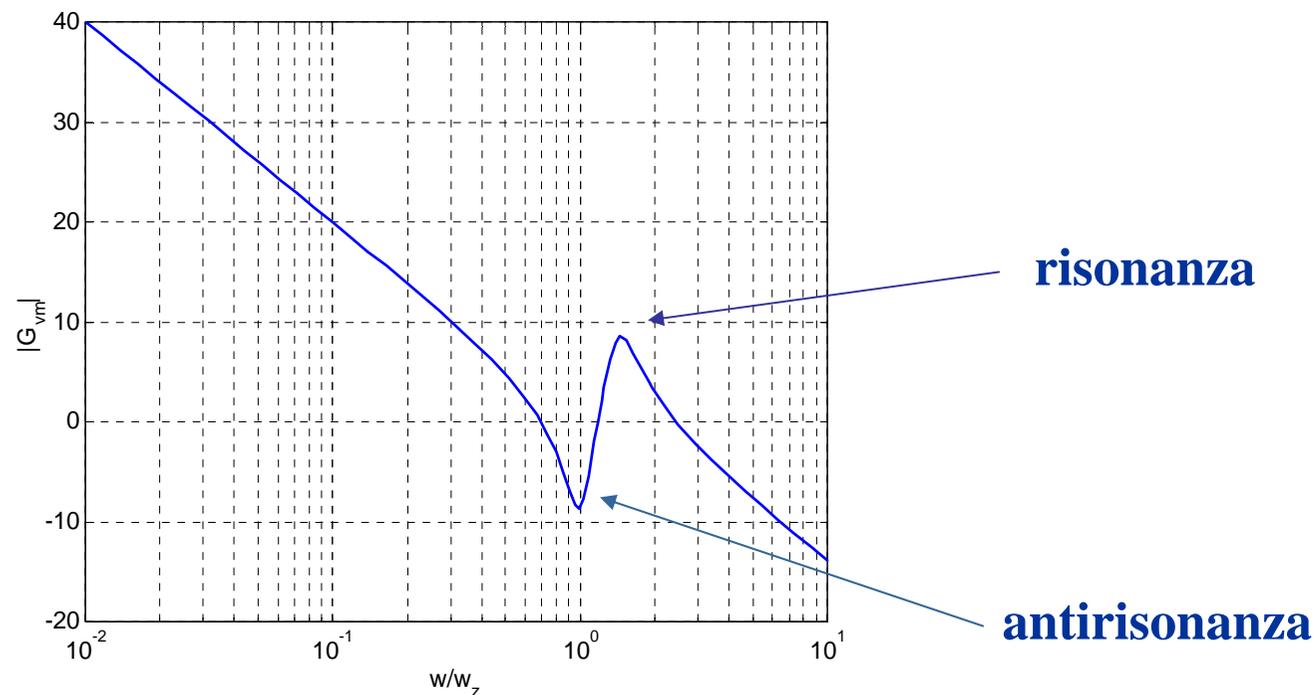


Risposta in frequenza

Cha aspetto assume la risposta in frequenza di G_{vm} ?

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

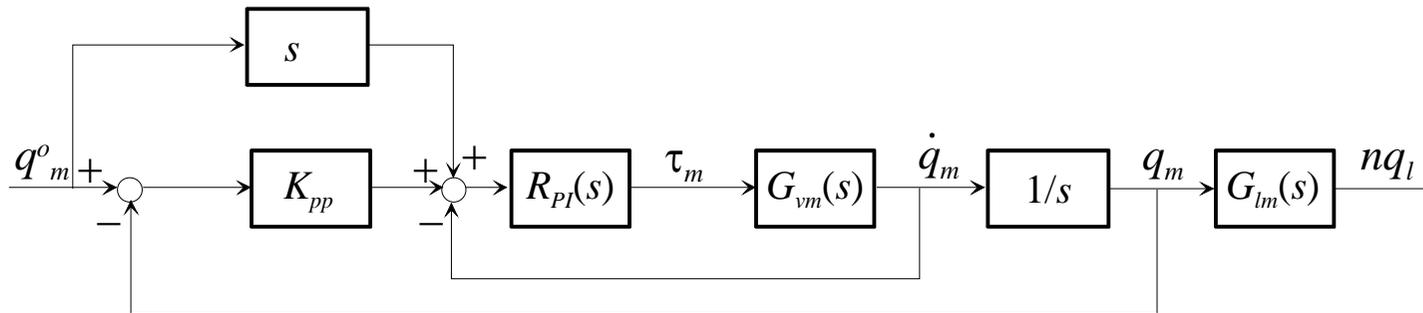
$\rho=1$
 $\zeta_z=0.1$



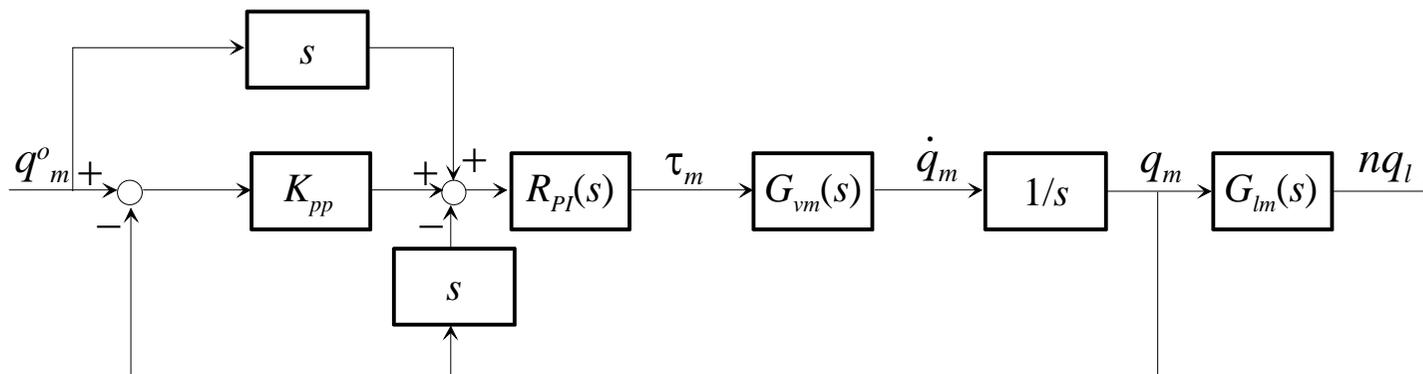
Controllo P/PI sul motore



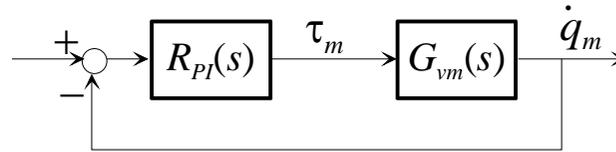
Nella robotica industriale i sensori sono di norma disposti solo dal lato motore. Concentrandoci sulla risposta al riferimento ($\tau_f=0$) si ha:



Nel caso di velocità ottenuta per derivazione della posizione:



Controllo PI di velocità motore



$$R_{PI}(s) = K_{pv} \left(1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Funzione d'anello:

$$L_v(s) = R_{PI}(s)G_{vm}(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}} \frac{1 + 2\frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2\frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

Introduciamo il seguente parametro di progetto adimensionale:

$$\tilde{\omega}_{cv} = \frac{K_{pv}\mu}{\omega_z}$$

È la **pulsazione critica di progetto**, valutata sul modello rigido ($K_{pv}\mu$), **normalizzata** alla pulsazione ω_z .



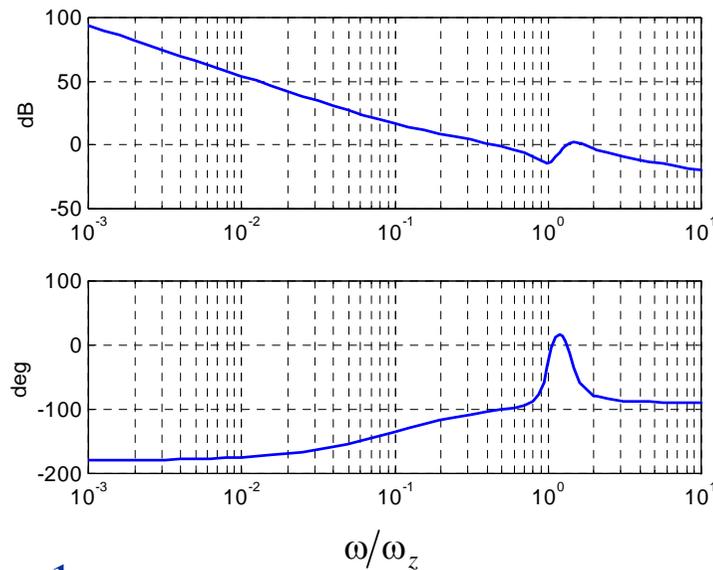
Criterio di Bode

Posizioniamo lo zero del PI una decade prima della pulsazione ω_z .
Introduciamo un altro parametro adimensionale:

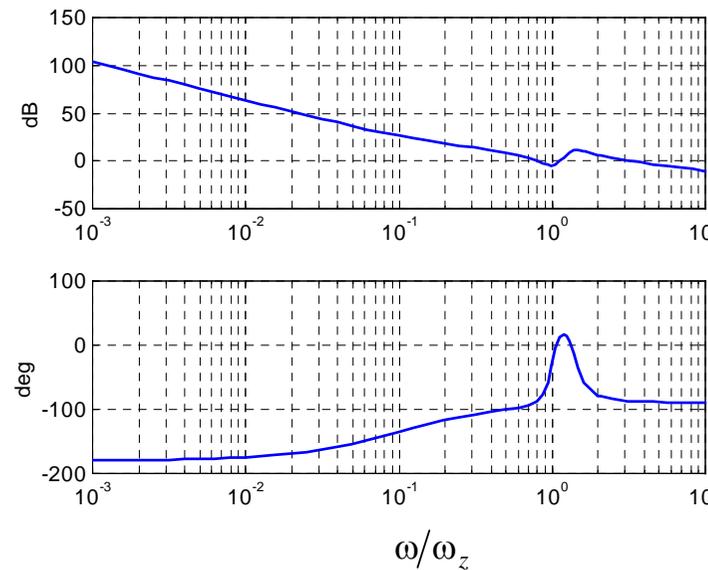
$$T_{iv} = \tau_{iv} / \omega_z, \quad \tau_{iv} = 10 \text{ [adim.]}$$

