Controlli automatici per la meccatronica

Controllo digitale

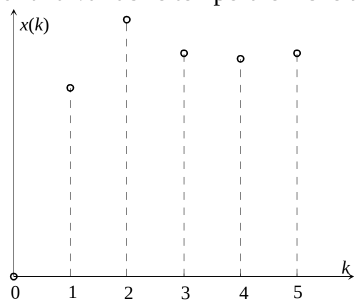
Prof. Paolo Rocco (paolo.rocco@polimi.it)

Parte I

Sistemi a tempo discreto

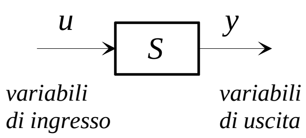
Definizione e motivazioni

Un sistema dinamico a tempo discreto è caratterizzato dal fatto che tutte le variabili del sistema sono funzioni di una variabile temporale k che assume solo valori interi.



Le motivazioni dello studio dei sistemi a tempo discreto sono duplici: da un lato sono utili per la comprensione di alcuni aspetti del controllo digitale (eseguito al calcolatore), dall'altro vi sono sistemi (economici, ecologici, sociologici, ecc.) che si lasciano naturalmente descrivere come sistemi a tempo discreto: ciò avviene in particolare in tutti i casi in cui i dati disponibili sono serie temporali.

Sistema dinamico a tempo discreto



Il sistema dinamico a tempo discreto è caratterizzato da un certo numero (m) di ingressi e un certo numero (p) di uscite.

Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite del sistema, noti gli andamenti degli ingressi a partire dall'istante iniziale, prende il nome di *ordine* del sistema: lo si indica con n.
Il sistema si lascia descrivere per mezzo di n **equazioni alle differenze**, cui si aggiungono p equazioni algebriche per determinare le uscite.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\right) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\right) \end{aligned}$$

Si usano le stesse classificazioni viste per i sistemi a tempo continuo: sistemi SISO e MIMO, strettamente propri e no, lineari e non lineari.

Movimento ed equilibrio

Assegnata una condizione iniziale all'istante k_0 ed un ingresso a partire da k_0, definiamo **movimento** dello stato la soluzione delle equazioni di stato corredate dalla condizione iniziale assegnata e movimento dell'uscita la conseguente uscita, ricavabile dalla trasformazione d'uscita.

L'**equilibrio** è un particolare movimento costante nel tempo a seguito di un ingresso costante nel tempo.

Per determinare gli stati di equilibrio corrispondenti ad un ingresso $\bar{\boldsymbol{u}}$ si impone che:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{x}(k) = \bar{\boldsymbol{x}}$$

Pertanto gli stati di equilibrio sono le soluzioni dell'equazione implicita:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{u}})$$

Si danno le stesse definizioni, viste a tempo continuo, di movimento stabile, instabile, asintoticamente stabile.

Sistemi lineari

Quando tutte le equazioni del sistema sono lineari nelle variabili di stato e di ingresso, il sistema si definisce **lineare** ed è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned}$$

Gli equilibri si individuano con l'equazione:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}}$$

Se la matrice $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ è invertibile, ossia se $\boldsymbol{A}$ non ha autovalori in s=1, esiste un solo stato di equilibrio, dato dall'espressione:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}}$$

Inoltre risulta:

$$\bar{\boldsymbol{y}} = \mu\bar{\boldsymbol{u}}$$

con:

$\mu = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$ **guadagno statico** del sistema

Esempio: sistema economico (1/2)

Consideriamo un sistema economico in cui definiamo le variabili:
y(*k*): reddito nazionale nell'anno *k*
c(*k*): consumi nell'anno *k*
i(*k*): investimenti privati nell'anno *k*
u(*k*): spesa pubblica nell'anno *k*

Il sistema può essere descritto dalle equazioni:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= c(k) + i(k) + u(k) \\
c(k) &= \alpha y(k-1) \\
i(k) &= \beta\left(c(k) - c(k-1)\right)
\end{aligned}
$$

Possiamo rappresentare queste equazioni in termini di sistema dinamico, introducendo le variabili di stato:

$$
\begin{aligned}
x_1(k) &= c(k) \\
x_2(k) &= i(k)
\end{aligned}
$$

Esempio: sistema economico (2/2)

Traslando le ultime due equazioni di un passo in avanti, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= c(k+1) = \alpha y(k) = \alpha\left(c(k) + i(k) + u(k)\right) = \\
&= \alpha x_1(k) + \alpha x_2(k) + \alpha u(k) \\
x_2(k+1) &= i(k+1) = \beta\left(c(k+1) - c(k)\right) = \beta\left(\alpha\left(c(k) + i(k) + u(k)\right) - c(k)\right) = \\
&= \beta(\alpha-1)x_1(k) + \beta\alpha x_2(k) + \beta\alpha u(k) \\
y(k) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k)
\end{aligned}
$$

Il sistema è lineare, con matrici:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta(\alpha-1) & \beta\alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta\alpha \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 1
$$

Stabilità nei sistemi lineari

Per i sistemi lineari a tempo discreto valgono considerazioni sulla stabilità del tutto analoghe a quelle fatte a tempo continuo. In particolare quindi la stabilità è una proprietà del sistema (tutti i movimenti sono asintoticamente stabili, stabili o instabili). Inoltre la stabilità si può valutare studiando le soluzioni dell'equazione libera in $\delta\boldsymbol{x}$ (differenza tra movimento perturbato e movimento nominale):

$$\delta\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x}(k)$$

al variare della condizione iniziale $\delta\boldsymbol{x}(0)$. Risulta:

