Soluzioni Rocco

1.1

Detta x_1 la corrente nel primo induttore, x_2 la corrente nel secondo induttore e x_3 la tensione ai capi del condensatore, si ha:

$$\begin{cases} u = L\dot{x}_1 + Rx_1 + x_3 \\ x_1 = x_2 + C\dot{x}_3 \\ L\dot{x}_2 = x_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{L}x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{C}x_2 \end{cases}$$

$$y = x_3$$

1.2

Con i valori numerici dati:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 \end{cases} .$$

$$y = x_3$$

Pertanto:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e:

$$G(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s & -1 \\ -1 & 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \ldots = \frac{s}{s^3 + s^2 + 2s + 1} .$$

1.3

Poiché $G(0)=0$, il guadagno statico è nullo. Questo è coerente con il fatto che all'equilibrio la caduta di tensione sugli induttori, ed in particolare sul secondo induttore, è nulla, per cui è nulla anche la caduta di tensione sul condensatore.

1.4

Risulta:

$$y(0) = \lim_{s \to \infty}[sY(s)] = \lim_{s \to \infty}[sG(s)] = \lim_{s \to \infty} \frac{s^2}{s^3 + s^2 + 2s + 1} = 0 .$$

Esercizio 2

2.1

Il moto libero è la parte del movimento che dipende solo dalla condizione iniziale, il moto forzato è la parte che dipende solo dall'ingresso.

2.2

La funzione di trasferimento è del tipo:

$$G(s) = \mu \frac{1+s\tau}{1+sT}$$

Dal valore di regime della risposta si deduce che μ = 2, dalla durata del transitorio T = 1, dal valore iniziale della risposta si ha:

$$\mu \frac{\tau}{T} = 6 \quad \Rightarrow \quad \tau = 3\,.$$

Pertanto:

$$G(s) = 2\frac{1+3s}{1+s}$$

2.3

Ricavando la funzione di trasferimento in termini dei parametri *a*, *b*, *c*, *d* si ottiene:

$$G(s) = \frac{cb}{s-a} + d = \frac{sd + cb - ad}{s-a}$$

Per confronto con l'espressione ricavata al punto precedente si ottiene:

$$\begin{cases} a = -1 \\ d = 6 \\ cb - ad = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -1 \\ d = 6 \\ cb = -4 \end{cases}$$

Preso ad esempio *b*=1 si avrà *c*=–4.

2.4

Moto libero:

$$y_l(t) = ce^{at}x_0 = -4e^{-t}x_0$$

Moto forzato:

$$y_f(t) = c\int_0^t e^{a(t-\sigma)}bu(\sigma)d\sigma + du(t) = -4\int_0^t e^{-(t-\sigma)}u(\sigma)d\sigma + 6u(t)$$

Esercizio 3

3.1

Gli stati di equilibrio (valori di *x* che annullano la derivata) si ricavano dalle equazioni:

$$\begin{cases} -\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_1^3 - \bar{x}_2 = 0 \end{cases}.$$

Le soluzioni del sistema con $\bar{u} = 1$ sono:

$$\begin{aligned} &A) \quad \bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_2 = 1 \\ &B) \quad \bar{x}_1 = -1,\ \bar{x}_2 = -1 \end{aligned}.$$

3.2

Linearizzando il sistema si ha:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\bar{x}_2\delta x_1 - \bar{x}_1\delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 3\bar{x}_1^2\delta x_1 - \delta x_2 \end{cases}$$
$$\delta y = \delta x_2$$

Nel punto di equilibrio A risulta:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 3\delta x_1 - \delta x_2 \end{cases}$$
$$\delta y = \delta x_2$$

nel punto di equilibrio B:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = 3\delta x_1 - \delta x_2 \end{cases}$$
$$\delta y = \delta x_2$$

3.3

La matrice $\boldsymbol{A}$ del sistema è:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \\ 3\bar{x}_1^2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico vale quindi:

$$\chi_A(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} s + \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ -3\bar{x}_1^2 & s+1 \end{vmatrix} = (s + \bar{x}_2)(s+1) + 3\bar{x}_1^3 = s^2 + (1 + \bar{x}_2)s + \bar{x}_2 + 3\bar{x}_1^3$$

Nel punto di equilibrio A risulta:

$$\chi_A(s) = s^2 + 2s + 4$$

ed il sistema è asintoticamente stabile.

Nel punto di equilibrio B:

$$\chi_A(s) = s^2 - 4$$

ed il sistema è instabile.