Tracciamo il diagramma di Bode della f.d.t. d'anello:

$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$



Il margine di fase è elevato

$$\rho=1$$
$$\zeta_z=0.1$$

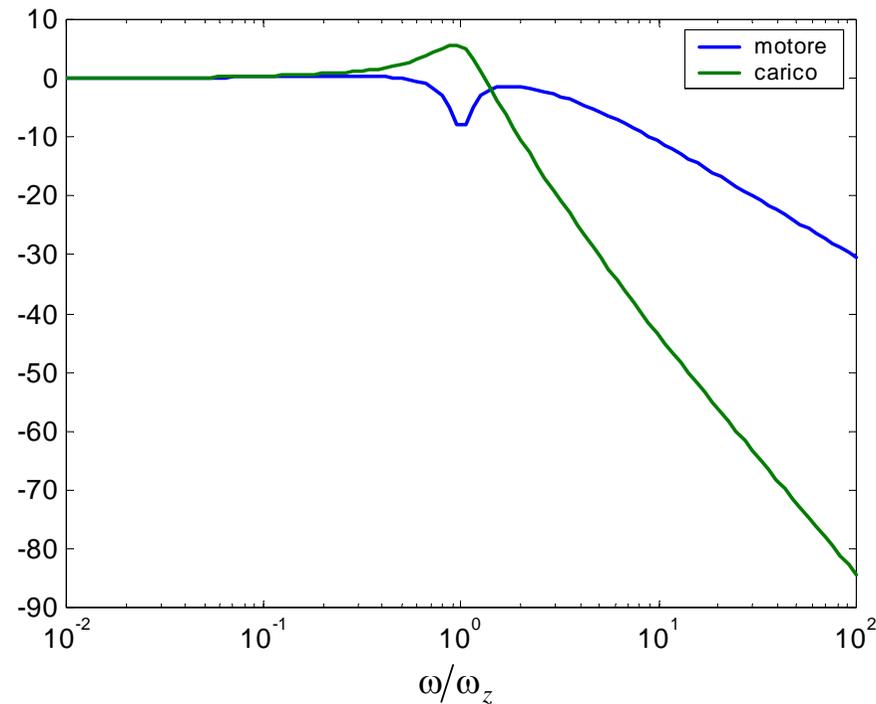
Criterio di Bode



Dal criterio di Bode risulta sempre margine di fase molto elevato. Non emergono limiti significativi...

Guardiamo però la risposta in frequenza *in anello chiuso* lato motore e carico:

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

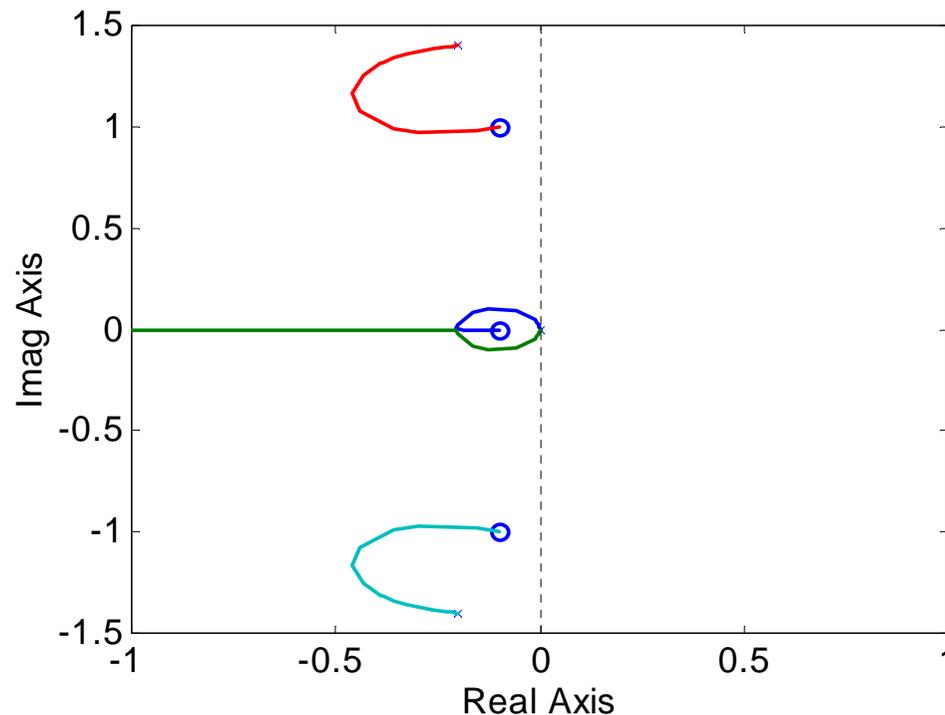


C'è una risonanza lato carico che il criterio di Bode non coglie.

Anello di velocità: luogo delle radici



Tracciamo il luogo delle radici al variare di $\tilde{\omega}_{cv}$:



Ci sono dei poli complessi il cui smorzamento prima aumenta e poi diminuisce.

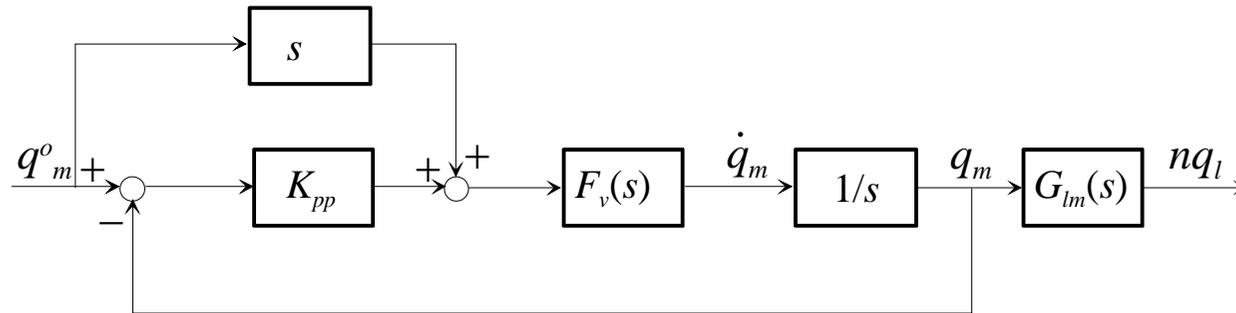
Lo smorzamento massimo si ottiene per:

$$\tilde{\omega}_{cv} \approx 0.7$$

$$(\omega_{cv} \approx 0.7\omega_z)$$

N.B. In questo e nei successivi luoghi, per maggiore generalità, gli assi sono normalizzati rispetto a ω_z

Controllo P di posizione



$$F_v(s) = \frac{L_v(s)}{1 + L_v(s)} \quad \text{Anello chiuso di velocità}$$

La funzione d'anello per il controllo di posizione è: $L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s}$

Introduciamo anche in questo caso un parametro di progetto normalizzato:

$$\gamma_{pp} = \frac{K_{pp}}{\omega_z}$$

È la **pulsazione critica di progetto**, valutata sul modello rigido (K_{pp}), **normalizzata** alla pulsazione ω_z .

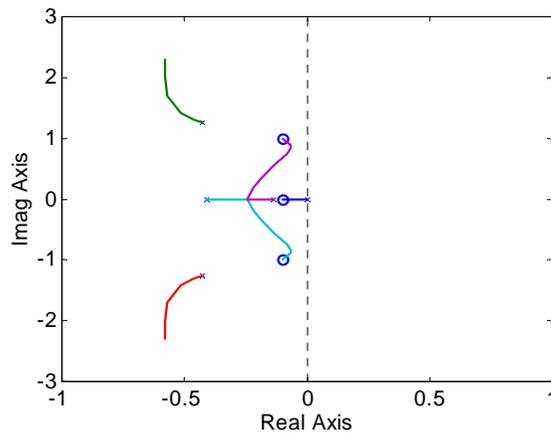
Anello di posizione: luogo delle radici



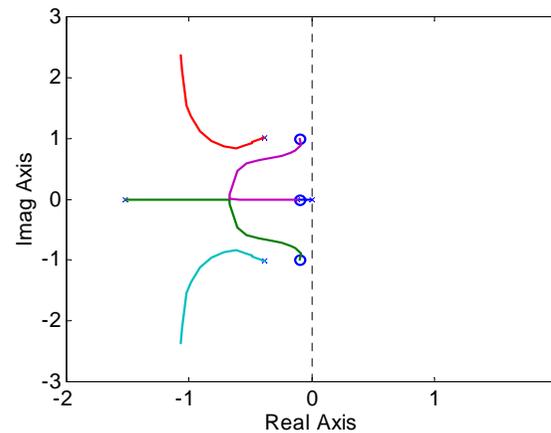
$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s}$$

Tracciamo il luogo delle radici al variare di γ_{pp} , per diversi valori di $\tilde{\omega}_{cv}$:

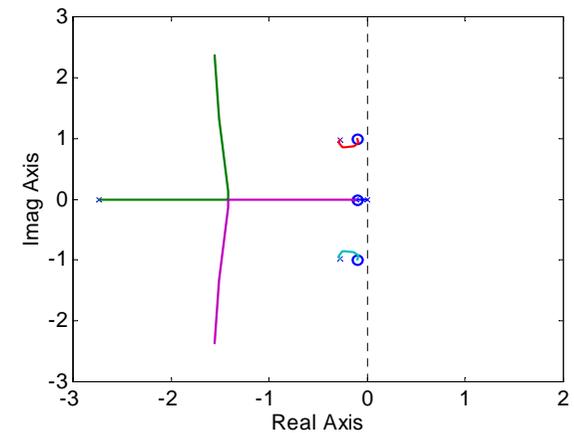
$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