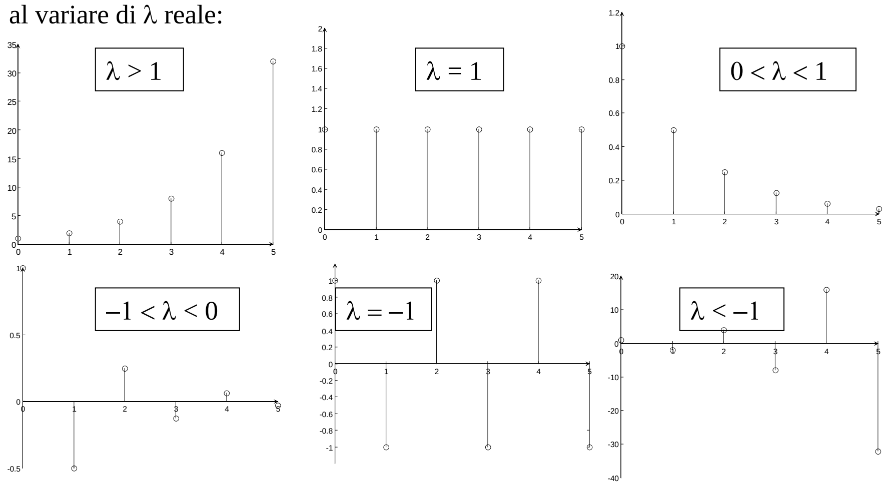
$$\delta\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\delta\boldsymbol{x}(0)$$

e se $\boldsymbol{A}$ è diagonalizzabile, cioè $\exists \boldsymbol{T} : \boldsymbol{TAT}^{-1} = \hat{\boldsymbol{A}} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

$$\delta\boldsymbol{x}(k) = \left(\boldsymbol{T}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}\right)^k \delta\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\hat{\boldsymbol{A}}^k\boldsymbol{T}\delta\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}\boldsymbol{T}\delta\boldsymbol{x}(0)$$

Modi

Le componenti del moto libero del sistema sono quindi combinazioni lineari degli esponenziali degli autovalori. Di seguito sono riportati gli andamenti di λ^k al variare di λ reale:



Criterio degli autovalori

Naturalmente, accanto ad un autovalore complesso $\lambda_i=\rho_i e^{j\vartheta_i}$ ci sarà anche il coniugato e la combinazione dei due termini darà luogo ad un termine reale del tipo $\rho_i^k\cos(\vartheta_i k+\varphi_i)$.
Dall'analisi dei modi del sistema si possono trarre le seguenti conclusioni (valide per matrice $\boldsymbol{A}$ diagonalizzabile).

Un sistema dinamico lineare è:
asintoticamente stabile: se e solo se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ hanno modulo minore di 1;
stabile: se e solo se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ hanno modulo minore o uguale a 1 e ne esistono a modulo uguale a 1;
instabile: se e solo se esistono autovalori di $\boldsymbol{A}$ a modulo maggiore di 1.

Esempio: sistema economico

Torniamo all'esempio economico, in cui:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \beta(\alpha-1) & \beta\alpha\end{bmatrix}$$

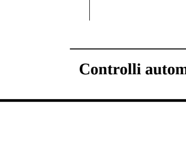
Posto α=0.5, β=1:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-0.5 & -0.5\\ -0.5 & \lambda-0.5\end{vmatrix}=(\lambda-0.5)^2+0.25=\lambda^2-\lambda+0.5$$

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-2}}{2}=\frac{1\pm j}{2}$$



Gli autovalori hanno modulo minore di 1: il sistema è asintoticamente stabile

Approccio nel dominio complesso

Si consideri un sistema lineare:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

Analogamente a quanto fatto a tempo continuo, considereremo una rappresentazione alternativa del sistema, ottenuta introducendo i vettori ***U***(*z*) e ***Y***(*z*), rispettivamente vettori delle trasformate Zeta degli ingressi e delle uscite del sistema dinamico.

$$\begin{tikzcd}
u(k) \arrow[r, "\text{trasformata}"] \arrow[d, bend right, "\textit{eq. alle differenze}"'] & U(z) \arrow[d, bend left, "\textit{eq. algebriche}"] \\
y(k) & Y(z) \arrow[l, "\text{antitrasformata}"]
\end{tikzcd}$$

Vedremo nel seguito alcune nozioni di base sulla trasformata Zeta.

La trasformata Zeta

Si consideri una generica funzione reale *v*(*k*), definita per *k* intero ≥ 0.
La funzione della variabile complessa *z*, definita dalla serie:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k}$$

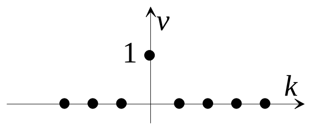
si dice **trasformata Zeta** di *v*.
In generale la serie converge per valori di *z* esterni a un cerchio centrato nell'origine del piano complesso, ma si assume come trasformata la funzione che, nel cocerchio di convergenza della serie, coincide con la serie stessa: in questo modo la trasformata è definita quasi ovunque nel piano complesso.

Esempi

Impulso

Consideriamo l'impulso unitario a tempo discreto (delta di Kronecker):

$$v(k) = \mathrm{imp}(k) = \delta_0(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$



risulta:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k} = v(0) + v(1) z^{-1} + v(2) z^{-2} + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

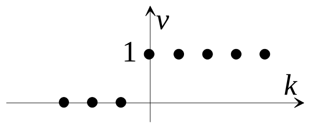
Esponenziale

Consideriamo l'esponenziale a tempo discreto $v(k)=a^k$. Risulta:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{per } \left|az^{-1}\right| < 1 \left(|z| > |a|\right)$$

Per a=1 si ha lo **scalino a tempo discreto**:

$$v(k) = \mathrm{sca}(k) \quad \Rightarrow \quad V(z) = \frac{z}{z-1}$$



Proprietà della trasformata

Linearità

$$v(k) = \alpha v_1(k) + \beta v_2(k) \quad \Rightarrow \quad V(z) = \alpha V_1(z) + \beta V_2(z)$$

