Soluzioni Rocco

1.1

Detta x_1 la corrente nell'induttore e x_2 la tensione ai capi del condensatore, si ha:

$$\begin{cases} u = R(x_1 + C\dot{x}_2) + x_2 \\ L\dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{RC}x_2 + \dfrac{1}{RC}u \end{cases}$$

$$y = x_2$$

1.2

Funzione di trasferimento:

$$\begin{cases} sX_1 = \dfrac{1}{L}X_2 \\ sX_2 = -\dfrac{1}{C}X_1 - \dfrac{1}{RC}X_2 + \dfrac{1}{RC}U \end{cases} \Rightarrow \quad sX_2 = -\frac{1}{LCs}X_2 - \frac{1}{RC}X_2 + \frac{1}{RC}U$$

$$Y = X_2$$

Pertanto:

$$G(s) = \frac{Ls}{RLCs^2 + Ls + R}.$$

Avendo uno zero nell'origine, la funzione di trasferimento ha tipo −1.

1.3

Dividendo il denominatore per *RLC*:

$$G(s) = \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} = \frac{L}{R}s\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} = \mu s\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Pertanto:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1$$

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_n}\frac{1}{RC} = \frac{1}{10} = 0.1$$

1.4

La trasformata della risposta alla rampa è:

$$Y(s) = \mu s\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s^2} = \widetilde{G}(s)\frac{1}{s},$$

con:

$$\widetilde{G}(s) = \mu\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Pertanto la risposta di G alla rampa coincide con la risposta di $\widetilde{G}$ allo scalino, che è nota dalla teoria (tenendo conto che il guadagno $\mu = L/R = 0.2$).

Esercizio 2

2.1

Tempo di salita: è il tempo impiegato dalla risposta per passare dal 10% al 90% del valore di regime.

2.2

Sovraelongazione percentuale massima: è l'escursione massima della risposta rispetto al valore di regime, rapportata in percentuale al valore di regime stesso.

2.3

L'espressione analitica della risposta allo scalino è:

$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-t/T}\right).$$

Ricaviamo gli istanti in cui la risposta raggiunge il 10% e il 90% del valore di regime:

$$\mu\left(1 - e^{-T_1/T}\right) = 0.1\mu \quad \Rightarrow \quad e^{-T_1/T} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad T_1 = -T\log(0.9)$$

$$\mu\left(1 - e^{-T_2/T}\right) = 0.9\mu \quad \Rightarrow \quad e^{-T_2/T} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad T_2 = -T\log(0.1)$$

Facendo la differenza, si ottiene il tempo di salita:

$$T_s = T_2 - T_1 = -T\log(0.1) + T\log(0.9) = T\log(9) \approx 2.2T$$

La sovraelongazione è nulla, essendo la risposta monotona.

2.4

La risposta presenta sovraelongazione se lo zero è nel semipiano sinistro, più vicino dei due poli all'origine, ossia se:

$$\tau > T_1 \geq T_2$$

Esercizio 3

3.1

Gli stati di equilibrio (valori di x che annullano la derivata) si ricavano dalle equazioni:

$$\begin{cases} -\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2 = 0 \\ -\bar{x}_1^{\,2}\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \end{cases}.$$

L'unica soluzione del sistema con $\bar{u} = 1$ è $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 1$.

3.2

Linearizzando il sistema si ha:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\bar{x}_2\delta x_1 - \bar{x}_1\delta x_2 + \delta x_2 = -\delta x_1 \\ \delta\dot{x}_2 = -2\bar{x}_1\bar{x}_2\delta x_1 - \bar{x}_1^{\,2}\delta x_2 + \delta u = -2\delta x_1 - \delta x_2 + \delta u \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_2$$

3.3

La matrice $\boldsymbol{A}$ del sistema è:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico vale quindi:

$$\chi_A(s) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)^2$$

e gli autovalori sono:

$$s_1 = s_2 = -1 .$$

Pertanto il sistema è asintoticamente stabile.

3.4

Risulta:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = 0 .$$

Il guadagno statico vale quindi:

$$-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = 1 .$$