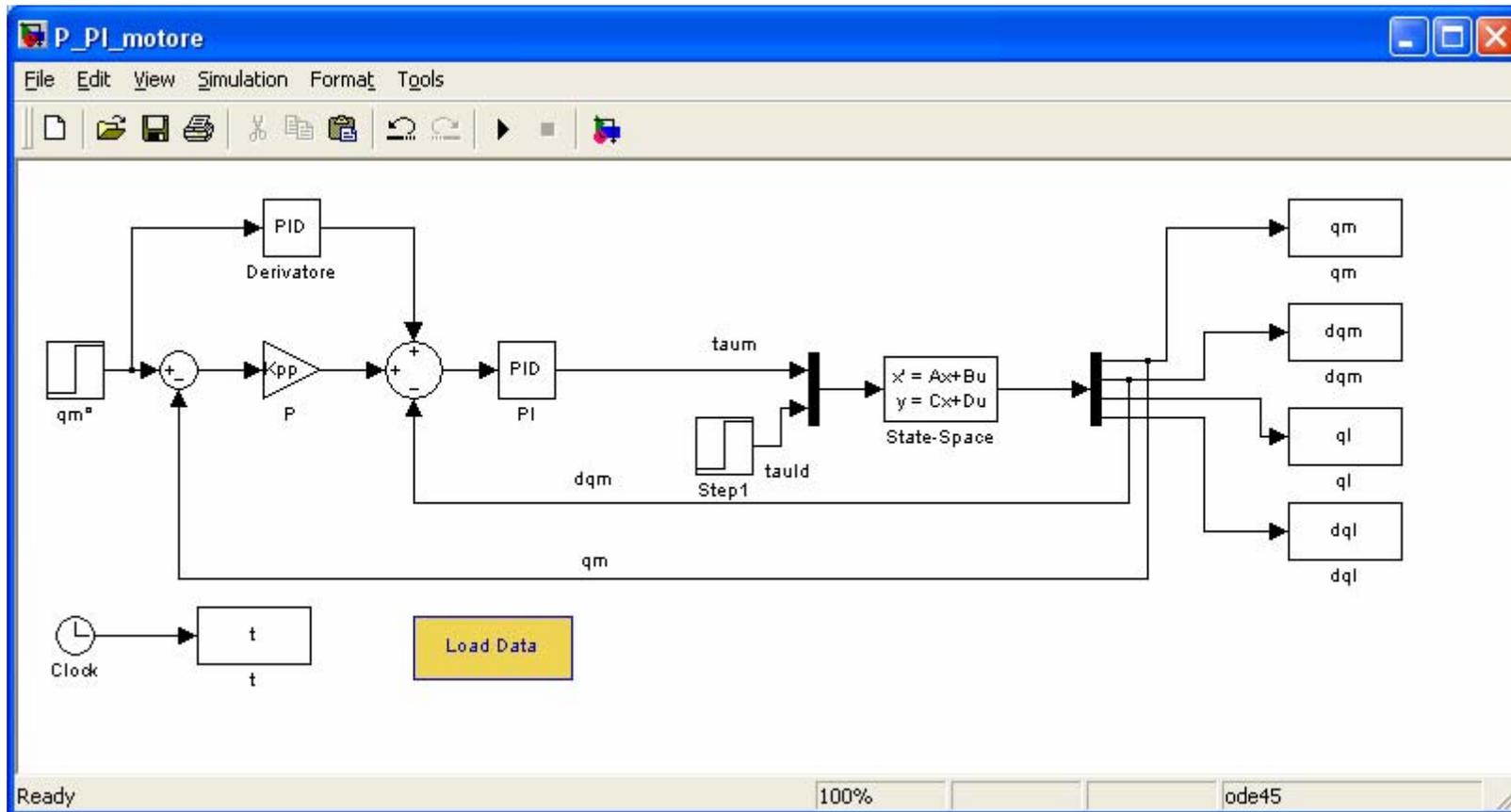


All'aumentare della banda dell'anello di velocità si generano dei poli in anello chiuso poco smorzati.

Simulazioni



Simuliamo in Simulink il sistema completo:



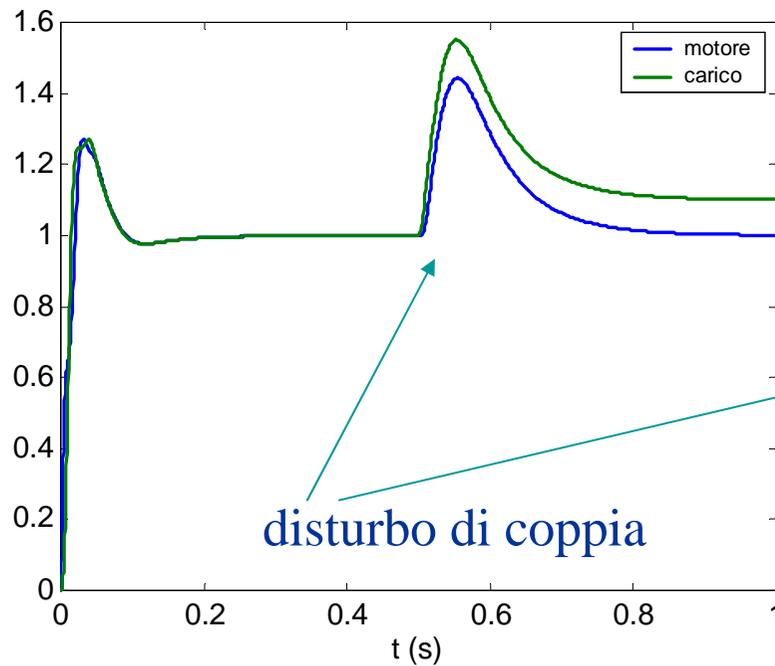
Simulazioni



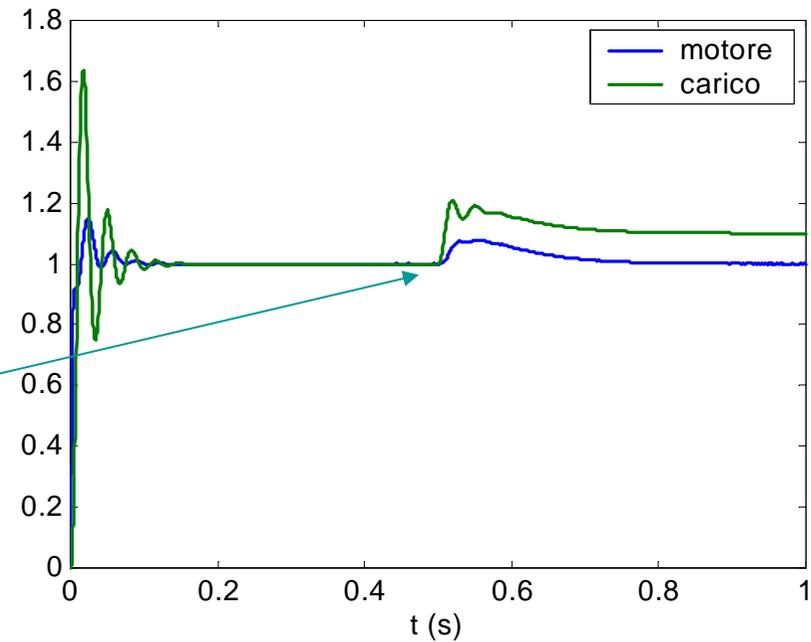
Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.1$

$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 2.5$$



Limiti di prestazione



Abbiamo visto che all'aumentare della banda dell'anello di velocità degradano le prestazioni del sistema di controllo, lato carico. E' possibile quantificare questo degrado di prestazioni?

Consideriamo la funzione di trasferimento dal riferimento alla posizione lato carico:

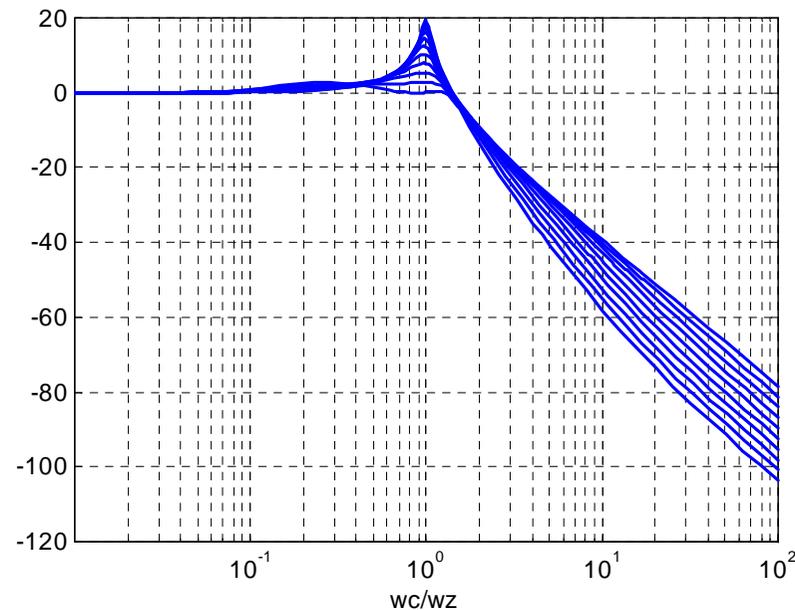
$$\frac{nq_l(s)}{q^o_m(s)} = F_{lm}(s)$$