Anticipi e ritardi

$$v_2(k) = v_1(k+1) \quad \Rightarrow \quad V_2(z) = z\left(V_1(z) - v_1(0)\right)$$

$$v_2(k) = v_1(k-1) \quad \Rightarrow \quad V_2(z) = z^{-1} V_1(z)$$

Derivazione in *z*

$$v_2(k) = k v_1(k) \quad \Rightarrow \quad V_2(z) = -z \frac{dV_1(z)}{dz}$$

Valore iniziale

$$v(0) = \lim_{z \to \infty} V(z)$$

Valore finale (applicabile se i poli di V sono a modulo < 1 o in z=1)

$$v(\infty) = \lim_{z \to 1} \left[(z-1) V(z)\right]$$

Esempi

Rampa

$$\mathrm{ram}(k) = k, \quad k \geq 0$$

Poiché ram(k) = $k$sca(k), si ha:

$$\mathrm{Z}[\mathrm{ram}(k)] = -z\frac{d}{dz}\mathrm{Z}[\mathrm{sca}(k)] = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Esponenziale

Consideriamo un segnale di trasformata: $V(z) = \dfrac{z}{z-a}$

Dai teoremi del valore iniziale e finale:

$$v(0) = \lim_{z\to\infty} V(z) = 1$$

$$v(\infty) = \lim_{z\to 1}[(z-1)V(z)] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z}{z-a}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a| < 1$$

Ciò è coerente con il fatto che $v(k) = a^k$

Trasformate notevoli

Utilizzando le proprietà della trasformata, si può compilare la seguente tabella di trasformate notevoli:

$v(k)$	$V(z)$
$\mathrm{imp}(k)$	1
$\mathrm{sca}(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\mathrm{ram}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$\mathrm{par}(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
ka^k	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$

par(k) = k(k–1)/2, k≥0

Antitrasformata

Per trasformate Zeta razionali (rapporti di polinomi), si può utilizzare per l'antitrasformata il metodo di **Heaviside**, ossia di scomposizione in frazioni semplici. Di fatto conviene scomporre $V(z)/z$, secondo il seguente schema:

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z - p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{z - p_n}$$

$$V(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{z - p_1} + \cdots + \alpha_n \frac{z}{z - p_n}$$

$$v(k) = \alpha_0 \operatorname{imp}(k) + \alpha_1 p_1^k + \cdots + \alpha_n p_n^k, \quad k \geq 0$$

In alternativa si può usare il metodo della **lunga divisione**, che consiste nel dividere il polinomio a numeratore e quello a denominatore, in modo da trovare i primi campioni dell'antitrasformata:

$$V(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \cdots \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v(0) = \beta_0 \\ v(1) = \beta_1 \\ v(2) = \beta_2 \end{array}$$

Antitrasformata (esempio)

$$V(z) = \frac{3z + 12}{z^2 + 5z + 6}$$

Heaviside

$$\frac{V(z)}{z} = \frac{3z + 12}{z(z+2)(z+3)} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z+2} + \frac{\alpha_2}{z+3} = \frac{\alpha_0 (z+2)(z+3) + \alpha_1 z(z+3) + \alpha_2 z(z+2)}{z(z+2)(z+3)}$$

Valutando il polinomio a numeratore in z=0, z=–2, z=–3, si ottiene:

$$\begin{cases} 6\alpha_0 = 12 \\ -2\alpha_1 = 6 \\ 3\alpha_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} V(z) = 2 - 3\dfrac{z}{z+2} + \dfrac{z}{z+3} \\ v(k) = 2imp(k) - 3(-2)^k + (-3)^k \end{array}$$

Lunga divisione

$$\begin{array}{l|l} 3z + 12 & z^2 + 5z + 6 \\ -3z - 15 - 18z^{-1} & 3z^{-1} - 3z^{-2} - 3z^{-3} \\ \hline -3 - 18z^{-1} & \\ 3 + 15z^{-1} + 18z^{-2} & \\ \hline -3z^{-1} + 18z^{-2} & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v(1) = 3 \\ v(2) = -3 \\ v(3) = -3 \end{array}$$

Funzione di trasferimento

Si consideri un sistema lineare :

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

Applichiamo la trasformata Zeta ad entrambi i membri delle equazioni, supponendo lo stato iniziale nullo ($\boldsymbol{x}(0)=0$):

$$\begin{aligned} z\boldsymbol{X}(z) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z) \\ \boldsymbol{Y}(z) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(z) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{X}(z) &= (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(z) \\ \boldsymbol{Y}(z) &= \left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right]\boldsymbol{U}(z) \end{aligned}$$

Si è ottenuto:

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{U}(z), \quad \boldsymbol{G}(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

La matrice a *p* righe e *m* colonne $\boldsymbol{G}(z)$ prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema e dà la trasformata dell'uscita forzata dall'ingresso.

Funzione di trasferimento: proprietà

La funzione di trasferimento a tempo discreto ha formalmente la stessa espressione di quella a tempo continuo. Pertanto gode delle stesse proprietà:

• La f.d.t. è invariante rispetto a cambiamenti di variabili di stato.
• Nel caso SISO la f.d.t. è rapporto di due polinomi:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

• Le radici del polinomio a numeratore si chiamano **zeri**, le radici del polinomio a denominatore **poli**
• A meno di cancellazioni, i poli coincidono con gli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$

Guadagno

Consideriamo una funzione di trasferimento priva di poli o zeri in z=1.
Definiamo **guadagno** della funzione di trasferimento il valore che assume per z=1:

$$\mu = G(1) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

Il guadagno della funzione di trasferimento coincide quindi con il guadagno statico del sistema, ossia con il rapporto uscita/ingresso all'equilibrio.

