Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Preso uno stato iniziale perturbato $\boldsymbol{x}_{0p}$, sia $\boldsymbol{x}_p(t)$ il movimento che origina (per t=0) da $\boldsymbol{x}_{0p}$ con ingresso $\bar{\boldsymbol{u}}$. Lo stato di equilibrio $\bar{\boldsymbol{x}}$ si dice stabile se preso un qualunque ε>0, esiste in corrispondenza un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che, per tutti gli $\boldsymbol{x}_{0p}$ per i quali:

$$\left\|\boldsymbol{x}_{0p} - \bar{\boldsymbol{x}}\right\| < \delta_\varepsilon,$$

risulti:

$$\left\|\boldsymbol{x}_p(t) - \bar{\boldsymbol{x}}\right\| < \varepsilon,\ \forall t \geq 0.$$

1.2

Sia $\boldsymbol{A} = \left.\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}}}$ la matrice dinamica del sistema linearizzato.

Se tutti gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ hanno parte reale negativa, lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

Se almeno un autovalore di $\boldsymbol{A}$ ha parte reale positiva, lo stato di equilibrio è instabile.

1.3

Il sistema è di ordine due: detta x_1 la corrente nell'induttore (da sinistra verso destra) e $x_2 = v$ la caduta di tensione sul condensatore, gli equilibri di tensione e corrente comportano:

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 + x_2 = u \\ C\dot{x}_2 + x_2^3 = x_1 \end{cases} \quad y = x_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{C}x_2^3 \end{cases} \quad y = x_2$$

1.4

Annullando le derivate, si trova l'unico stato di equilibrio:

$$\begin{cases} -\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2{}^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 27 \\ \bar{x}_2 = \bar{u} = 3 \end{cases}.$$

Si linearizza il sistema nell'intorno del punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\dfrac{1}{L}\delta x_2 + \dfrac{1}{L}\delta u \\ \delta\dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}\delta x_1 - \dfrac{1}{C}3\bar{x}_2^2\delta x_2 = \dfrac{1}{C}\delta x_1 - \dfrac{27}{C}\delta x_2 \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_2$$

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è la seguente:

$$\frac{\delta y}{\delta u} = \frac{1}{LCs^2 + 27sL + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + 27/C\,s + 1/LC} = \mu\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

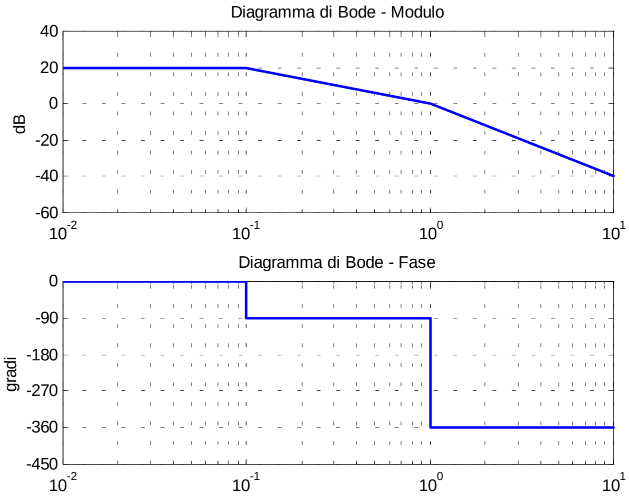
Poiché il tempo di assestamento è, almeno approssimativamente, inversamente proporzionale a $\zeta\omega_n$, che vale $27/(2C)$, il tempo di assestamento dipende da C, non da L.

Esercizio 2

2.1

$$G(s) = 10\frac{1-s}{(1+s)^2(1+10s)}$$

Diagrammi di Bode asintotici:



2.2

Per l'applicazione del teorema della risposta in frequenza, consentita essendo il sistema asintoticamente stabile, occorre valutare il numero complesso:

$$G(j) = 10\frac{1-j}{(1+j)^2(1+10j)}$$

Risulta:

$$|G(10j)| = 10\frac{|1-j|}{|1+j|^2|1+10j|} = \frac{10}{\sqrt{2}\sqrt{101}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

