Soluzioni Rocco

1.1

Detta x_1 la posizione della massa e x_2 la sua velocità, si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{M}x_1 + \dfrac{1}{M}u \end{cases}$$

$$y = x_2$$

Trasformando secondo Laplace, a stato iniziale nullo, le equazioni:

$$\begin{cases} sX_1 = X_2 \\ sX_2 = -\dfrac{K}{M}X_1 + \dfrac{1}{M}U \end{cases}$$

$$Y = X_2$$

Eliminando X_1 e X_2, si ottiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{Ms^2 + K}$$

1.2

Poiché i poli della funzione di trasferimento sono immaginari puri ($s = \pm j\sqrt{K/M}$) e semplici il sistema è semplicemente stabile.

1.3

Essendo $G(0)=0$, il guadagno statico è nullo. Ciò è coerente con il fatto che all’equilibrio il corpo è fermo, ossia la velocità è nulla.

1.4

Risulta:

$$\omega_n = \sqrt{K/M},$$

e:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \pi.$$

Pertanto:

$$\omega_n = \sqrt{K/M} = \sqrt{K/2} = 2$$

da cui:

$K=8$.

Esercizio 2

2.1

La funzione di trasferimento è del tipo:

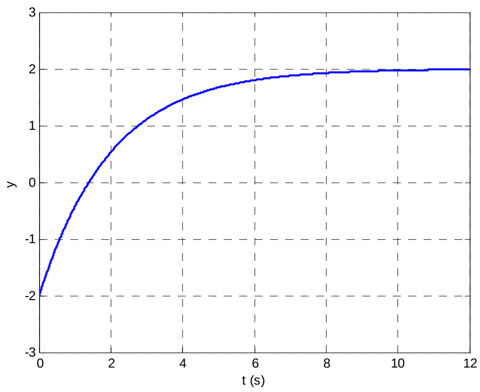
$$G(s) = \mu \frac{1+s\tau}{1+sT}$$

con $\mu = 2$, $\tau = -2$, $T = 2$.

La risposta allo scalino parte dal valore iniziale:

$$\mu \frac{\tau}{T} = -2 \,,$$

e, con costante di tempo T, tende al valore di regime μ:



2.2

Si può applicare il metodo di Heaviside:

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{2-4s}{1+2s} = \frac{1}{s}\frac{1-2s}{s+0.5} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+0.5} = \frac{\alpha_1(s+0.5)+\alpha_2 s}{s(s+0.5)} \,.$$

Valutando il polinomio a numeratore in corrispondenza dei poli di $Y(s)$, si ottiene il sistema:

$$\begin{matrix}(s=0)\\(s=-0.5)\end{matrix}\begin{cases} 0.5\alpha_1 = 1 \\ -0.5\alpha_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$$

Antitrasformando:

$$y(t) = 2 - 4e^{-0.5t}, \quad t \geq 0.$$

2.3

Risulta:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty}[sY(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[s\tilde{G}(s)\frac{1}{s}\right] = \lim_{s\to\infty}\tilde{G}(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{2-4s}{(1+2s)^2} = 0 \,.$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty}\left[s^2Y(s)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[s^2\tilde{G}(s)\frac{1}{s}\right] = \lim_{s\to\infty}\left[s\tilde{G}(s)\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{2s-4s^2}{(1+2s)^2} = -1 \,.$$

Pertanto la risposta parte da 0 con tangente negativa.

Esercizio 3

3.1

Lo stato di equilibrio si ricava dalle equazioni:

$$\begin{cases} -\sqrt{\bar{x}_1}\,\bar{x}_2 + \bar{u}^3 = 0 \\ -\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1\bar{u}^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{\bar{x}_1}\,\bar{x}_1\bar{u}^2 + \bar{u}^3 = 0 \\ \bar{x}_2 = 2\bar{x}_1\bar{u}^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 4\bar{x}_1^3 = \bar{u}^2 = 4 \quad \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = 8 \end{cases}.$$

3.2

Linearizzando il sistema si ha:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\dfrac{\bar{x}_2}{2\sqrt{\bar{x}_1}}\delta x_1 - \sqrt{\bar{x}_1}\,\delta x_2 + 3\bar{u}^2\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 2\bar{u}^2\delta x_1 - \delta x_2 + 4\bar{x}_1\bar{u}\,\delta u \end{cases}$$
$$\delta y = \delta x_2$$

Nel punto di equilibrio prima ricavato si ottiene:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -4\delta x_1 - \delta x_2 + 12\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 8\delta x_1 - \delta x_2 + 8\delta u \end{cases}$$
$$\delta y = \delta x_2$$

3.3

La matrice $\boldsymbol{A}$ del sistema è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico assume quindi l'espressione:

$$\chi_A(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} s+4 & 1 \\ -8 & s+1 \end{vmatrix} = (s+4)(s+1) + 8 = s^2 + 5s + 12$$

Tutti gli autovalori della matrice sono a parte reale negativa e il sistema è asintoticamente stabile.