Si supponga inoltre il sistema asintoticamente stabile e lo si solleciti con un ingresso a scalino:

$$u(k) = \mathrm{sca}(k) \quad \Rightarrow \quad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

Risulta:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)Y(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)G(z)\frac{z}{z-1}\right] = G(1) = \mu$$

Pertanto il guadagno della funzione di trasferimento è il valore di regime della risposta allo scalino del sistema.

Risposta in frequenza

In un sistema LTI **asintoticamente stabile**, sollecitato dall'ingresso:

$$u(k) = U\sin\left(\bar{\theta}k+\phi\right)$$

esaurito un transitorio iniziale, l'uscita assume l'espressione:

$$y(k) = Y\sin\left(\bar{\theta}k+\psi\right)$$

con:

$$Y = U\left|G\left(e^{j\bar{\theta}}\right)\right|$$

$$\psi = \phi + \angle G\left(e^{j\bar{\theta}}\right)$$

La funzione complessa della variabile reale θ definita da:

$$G\left(e^{j\theta}\right), \quad \theta \in [0,\pi]$$

prende il nome di **risposta in frequenza** del sistema e, come a tempo continuo, determina la risposta del sistema a segnali armonici.
Il suo uso, a tempo discreto, è in qualche misura limitato dalla difficoltà nel tracciamento dei diagrammi di Bode (non esiste un'approssimazione asintotica semplice).

Controllo digitale

Parte II

Controllo digitale

Realizzazione del regolatore

Come è noto, il progetto del regolatore si conclude con la determinazione di una funzione di trasferimento $R(s)$.
Come **realizzare** in pratica il regolatore?

Ci sono due possibilità:

1. Realizzare, in una qualunque tecnologia (elettronica, pneumatica, fluidica) un sistema che presenti la stessa funzione di trasferimento ottenuta dal progetto, ed interfacciarlo con il trasduttore della misura della variabile controllata, da un lato, e con l'attuatore, dall'altro. Questo è il principio che sta alla base dei **sistemi di controllo analogici**.
2. Utilizzare un calcolatore, in particolare un microprocessore, all'interno dell'anello di controllo, per eseguire un algoritmo che elabori le informazioni provenienti dai trasduttori e produca un conseguente comando all'attuatore. Questo è il principio che sta alla base dei **sistemi di controllo digitale.**

Inserimento del calcolatore nell'anello

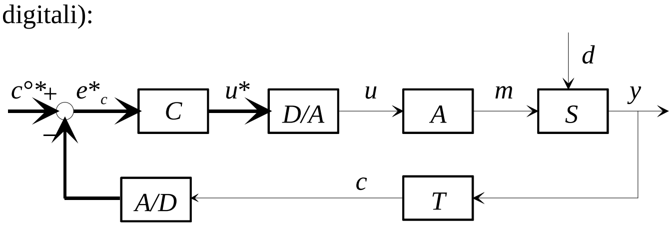
Un calcolatore opera, in istanti di tempo discreti, su variabili rappresentate da numeri con precisione finita (dipendente dal numero di bit), ossia su cosiddetti **segnali digitali**.
Le variabili di ingresso ed uscita del sistema sotto controllo sono invece funzioni del tempo (continuo), sono cioè cosiddetti **segnali analogici**.
Sono segnali analogici anche le misure delle grandezze fornite dai trasduttori, come pure i segnali di comando degli attuatori.
L'inserimento del calcolatore nell'anello di controllo comporta allora l'adozione di dispositivi per la conversione dei segnali analogici in segnali digitali e viceversa.

Tali dispositivi prendono il nome, rispettivamente, di:

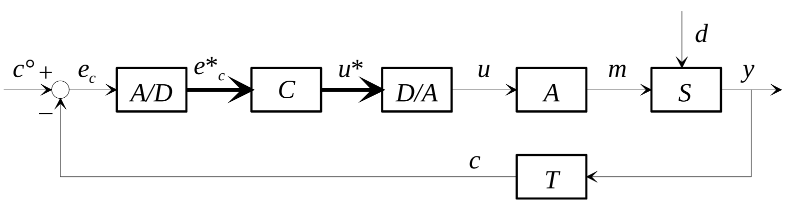
Convertitori A/D (analogico/digitale)
Convertitori D/A (digitale/analogico)

Sistema di controllo digitale

Uno schema di massima di un sistema di controllo digitale è il seguente (dove *C* indica il calcolatore, mentre l'asterisco e la freccia a tratto più spesso distinguono i segnali digitali):

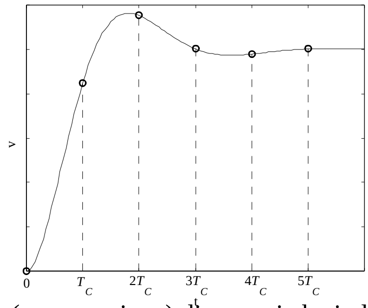


Uno schema alternativo in cui si converte in digitale l'errore è il seguente:



Il campionamento

Si consideri un generico segnale analogico $v(t)$, $t \in \Re$. Si fissi un'origine per l'asse dei tempi e, a partire da tale istante (t=0), si considerino istanti di tempo distanti l'uno dall'altro per un intervallo T_C.
Si valuti quindi il segnale $v(t)$ in corrispondenza di tutti questi istanti:



Si otterrà una sequenza (o successione) di numeri che indichiamo con:

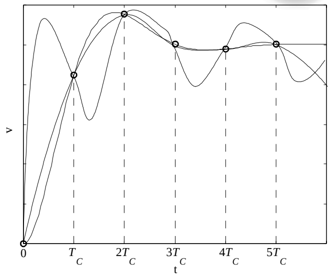
$$v^*(k) = v(kT_C), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Il campionamento: terminologia