$$\rho=1$$

$$\zeta_z=0.03$$

$$\tau_{iv}=10$$

$$\gamma_{pp}=0.1$$



Il picco di risonanza aumenta all'aumentare di $\tilde{\omega}_{cv}$

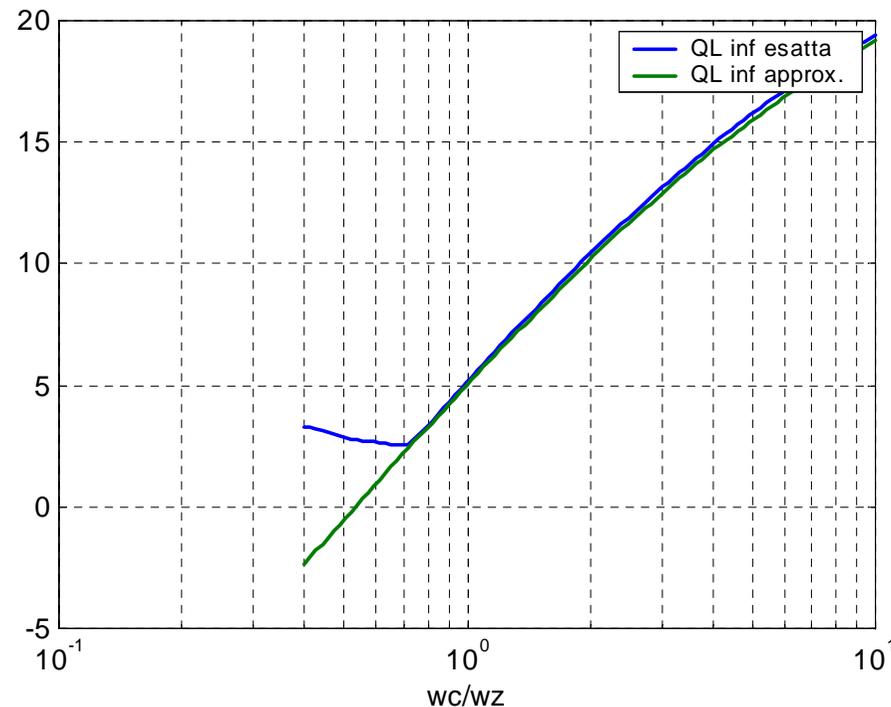


Limiti di prestazione

Studiando l'andamento del picco di risonanza della risposta in frequenza (cosiddetta norma H_∞) si trova un andamento approssimabile dalla seguente funzione:

$$QL_\infty \equiv \|F_l(s)\|_\infty \approx \frac{1}{2\hat{\zeta}}$$
$$\hat{\zeta} = \zeta_z + \frac{1}{2\tilde{\omega}_{cv}} \frac{\rho}{1+\rho}$$

La norma dipende da:
parametri dimensionali del servo
e un parametro di progetto del controllo

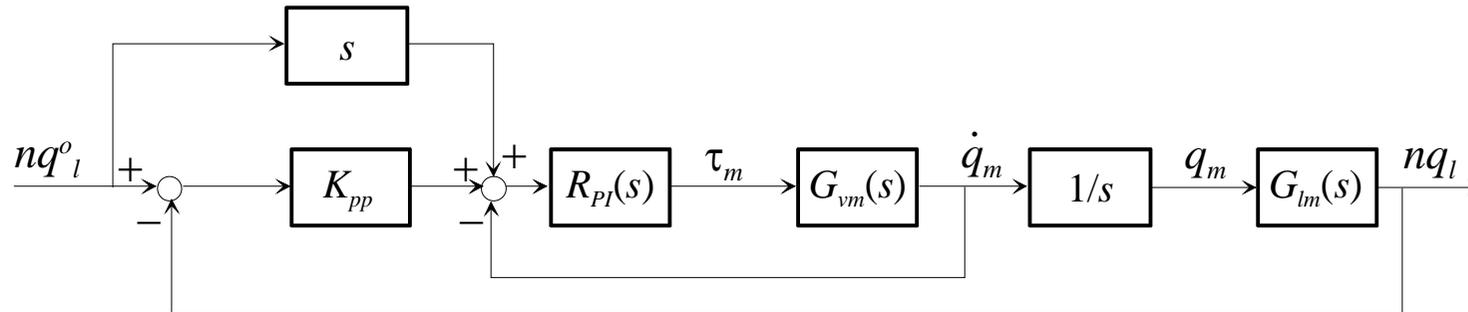


La relazione approssimata supporta il progetto congiunto (*progetto meccatronico*) di servo e controllo

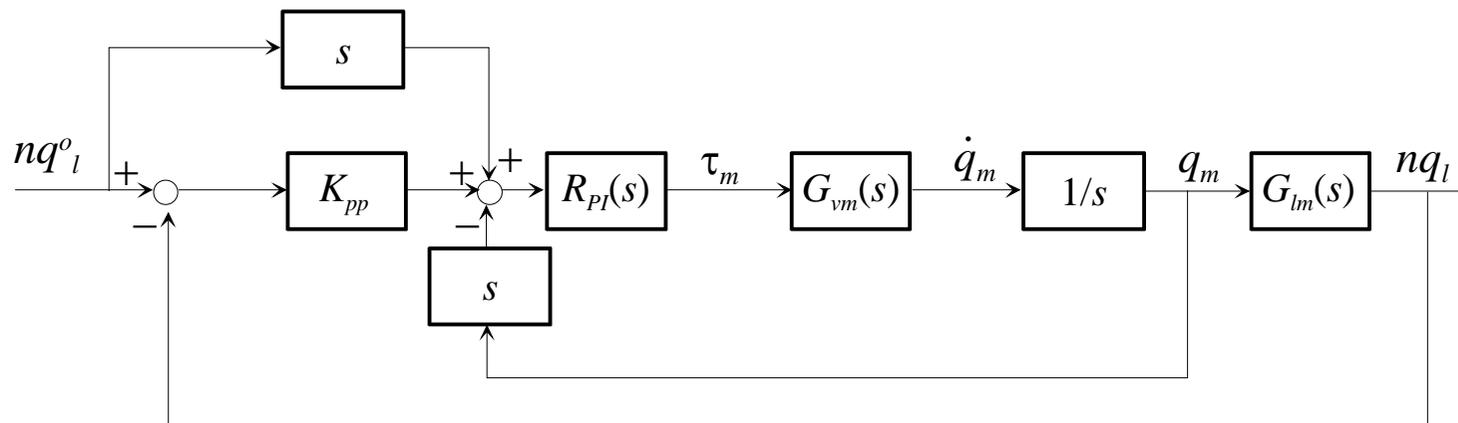
Controllo P sul carico e PI sul motore



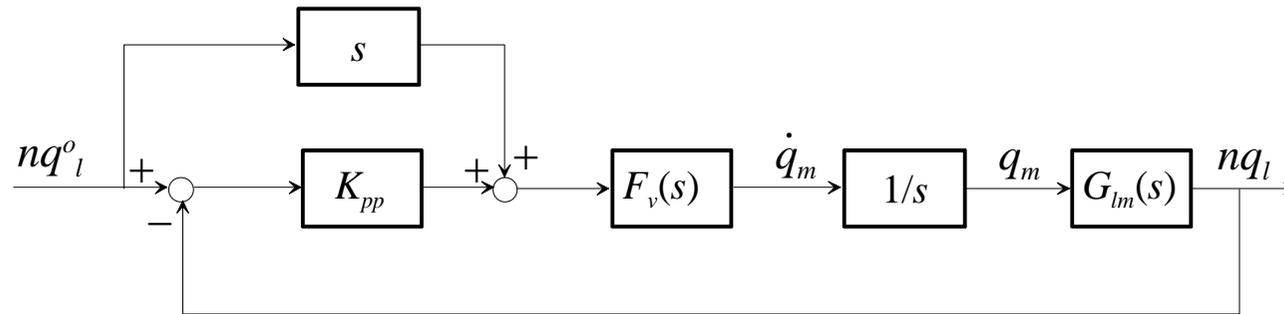
In molte altre applicazioni, come nelle macchine utensili, l'anello di posizione è chiuso lato carico:



Nel caso di velocità motore ottenuta per derivazione della posizione:



Controllo P di posizione



$$F_v(s) = \frac{L_v(s)}{1 + L_v(s)} \quad \text{Anello chiuso di velocità: nulla cambia nel suo progetto}$$

La funzione d'anello per il controllo di posizione è ora:

$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s} G_{lm}(s)$$
$$G_{lm}(s) = \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{\omega_z \left(1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2} \right)}$$

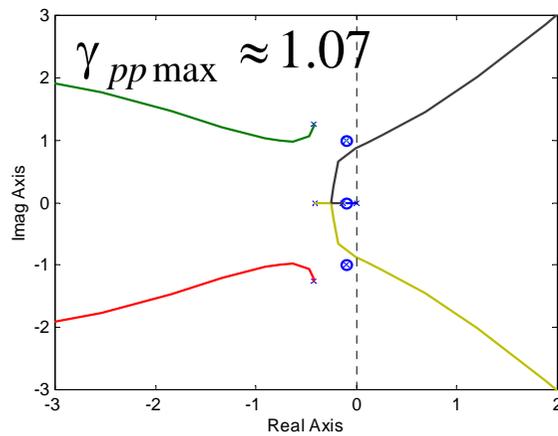


Luogo delle radici

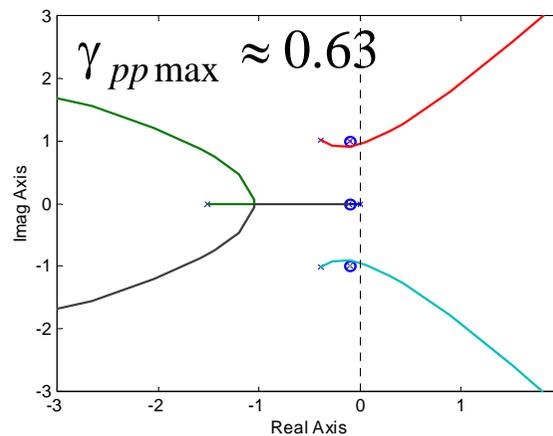
$$L_p(s) = K_{pp} \frac{F_v(s)}{s} G_{lm}(s)$$