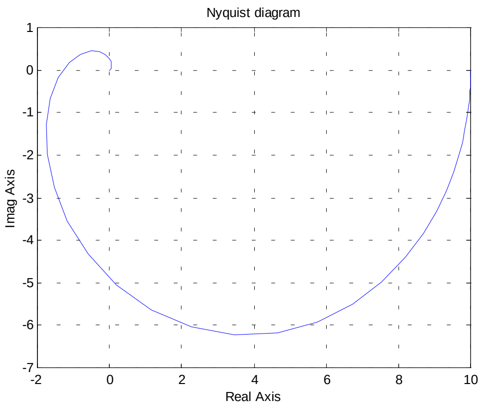
$$\angle G(10j) = \angle(1-j) - 2\angle(1+j) - \angle(1+10j) = -3\frac{\pi}{4} - \mathrm{atan}(10) = -3.83.$$

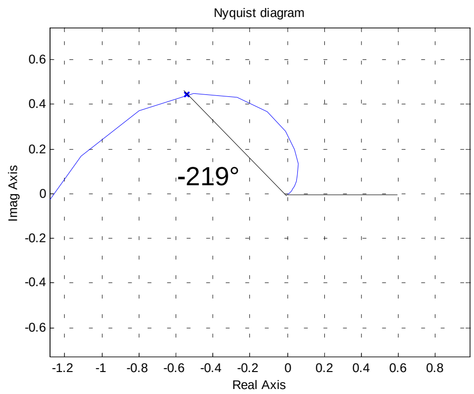
Pertanto, a transitorio esaurito:

$$y(t) = |G(j)|\sin(t + \angle G(j)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t - 3.83)$$

2.3

Il diagramma polare si traccia osservando che il modulo diminuisce monotonicamente a partire dal valore 10, mentre la fase diminuisce dal valore 0 al valore -360°.

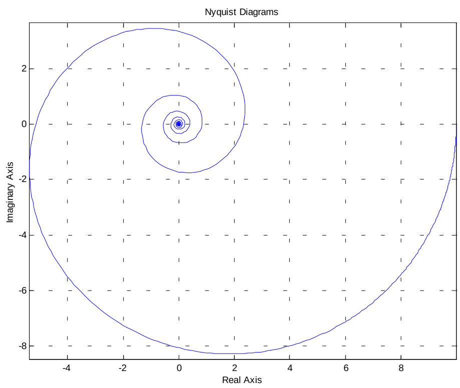




Le coordinate del punto corrispondente alla pulsazione 1 sono già state calcolate al punto precedente, da cui emerge che la fase del punto è -219°. Con questa informazione si può indicare il punto sul diagramma polare precedentemente tracciato.

2.4

Poiché il modulo della risposta in frequenza non cambia mentre alla fase si aggiunge un termine negativo proporzionale ad ω, qualitativamente il diagramma polare cambia come in figura, ossia tende all'origine del piano complesso con una spirale.



Esercizio 3

3.1

Lo schema a blocchi presenta due anelli di retroazione negativa innestati. Elaborando quello più interno si ottiene un sistema di funzione di trasferimento:

$$T(s) = \frac{1}{1+G(s)}.$$

Pertanto:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F(s)T(s)}{1+F(s)T(s)} = \frac{\dfrac{F(s)}{1+G(s)}}{1+\dfrac{F(s)}{1+G(s)}} = \frac{F(s)}{1+G(s)+F(s)}.$$

3.2

Poiché sia *F* che *G* sono chiuse in anelli di retroazione, non è necessario, né sufficiente, che nessuna delle due sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

3.3

Sostituendo le espressioni date di *G* e *F* si ha:

$$H(s) = \frac{\alpha/(s+1)^2}{1+2/s+\alpha/(s+1)^2} = \cdots = \frac{\alpha s}{s^3+4s^2+(5+\alpha)s+2}.$$

Applichiamo il criterio di Routh al denominatore, costruendo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5+\alpha & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ \dfrac{18+4\alpha}{4} & 0 & \\ 2 & & \end{array}$$

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo gli elementi della prima colonna della tabella sono tutti positivi. Si ottiene quindi la condizione:

$$18+4\alpha>0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > -\frac{9}{2}.$$

3.4

Poiché la funzione di trasferimento presenta uno zero in $s = 0$ il tipo vale -1.