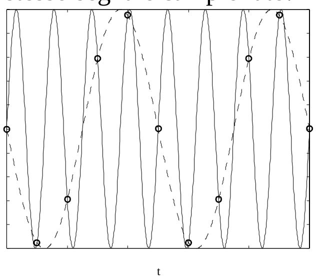
La sequenza di numeri $v^*(k)$ si chiama **segnale campionato**.
L'operazione compiuta prende il nome di **campionamento** del segnale continuo v.
L'intervallo di tempo T_C si dice **periodo** (o **tempo**, o **intervallo**) **di campionamento**.
L'inverso del periodo di campionamento, $f_C=1/T_C$ si chiama **frequenza di campionamento**.
La pulsazione corrispondente $\Omega_C=2\pi/T_C$ si chiama **pulsazione di campionamento**, mentre la pulsazione $\Omega_N=\pi/T_C$ prende il nome di **pulsazione di Nyquist**.

Nella conversione analogico/digitale è anche inevitabile una **quantizzazione** del segnale, cioè la suddivisione dell'insieme dei valori che può assumere il segnale in un numero finito di intervalli, ciascuno associato ad un numero espresso in bit. Nel seguito non ci occuperemo degli effetti della quantizzazione, ritenendo l'insieme in cui varia v^* identico a quello in cui prende valori v.

L'aliasing



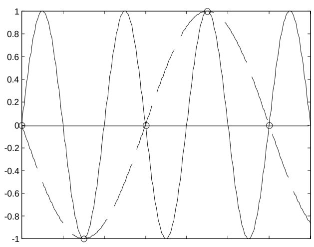
Si intuisce che all'operazione di campionamento è generalmente associata una **perdita di informazione**, rispetto al segnale originario analogico. Non sembra infatti possibile compiere l'operazione inversa, ossia risalire univocamente dal segnale campionato al segnale originario, dal momento che diversi segnali analogici, anche molto differenti tra loro, possono dar luogo allo stesso segnale campionato.



In particolare, campionando un segnale sinusoidale con determinati periodi di campionamento, si può ottenere un segnale campionato che esibisce una **oscillazione di lungo periodo**, del tutto assente nel segnale originario.

Questo fenomeno prende il nome di **aliasing**.

Campionamento di una sinusoide (1/2)



Campioniamo una sinusoide di periodo $\overline{T}$ con periodo di campionamento T_C=3/4$\overline{T}$.
Il segnale campionato mostra un'oscillazione di periodo 3$\overline{T}$, assente nel segnale originario.

E' facile convincersi che per campionare correttamente un segnale sinusoidale occorrono almeno due campioni per periodo. Detto $\overline{T}$ il periodo della sinusoide si avrà quindi:

$$\overline{T} > 2T_C \quad \Rightarrow \quad 2\pi/\overline{T} < \pi/T_c$$

ossia, detta ω=2π/$\overline{T}$ la pulsazione della sinusoide:

$$\boxed{\Omega_N > \overline{\omega}}$$

La pulsazione di Nyquist deve essere superiore alla pulsazione della sinusoide.

Campionamento di una sinusoide (2/2)

Se la pulsazione di Nyquist non è superiore alla pulsazione della sinusoide, si genera un'armonica di "alias" di bassa frequenza, la cui pulsazione è data dalla formula (come si può dimostrare):

$$\omega_{al} = \left|\Omega_C - \overline{\omega}\right|, \quad \text{per } \overline{\omega} < 3\Omega_N$$

Per valori superiori di pulsazione valgono formule analoghe.
Nel caso prima visto:

$$T_C = \frac{3}{4}\overline{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T_C} = \frac{4}{3}\frac{2\pi}{\overline{T}} \quad \Rightarrow \quad \Omega_C = \frac{4}{3}\overline{\omega}$$

Pertanto l'armonica di alias ha pulsazione:

$$\omega_{al} = \Omega_C - \overline{\omega} = \frac{4}{3}\overline{\omega} - \overline{\omega} = \frac{1}{3}\overline{\omega}$$

e quindi periodo 3 volte il periodo della sinusoide originaria (come abbiamo ottenuto graficamente).

Il teorema di Shannon

Un segnale si dice **a banda limitata** se ha trasformata di Fourier nulla, o sostanzialmente nulla, per pulsazioni maggiori di una pulsazione Ω_v. E' chiaro che se tutte le armoniche del segnale hanno pulsazione inferiore alla pulsazione di Nyquist Ω_N, allora non si genera aliasing nel campionamento di alcuna di tali armoniche, e quindi del segnale stesso.

Teorema di Shannon (o del campionamento)
Se il segnale soggetto a campionamento $v(t)$ è a banda limitata con estremo superiore della banda Ω_v inferiore alla pulsazione di Nyquist $\Omega_N = \pi/T_c$:

$$\boxed{\Omega_v < \Omega_N}$$

allora la conoscenza del segnale campionato $v^*(k)$, con periodo di campionamento T_C, consente di ricostruire esattamente il segnale originario $v(t)$, ossia segnale campionato e segnale soggetto al campionamento sono informativamente equivalenti.