Tracciamo il luogo delle radici al variare di γ_{pp} , per diversi valori di $\tilde{\omega}_{cv}$:

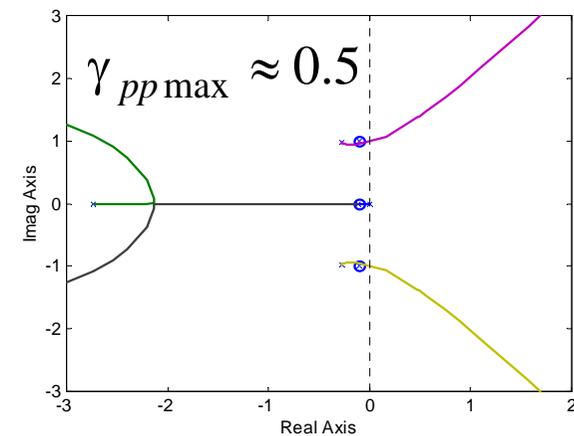
$$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1$$



$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$

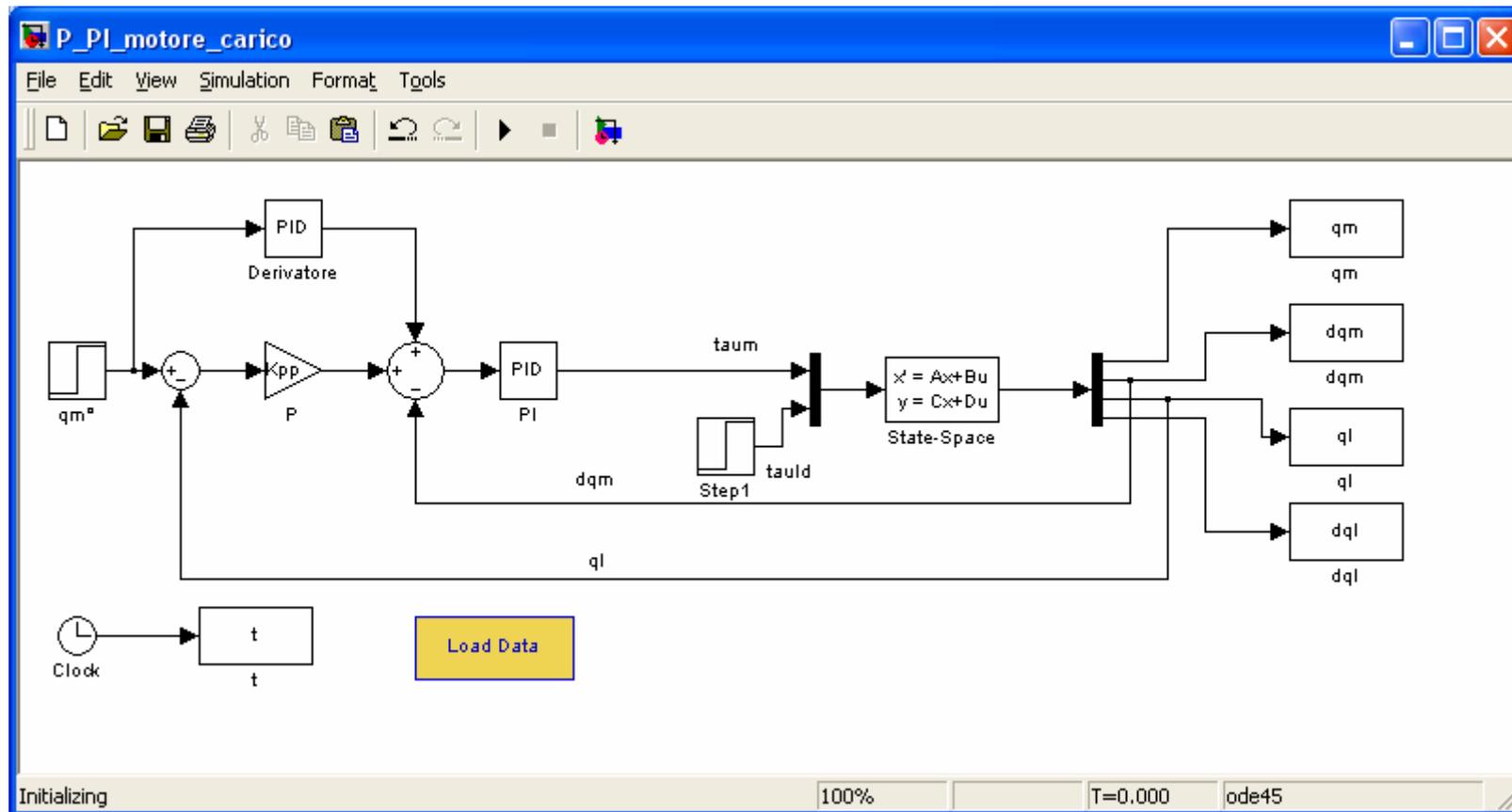


All'aumentare della banda dell'anello di velocità si complica il progetto dell'anello di posizione. Anche per piccoli valori di K_{pp} il sistema può diventare **instabile**

Simulazioni



Simuliamo in Simulink il sistema completo:



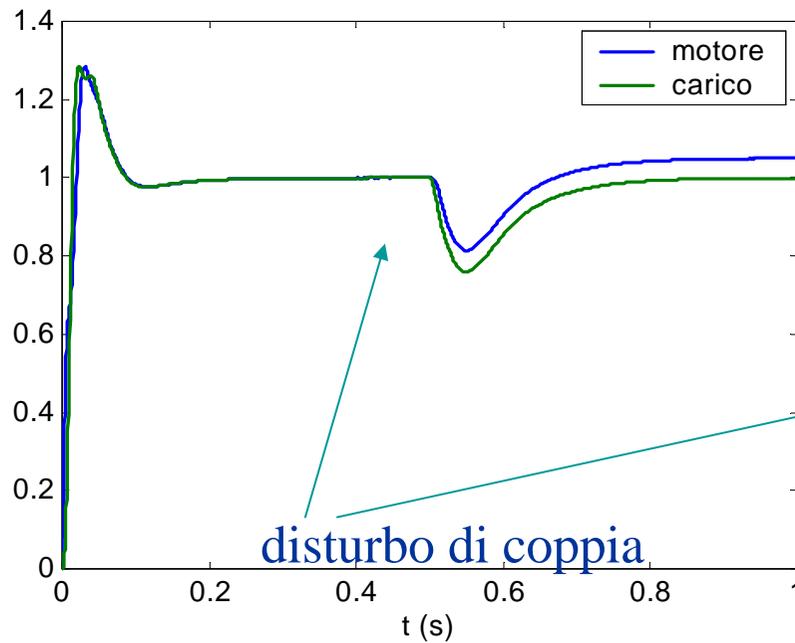
Simulazioni



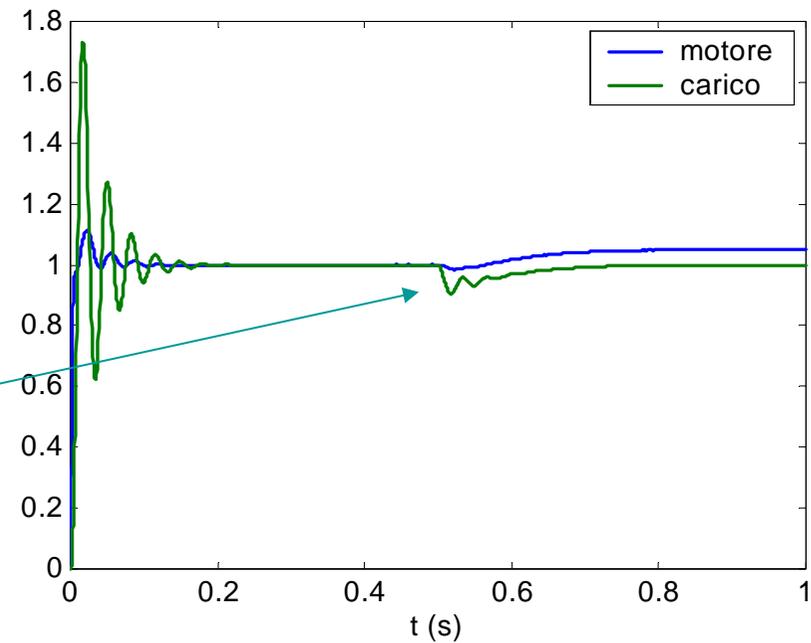
Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.1$

$\tilde{\omega}_{cv} = 0.5$



$\tilde{\omega}_{cv} = 2.5$



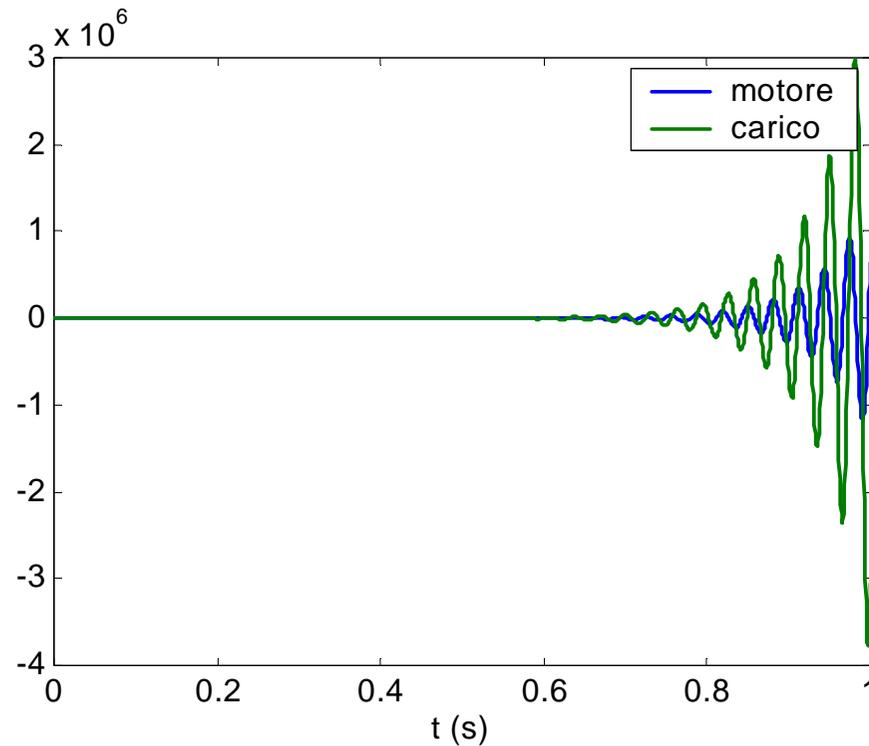
Simulazioni



Sistema: $\omega_z=200$, $\rho=1$, $\zeta_z=0.1$

PI di velocità: $\tau_{iv}=10$ P di posizione: $\gamma_{pp}=0.7$

$$\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$$



Il sistema è
instabile

Limiti di prestazione



Anche in questo caso è possibile quantificare il degrado di prestazioni connesso all'aumento della banda dell'anello di velocità.

Consideriamo la funzione di trasferimento dal riferimento alla posizione lato carico:

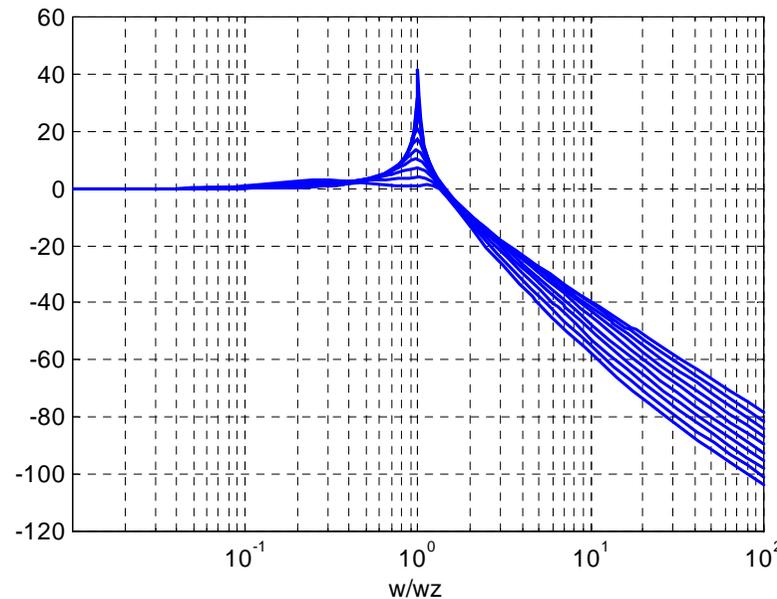
$$\frac{nq_l(s)}{q_m^o(s)} = F_{lm}(s)$$

$$\rho=1$$

$$\zeta_z=0.03$$

$$\tau_{iv}=10$$

$$\gamma_{pp}=0.1$$



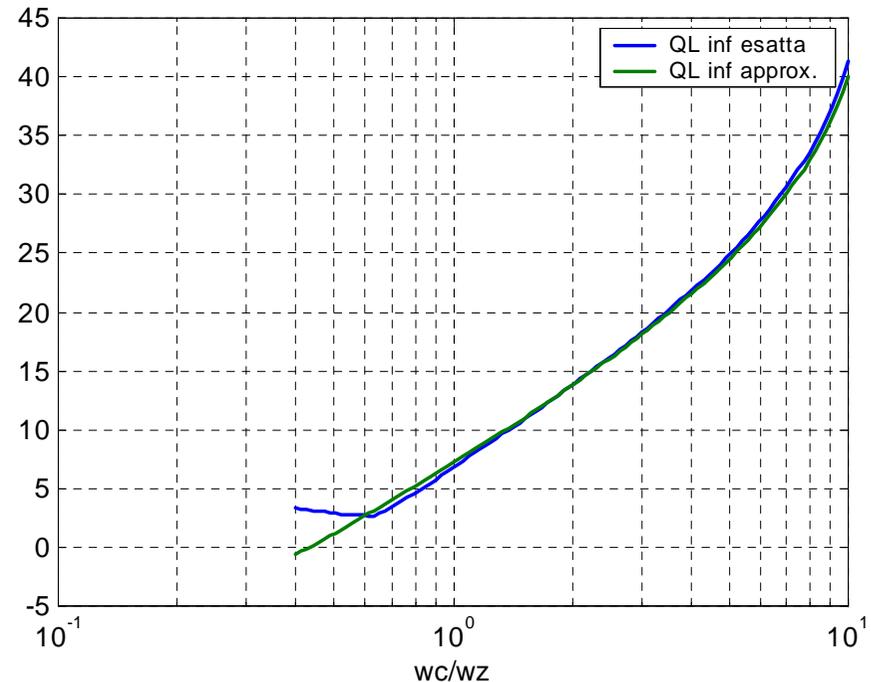
Il picco di risonanza aumenta all'aumentare di $\tilde{\omega}_{cv}$

Limiti di prestazione



Studiando anche in questo caso l'andamento del picco di risonanza della risposta in frequenza (la norma H_∞) si trova un andamento approssimabile dalla seguente funzione:

$$QL_\infty \equiv \|F_l(s)\|_\infty \approx \frac{1}{2\hat{\zeta}}$$
$$\hat{\zeta} = \frac{\zeta_z + \frac{1}{2\tilde{\omega}_{cv}} \frac{\rho}{1+\rho} - 0.5\gamma_{pp}}{1 + \frac{\gamma_{pp}}{\tilde{\omega}_{cv}} \frac{1}{1+\rho}}$$



Il degrado di prestazioni è molto più evidente rispetto al caso di chiusura dell'anello di posizione lato motore.

Controllo del moto



Parte III

Alcuni aspetti realizzativi



Regolatori PID

Si è visto che nel controllo del moto si utilizzano in larga misura regolatori PID (o P o PI). Il comportamento dinamico del regolatore PID è, come è noto, rappresentato dall'equazione nel dominio del tempo:

$$u(t) = K_P \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\sigma) d\sigma + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

In termini di funzioni di trasferimento:

$$R_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

Questa espressione (talvolta detta “scolastica”) cattura il comportamento di massima del regolatore ma non fa emergere una serie di problemi applicativi connessi al suo utilizzo.

Alcuni di questi problemi saranno analizzati nel seguito.

Azione derivativa



L'azione derivativa ideale:

$$u(t) = K_P T_D \frac{de(t)}{dt} \quad R_D(s) = K_P T_D s$$

corrisponde ad un sistema dinamico non fisicamente realizzabile. Per ottenerne una versione realizzabile occorre filtrarla in alta frequenza, il che consente anche di tagliare il rumore di misura di alta frequenza.

L'azione derivativa filtrata assume l'espressione:

$$R_D(s) = K_P \frac{sT_D}{1 + sT_D/N}$$

dove N è un parametro che determina la costante di tempo del polo di alta frequenza. Più elevato è N , più ampia sarà la banda in cui l'azione derivativa ideale verrà approssimata, ma più alta sarà anche l'amplificazione di eventuali rumori di misura. Tipicamente si sceglie $N=5\div 10$.

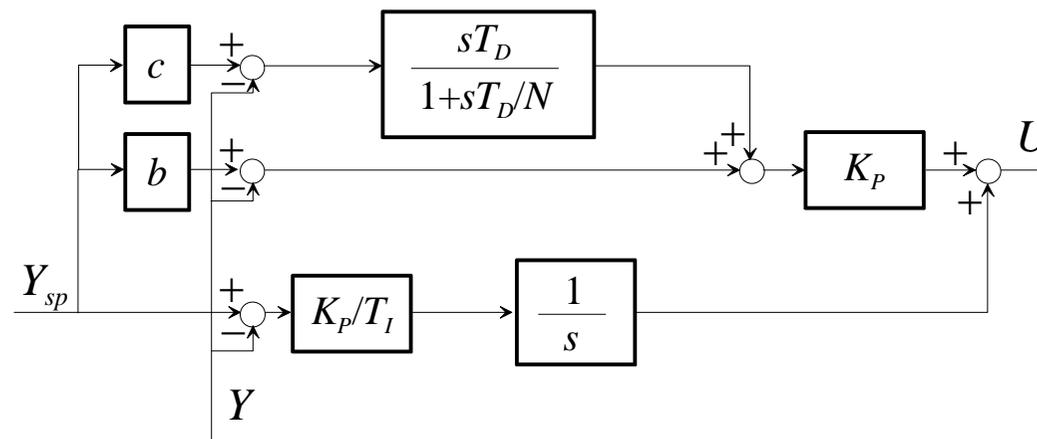


Forma standard ISA

La realizzazione della legge di controllo PID nei regolatori commerciali si differenzia da quella scolastica. Un'espressione che racchiude le diverse versioni come casi particolari è la cosiddetta forma standard ISA:

$$U(s) = K_P \left(bY_{sp}(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_I} E(s) + \frac{sT_D}{1 + sT_D/N} (cY_{sp}(s) - Y(s)) \right)$$

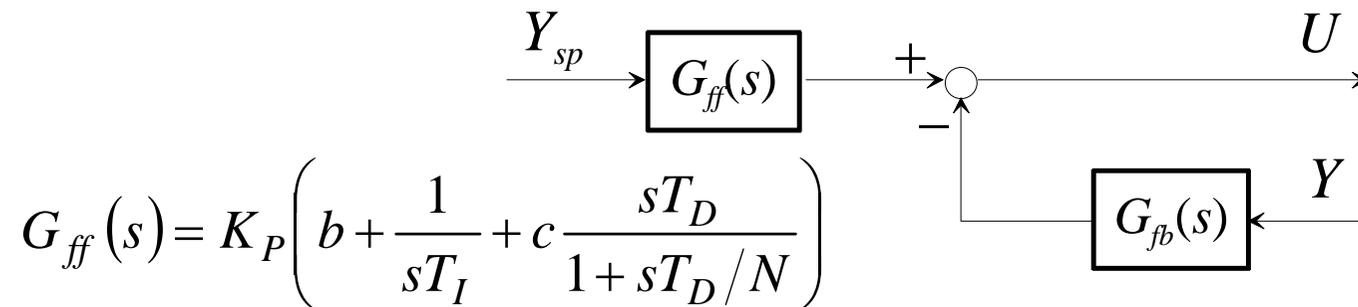
dove Y_{sp} è il setpoint, mentre b e c sono due coefficienti che consentono di pesare, rispettivamente nell'azione proporzionale e nell'azione derivativa, il setpoint in maniera diversa dalla misura. Per $b=c=1$ si ricade nella forma "scolastica".