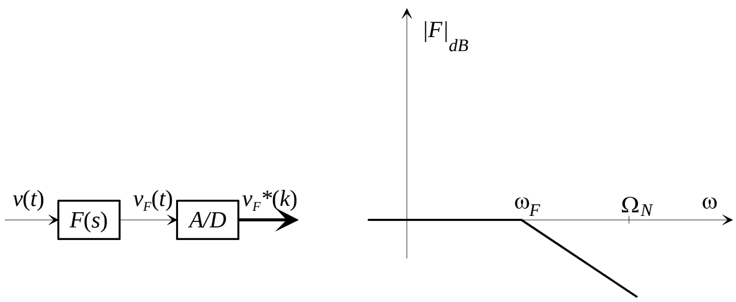
Il decampionatore di Shannon

Se è rispettata la condizione del teorema del campionamento, deve essere possibile ricostruire, a partire dalla sequenza completa dei campioni del segnale campionato $v^*(k)$, il segnale originario $v(t)$ ad ogni istante. La formula che risolve il problema è la **formula di Shannon** (o del **decampionatore** di Shannon):

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[v^*(k) \frac{\sin(\Omega_N t - k\pi)}{\Omega_N t - k\pi} \right]$$

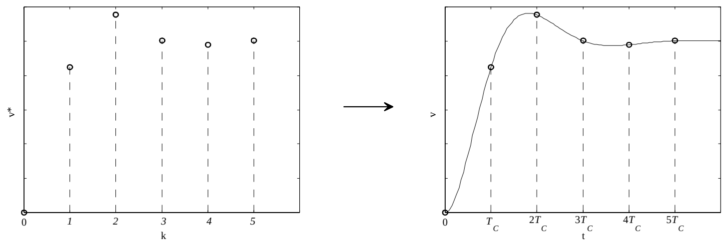
Filtri antialiasing

Scelto il periodo di campionamento del convertitore A/D, è anche possibile forzare il segnale di ingresso al soddisfacimento della condizione del teorema del campionamento, filtrando il segnale stesso con un filtro passabasso. Tale filtro, che va sotto il nome di **filtro antialiasing**, avrà pulsazione di taglio inferiore alla pulsazione di Nyquist, in modo da tagliare le componenti ad alta frequenza del segnale.



Conversione D/A

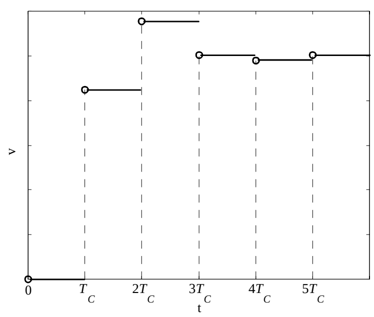
La conversione digitale/analogico consiste nel ricavare da una sequenza di valori $v^*(k)$ cui è associata una base dei tempi, un segnale a tempo continuo, che negli istanti associati ai valori $v^*(k)$, assuma gli stessi valori della sequenza data.



La formula di Shannon risolverebbe il problema generando un segnale a banda limitata: tuttavia non è utilizzabile negli schemi di controllo digitale in quanto **non causale**. Il valore di $v(t)$, a ciascun istante di tempo, dipende infatti da tutti i valori di $v^*(k)$, in particolare anche da quelli associati ad istanti successivi a t.
Il calcolatore impiegato nel controllo digitale, operando in tempo reale, non può disporre che dei valori passati della variabile di controllo da convertire.

Mantenitore di ordine zero (ZOH)

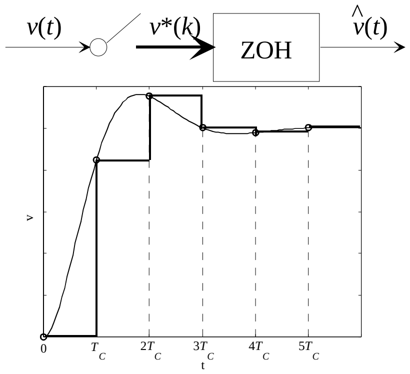
Per risolvere il problema della conversione D/A si usano allora degli **estrapolatori**, ossia dei dispositivi che sulla base di un certo numero di campioni (i più recenti elaborati dal dispositivo di controllo digitale), determinano il valore che dovrà assumere l'uscita del convertitore fino al successivo campione.
In particolare la soluzione più comunemente utilizzata consiste semplicemente nel mantenere costante l'ultimo campione in tutto l'intervallo di campionamento



Il dispositivo che realizza questa operazione si chiama **Mantenitore di ordine zero** o **ZOH** (**Z**ero **O**rder **H**old).

Ritardo intrinseco di conversione

Consideriamo la sequenza di un campionatore ed uno ZOH:



Si osservi che l'operazione introduce un certo ritardo. Tale ritardo è quantificabile in circa metà del periodo di campionamento, $\tau = T_C/2$, e prende il nome di **ritardo intrinseco di conversione**.

Regolatore digitale

Il regolatore digitale elabora in linea la sequenza di valori ottenuti dal campionamento dell'errore e produce la sequenza di valori da attribuire alla variabile di controllo:

$$\xrightarrow{e^*(k)} \boxed{C} \xrightarrow{u^*(k)}$$

Di norma è costituito da un sistema dinamico e può implementare un algoritmo arbitrariamente complesso.
Noi ci limiteremo a regolatori descrivibili per mezzo di **sistemi dinamici a tempo discreto lineari tempo invarianti**:

$$R(z) = \frac{U^*(z)}{E^*(z)}$$

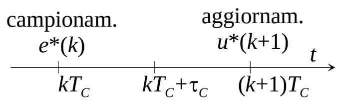
Il problema consisterà nel determinare $R(z)$.

Temporizzazione

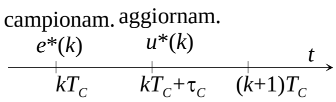
Supporremo campionatore e mantenitore **sincroni** e **in fase** (cioè operanti con lo stesso periodo e con la stessa origine dei tempi). Tuttavia sono presenti ritardi nelle operazioni di conversione e soprattutto nell'elaborazione da parte del processore: chiamiamo τ_c la somma di questi ritardi. Naturalmente deve essere $\tau_c < T_C$.