Forma standard ISA

La forma standard ISA è un regolatore a “due vie”: il setpoint e la misura vengono elaborati da due funzioni di trasferimento diverse:



$$G_{fb}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1 + sT_D/N} \right)$$

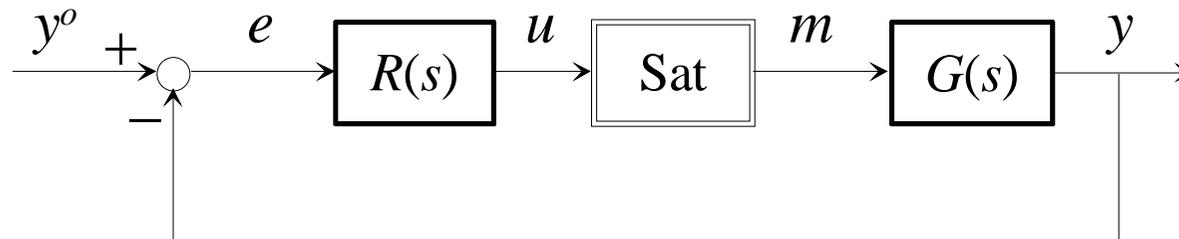
In questo modo si possono scegliere gli zeri della funzione di trasferimento dal setpoint in modo opportuno. Se ad esempio il sistema sotto controllo è un doppio integratore ($G(s)=\mu/s^2$), si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{Y_{sp}(s)} = G_{ff}(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)G_{fb}(s)} = \frac{cs^2T_DT_I + bsT_I + 1}{s^3 \frac{T_I}{\mu K_P} + s^2T_DT_I + sT_I + 1}$$

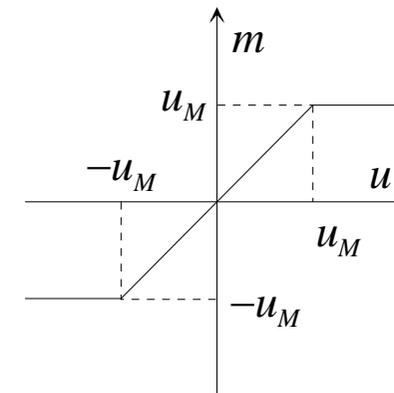


Il wind-up

Tutti gli attuatori presentano una saturazione, che può essere rappresentata nel sistema di controllo come nel seguente schema :

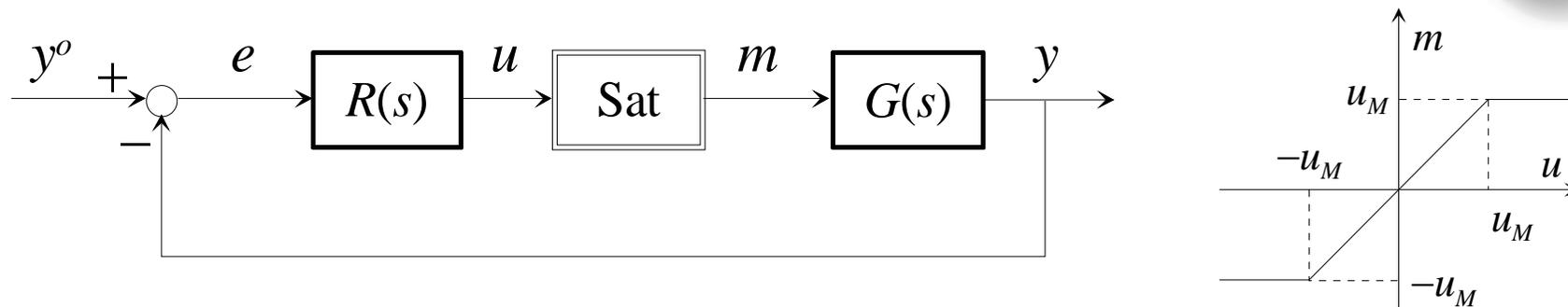


Il blocco “Sat” costituisce una caratteristica di saturazione, che assumeremo simmetrica:



Se il regolatore presenta azione integrale, come il PID, la combinazione di questa con la saturazione dell'attuatore può dar luogo ad un effetto indesiderato, noto come **carica integrale** (o **integral windup**), che può pregiudicare le prestazioni del sistema di controllo.

Il wind-up



Facciamo riferimento al caso in cui il regolatore sia puramente integrale ($R(s) = k_I/s$). Supponiamo che l'errore e resti a lungo dello stesso segno, ad esempio positivo. La variabile di stato dell'integratore, e quindi la variabile u , cresce indefinitamente e può superare, anche di molto, il valore di saturazione u_M , facendo operare l'attuatore in regime di saturazione ($m \equiv u_M$).

Quando, per effetto di questa azione di controllo perdurante al valore massimo, la variabile di controllo y avrà superato il valore del suo riferimento y^o , rendendo quindi l'errore e negativo, sarebbe auspicabile che la variabile m lasciasse il valore massimo u_M ed assumesse valori inferiori.

Affinché ciò avvenga, tuttavia, è necessario attendere che la variabile u rientri dai valori elevati raggiunti nella fase precedente, fino ad assumere valori inferiori al limite di saturazione u_M : questa fase di scarica, o **desaturazione**, dell'azione integrale, può essere di durata rilevante e dà luogo ad un comportamento anomalo del sistema di controllo.

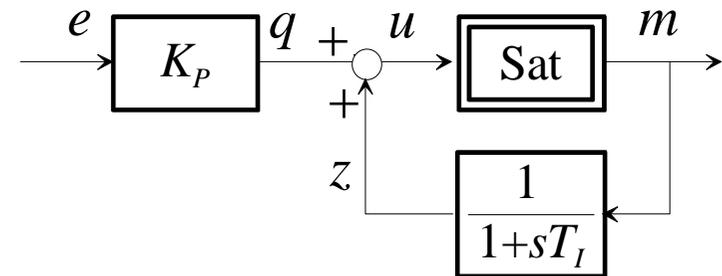
Regolatori anti wind-up



Un primo modo di ovviare al problema del wind-up consiste nel realizzare il regolatore in modo alternativo. Si supponga di dover implementare un regolatore PI:

$$R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right)$$

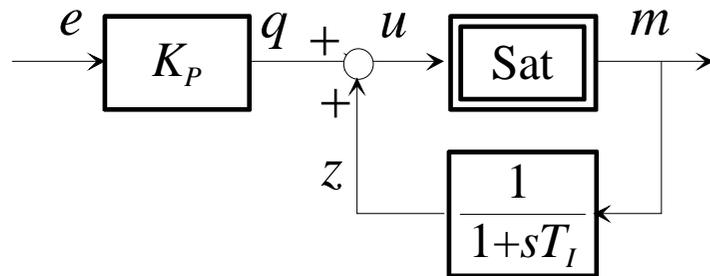
e se ne consideri il seguente schema anti-windup:



Si supponga nuovamente che l'errore e rimanga dello stesso segno, ad esempio positivo, a lungo. Se K_P è positivo, anche q assumerà valori positivi. Si supponga quindi l'attuatore in saturazione con $m = u_M$. Poiché il blocco in retroazione ha guadagno unitario, anche la variabile z si assesterà sul valore u_M . Quando, per effetto della prolungata azione dell'attuatore, l'errore cambia segno, anche la variabile q cambierà segno, istantaneamente. Il fatto che q assuma valori negativi, unito al fatto sopra ricordato che $z = u_M$, implica poi che u assumi immediatamente valori inferiori a u_M , facendo subito uscire l'attuatore dalla saturazione, ripristinandone quindi il comportamento lineare.



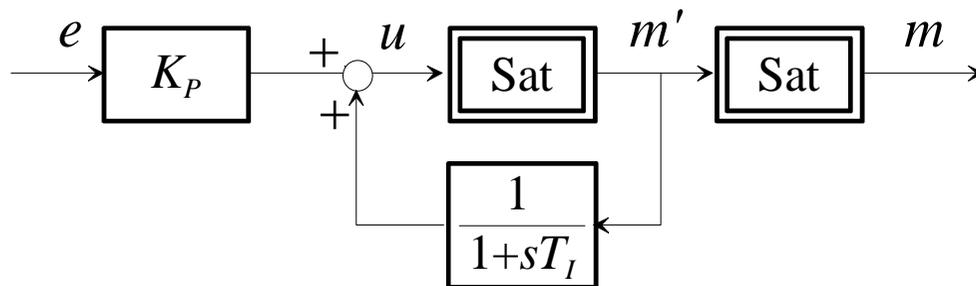
Regolatori anti wind-up



Si osservi che quando la saturazione non è raggiunta, il blocco Sat equivale ad un guadagno unitario, e la funzione di trasferimento da e a m diventa:

$$R(s) = K_P \frac{1}{1 - \frac{1}{1+sT_I}} = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) \quad \text{Il comportamento dinamico nominale è quindi quello del regolatore PI.}$$

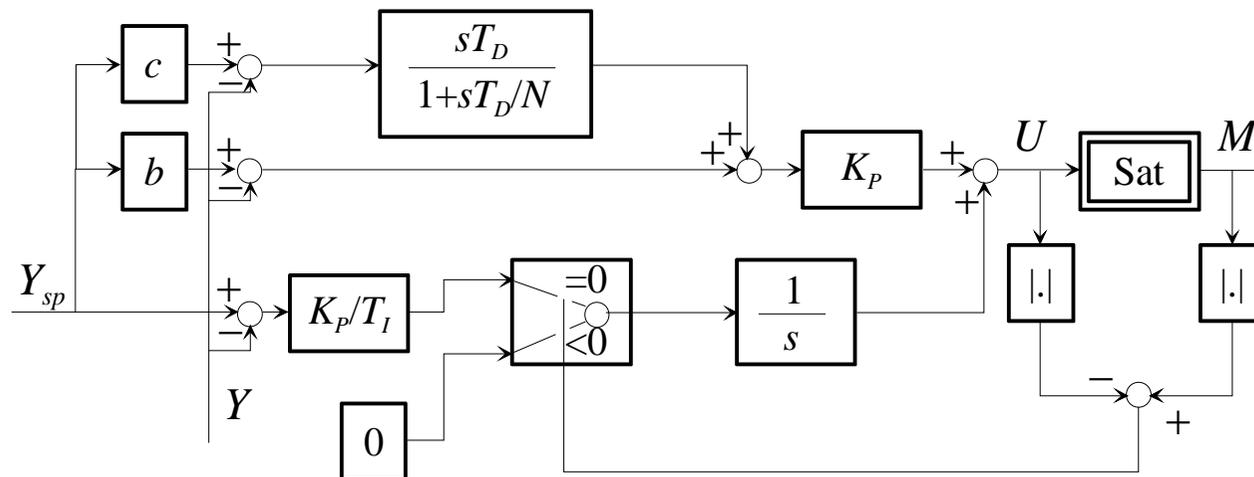
Se la variabile manipolabile m non è disponibile, si può fare riferimento alla saturazione propria dell'uscita del regolatore:





Integrazione condizionata

Un modo alternativo, di largo utilizzo, per far fronte al problema del wind-up dell'integratore consiste nell'interrompere l'integrazione quando l'attuatore si trova in saturazione (integrazione condizionata):

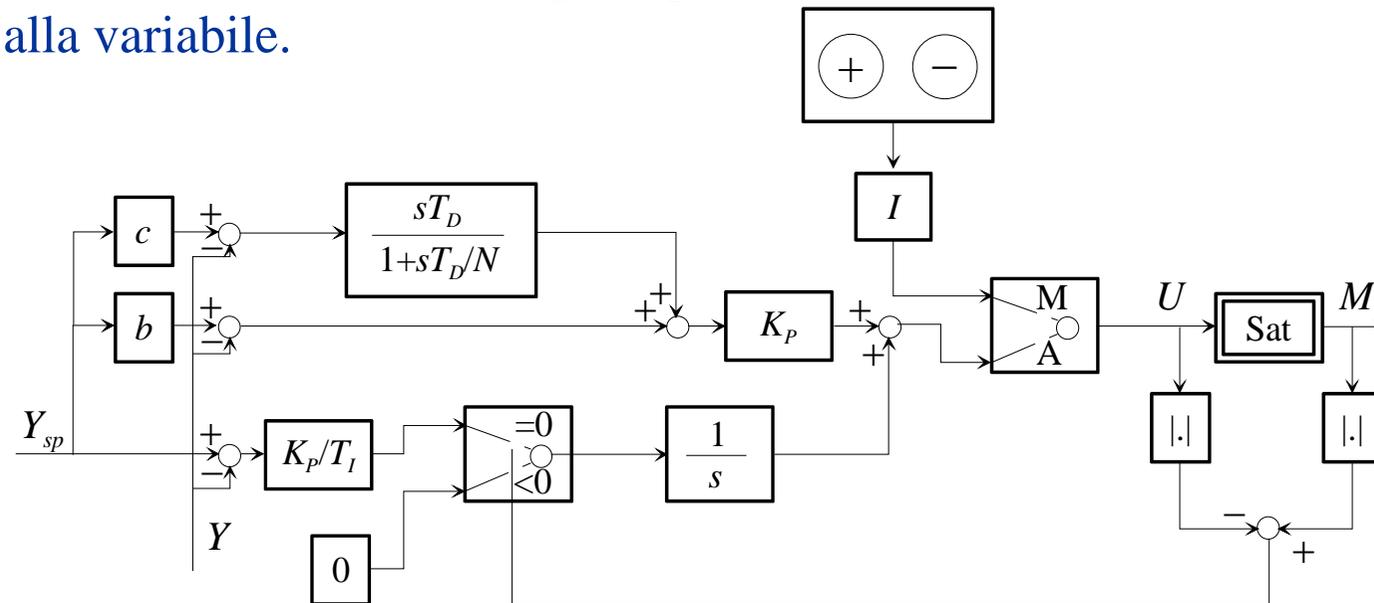


Il modo più sicuro di implementare questo schema di anti-windup consiste nel far uso di un sensore che rilevi quando l'attuatore entra in saturazione (ad esempio un fine corsa elettrico per un motore). In assenza di questo, si può fare riferimento alla saturazione dell'uscita propria del regolatore.

Commutazione automatico/manuale



Di norma in un regolatore PID è data la possibilità all'operatore di far funzionare il regolatore in modalità manuale: l'operatore può comandare delle variazioni alla variabile di controllo, che sono integrate per ottenere il valore effettivo da attribuire alla variabile.



La commutazione dal funzionamento manuale a quello automatico e viceversa deve essere senza scosse (*bumpless*): questo si ottiene mandando l'integratore della modalità non attiva in *inseguimento* della variabile di controllo, cioè calcolandone ad ogni istante il valore in modo che alla commutazione abbia un valore coerente.

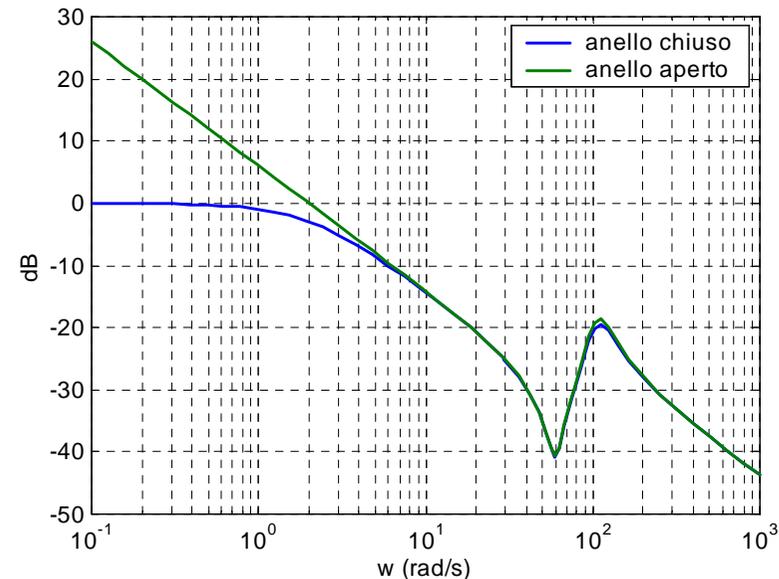
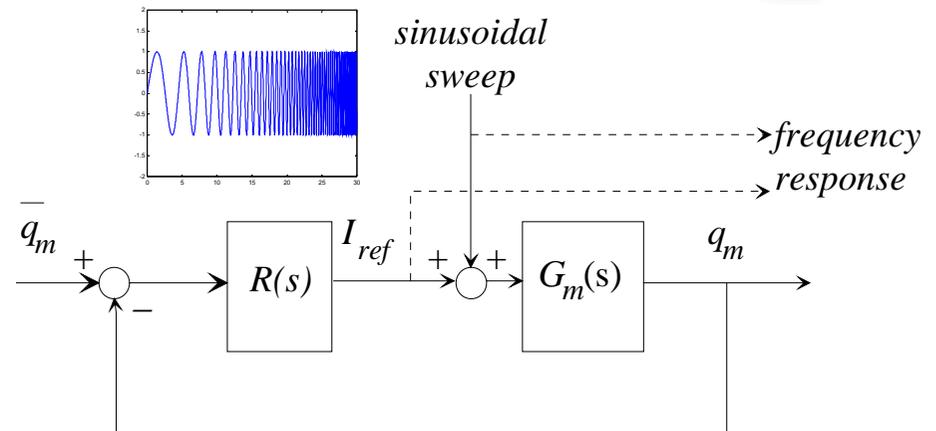
Identificazione dei parametri



Per il progetto del controllore, o anche per valutare i limiti di prestazione, occorre disporre di stime di ζ_z , ω_z e ρ . Per identificarne sperimentalmente i valori, si possono utilizzare gli strumenti di analisi forniti da alcuni CN commerciali.

Utilizzando un controllore che conferisce banda passante molto blanda, la funzione di trasferimento d'anello si sovrappone a quella in anello chiuso. Inoltre:

$$\frac{|F_m(j\omega_p)|}{|F_m(j\omega_z)|} \approx \frac{1}{4\zeta_z^2} \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2}$$



Procedura d'identificazione



Possiamo formalizzare una procedura di identificazione nei seguenti passi:

1. Progettare un controllore PID con $\omega_c \ll \hat{\omega}_z$ dove $\hat{\omega}_z$ è una stima approssimata di ω_z
2. Eseguire un esperimento in anello chiuso e riportare su grafico l'andamento del modulo $|F_m(j\omega)|$
3. Dal diagramma ricavare ω_z and ω_p come le pulsazioni di minimo e massimo e:

$$\Delta_{dB} = |F_m(j\omega_p)|_{dB} - |F_m(j\omega_z)|_{dB}$$

4. Calcolare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 10^{\left(\frac{\Delta_{dB}}{20}\right)} \\ \rho = \frac{\omega_p^2}{\omega_z^2} - 1 \\ \zeta_z = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \frac{\rho}{1+\rho} \end{array} \right.$$