Abbiamo due possibilità:

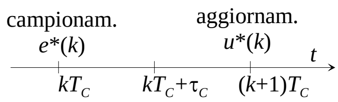
$R(z)$ **strettamente proprio** ($u^*(k)$ non dipende da $e^*(k)$)



$R(z)$ **proprio non strettamente** ($u^*(k)$ dipende da $e^*(k)$)



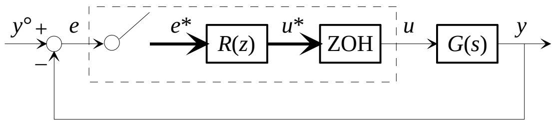
oppure



Punti di vista analogico e digitale

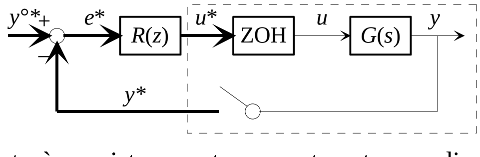
Nell'analisi di un sistema di controllo digitale si adottano due punti di vista:

Punto di vista analogico



La parte tratteggiata è un sistema esternamente a tempo continuo: dato un regolatore analogico si cercherà di realizzarlo in tecnologia digitale.

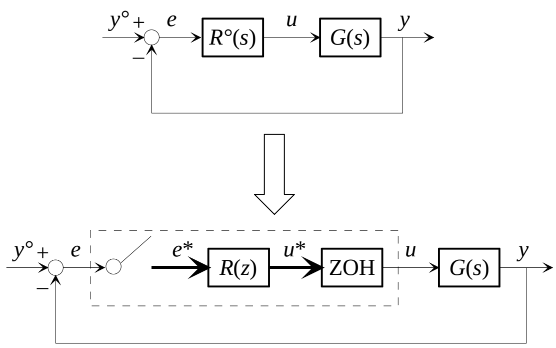
Punto di vista digitale



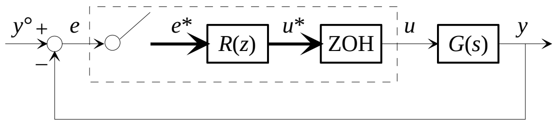
La parte tratteggiata è un sistema esternamente a tempo discreto: si progetterà il regolatore direttamente con la teoria dei sistemi a tempo discreto.

Realizzazione digitale di un controllore analogico

Supponiamo di avere già progettato un controllore analogico $R°(s)$ e di volerlo realizzare mediante un regolatore a tempo discreto $R(z)$ con un tempo di campionamento T_C.



Scelta del periodo di campionamento

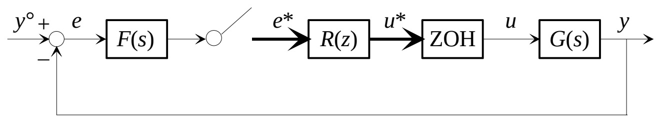


E' noto che in un sistema di controllo le componenti armoniche significative dei segnali risiedono nella banda passante del sistema di controllo, il cui estremo superiore è di norma ben approssimato dalla pulsazione critica ω_c . Per rispettare la condizione del teorema di Shannon nel campionamento dell'errore e occorrerà allora che la pulsazione critica sia decisamente inferiore alla pulsazione di Nyquist:

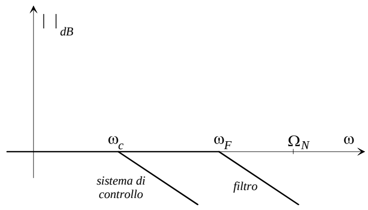
$$\boxed{\omega_c << \Omega_N}$$

Un buon criterio è che le due pulsazioni siano separate da una decade (Ω_N=10ω_c).

Filtraggio antialiasing



In presenza di disturbi con componenti armoniche di alta frequenza o di componenti in alta frequenza del segnale di riferimento (che non interessa riprodurre in uscita) è opportuno anteporre al convertitore A/D un **filtro antialiasing**. La pulsazione di taglio del filtro dovrà essere superiore a ω_c (per non tagliare componenti armoniche significative del segnale da campionare) ma inferiore a Ω_N (per rispettare la condizione del teorema del campionamento):



Eccedenza di margine di fase

Si osservi che il fatto stesso di realizzare il regolatore in tecnologia digitale con campionatori e mantenitori introduce il **ritardo intrinseco di conversione** (pari a metà del periodo di campionamento). Poi ci sono i ritardi di elaborazione, di conversione e lo sfasamento introdotto dall'eventuale filtro antialiasing.

E' bene quindi che il regolatore $R°(s)$ progettato a tempo continuo sia dotato di **un'eccedenza di margine di fase** tale da coprire gli sfasamenti introdotti dalla realizzazione digitale.

Se per esempio Ω_N=10ω_c, tenendo conto del solo ritardo intrinseco di conversione, si deve prevedere la seguente eccedenza di margine di fase:

$$\Delta\varphi_m = \frac{T_C}{2}\omega_c\frac{180°}{\pi} = 90°\frac{\omega_c}{\Omega_N} = 9°$$

Discretizzazione della legge di controllo

Per quanto riguarda la scelta di $R(z)$ occorre fare in modo cha la serie di campionatore, sistema di funzione di trasferimento $R(z)$ e ZOH si comporti agli effetti esterni come $R°(s)$.
Si ricordi che la funzione di trasferimento non è altro che un formalismo comodo per rappresentare un sistema di equazioni differenziali lineari: ne consegue che i metodi noti per **l'integrazione numerica** delle equazioni differenziali possono tornare utili anche per la soluzione del nostro problema.

Consideriamo un semplice integratore a tempo continuo:

$$\xrightarrow{u} \boxed{1/s} \xrightarrow{y} \qquad \dot{y}(t) = u(t)$$

Detti $u^*(k)=u(kT)$ e $y^*(k)=y(kT)$, con T intervallo di integrazione, risulta:

$$y^*(k) = y^*(k-1) + u_m(k)T$$

Dove $u_m(k)$ è il valor medio di u nell'intervallo di integrazione.

Trasformazione bilineare

Approssimiamo u_m con una combinazione lineare convessa dei valori assunti da u agli estremi dell'intervallo di integrazione:

$$y^*(k) = y^*(k-1) + T\left[(1-\alpha)u^*(k-1) + \alpha u^*(k)\right], \quad \alpha \in [0,1]$$

Applichiamo la trasformata Zeta:

$$Y^*(z) = z^{-1}Y^*(z) + T\left[(1-\alpha)z^{-1} + \alpha\right]U^*(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = T\,\frac{(1-\alpha)+\alpha z}{z-1}$$

Da queste considerazioni discende un metodo per ricavare $R(z)$ a partire da $R°(s)$, e cioè sostituire a s l'espressione:

$$s = \frac{1}{T}\frac{z-1}{\alpha z + (1-\alpha)} \qquad \textbf{Trasformazione bilineare}$$

Pertanto:

$$\boxed{R(z) = R°\left(\frac{1}{T}\frac{z-1}{\alpha z + (1-\alpha)}\right)}$$

Trasformazioni di Eulero e di Tustin

La trasformazione bilineare si specializza nelle seguenti:

$\alpha = 0 \quad s = \dfrac{z-1}{T}$ Eulero in avanti (o Eulero esplicito)

$\alpha = 1 \quad s = \dfrac{z-1}{Tz}$ Eulero in avanti (o Eulero implicito)

$\alpha = \dfrac{1}{2} \quad s = \dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}$ Trapezi o Tustin

La trasformazione di Eulero esplicita può dar luogo a un sistema a tempo discreto instabile se non si sceglie un tempo di campionamento sufficientemente piccolo.

Algoritmo PI digitale (1/2)

Consideriamo un regolatore PI analogico:

$$R^\circ(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{sT_I}\right)$$

Utilizzando la trasformazione di Tustin:

$$R(z) = R^\circ\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) = k_p\left(1 + \frac{T}{2T_I}\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{k_p}{2T_I}\left(\frac{(2T_I + T)z + T - 2T_I}{z-1}\right) =$$

$$= \Gamma_p\frac{z-b}{z-1}$$

con: $\Gamma_p = k_p\left(1 + \dfrac{T}{2T_I}\right), \quad b = \dfrac{2T_I - T}{2T_I + T}$

Pertanto:

$$\frac{U^*(z)}{E^*(z)} = \Gamma_p\frac{z-b}{z-1} = \Gamma_p\frac{1-bz^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \left(1 - z^{-1}\right)U^*(z) = \Gamma_p\left(1 - bz^{-1}\right)E^*(z)$$

Algoritmo PI digitale (2/2)

Passando nel dominio del tempo:

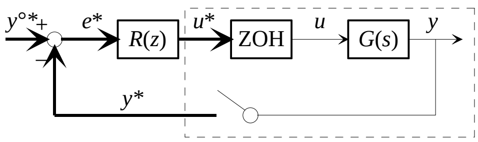
$$u^*(k) = u^*(k-1) + \Gamma_p e^*(k) - \Gamma_p b e^*(k-1)$$

Questa equazione alle differenza può essere tradotta in un **programma di calcolo**, da eseguire ad ogni istante di campionamento:

```
input yref, y
e = yref-y;
u = u + Gammap*e-Gammap*b*eold;
eold = e;
```


Sistema a segnali campionati

Il punto di vista digitale nell'analisi di un sistema di controllo digitale induce a considerare il sistema esternamente a tempo discreto costituito dalla serie di uno ZOH, di un sistema a tempo continuo e di un campionatore:



E' possibile dimostrare che se (***A***, ***B***, ***C***, ***D***) è una realizzazione in variabili di stato del sistema di funzione di trasferimento $G(s)$, il sistema a tempo discreto di ingresso u^* ed uscita y^* ha come realizzazione (***A****, ***B****, ***C****, ***D****), con:

$$\boldsymbol{A}^* = e^{\boldsymbol{A}T}, \quad \boldsymbol{B}^* = \int_0^T e^{\boldsymbol{A}\sigma}\boldsymbol{B}d\sigma,$$

$$\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D}$$

Trasformazione di campionamento

Dalla relazione:

$$\boldsymbol{A}^* = e^{\boldsymbol{A}T}$$

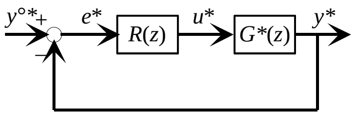
Segue che il legame tra un autovalore del sistema a tempo continuo ed il corrispondente autovalore del sistema a tempo discreto è il seguente:

$$z = e^{sT}$$

Questa trasformazione prende il nome di **trasformazione di campionamento** ed ha un ruolo importante nell'analisi dei sistemi a segnali campionati, in quanto spiega come i modi del sistema a tempo continuo si trasformano a seguito della discretizzazione.

Progetto a tempo discreto del regolatore

Per il progetto del regolatore si può a questo punto fare riferimento a questo sistema interamente a tempo discreto:



Dove $G^*(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema a segnali campionati prima discussa.

A questo punto il regolatore si progetta con la **teoria dei sistemi a tempo discreto**. Valgono ancora il criterio di Nyquist ed è applicabile il metodo del luogo delle radici.
A tempo discreto sono anche molto usati metodi di progetto che assegnano direttamente, seguendo opportune regole, la funzione di trasferimento ad anello chiuso e da questa ricavano la funzione di trasferimento del regolatore (**metodo di Ragazzini**).