

# Soluzioni

## Esercizio 1

### 1.1

Preso uno stato iniziale perturbato  $\mathbf{x}_{0p}$ , sia  $\mathbf{x}_p(t)$  il movimento che origina (per  $t=0$ ) da  $\mathbf{x}_{0p}$  con ingresso  $\bar{u}$ . Lo stato di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  si dice stabile se preso un qualunque  $\varepsilon > 0$ , esiste in corrispondenza un  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che, per tutti gli  $\mathbf{x}_{0p}$  per i quali:

$$\|\mathbf{x}_{0p} - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta_\varepsilon,$$

risulti:

$$\|\mathbf{x}_p(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

### 1.2

Sia  $A = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}}$  la matrice dinamica del sistema linearizzato.

Se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa, lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

Se almeno un autovalore di  $A$  ha parte reale positiva, lo stato di equilibrio è instabile.

### 1.3

Il sistema è di ordine due: detta  $x_1$  la corrente nell'induttore (da sinistra verso destra) e  $x_2 = v$  la caduta di tensione sul condensatore, gli equilibri di tensione e corrente comportano:

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 + x_2 = u \\ C\dot{x}_2 + x_2^3 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{C}x_2^3 \\ y = x_2 \end{cases}$$

### 1.4

Annullando le derivate, si trova l'unico stato di equilibrio:

$$\begin{cases} -\bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = \bar{u} = 1 \end{cases}$$

Si linearizza il sistema nell'intorno del punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = -\frac{1}{L} \delta x_2 + \frac{1}{L} \delta u \\ \delta \dot{x}_2 = \frac{1}{C} \delta x_1 - \frac{1}{C} 3x_2^2 \delta x_2 = \frac{1}{C} \delta x_1 - \frac{3}{C} \delta x_2 \end{cases}$$

$$\delta y = \delta x_2$$

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è la seguente:

$$\frac{\delta y}{\delta u} = \frac{1}{LCs^2 + 3sL + 1} = \frac{1/LC}{s^2 + 3/Cs + 1/LC} = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

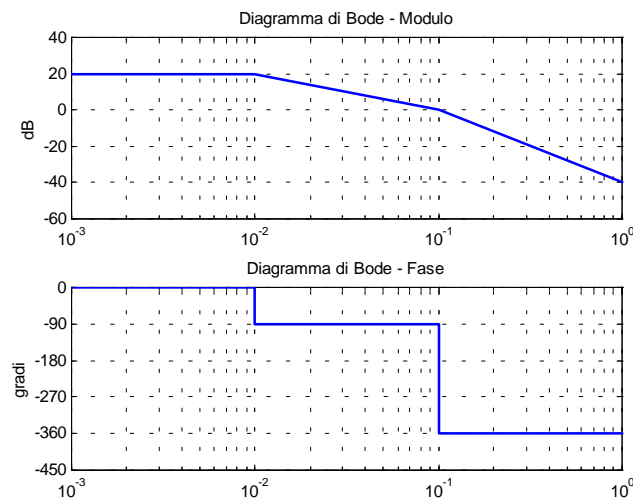
Poiché il tempo di assestamento è, almeno approssimativamente, inversamente proporzionale a  $\zeta\omega_n$ , che vale  $3/(2C)$ , il tempo di assestamento dipende da  $C$  e non da  $L$ .

## Esercizio 2

### 2.1

$$G(s) = 10 \frac{1 - 10s}{(1 + 10s)^2 (1 + 100s)}$$

Diagrammi di Bode asintotici:



### 2.2

Per l'applicazione del teorema della risposta in frequenza, consentita essendo il sistema asintoticamente stabile, occorre valutare il numero complesso:

$$G(10j) = 10 \frac{1 - 10(0.1j)}{(1 + 10(0.1j))^2 (1 + 100(0.1j))} = 10 \frac{1 - j}{(1 + j)^2 (1 + 10j)}$$

Risulta:

$$|G(10j)| = 10 \frac{|1-j|}{|1+j|^2 |1+10j|} = \frac{10}{\sqrt{2}\sqrt{101}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

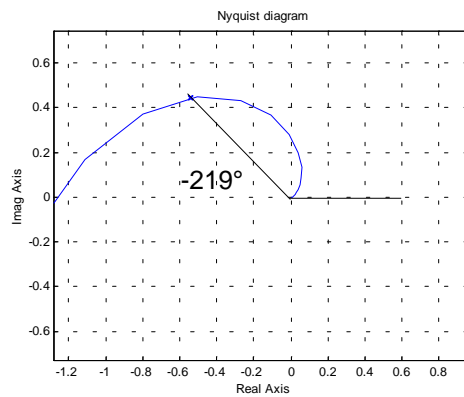
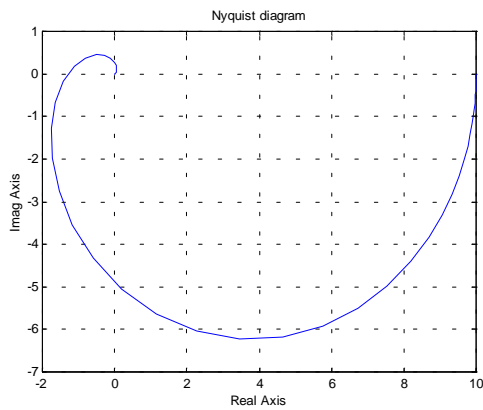
$$\angle G(10j) = \angle(1-j) - 2\angle(1+j) - \angle(1+10j) = -3\frac{\pi}{4} - \text{atan}(10) = -3.83.$$

Pertanto, a transitorio esaurito:

$$y(t) = |G(0.1j)| \sin(0.1t + \angle G(0.1j)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(0.1t - 3.83).$$

### 2.3

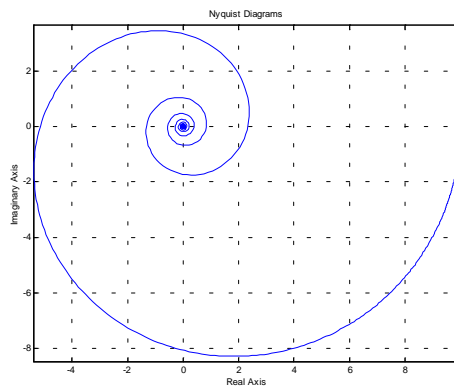
Il diagramma polare si traccia osservando che il modulo diminuisce monotonicamente a partire dal valore 10, mentre la fase diminuisce dal valore 0 al valore  $-360^\circ$ .



Le coordinate del punto corrispondente alla pulsazione 0.1 sono già state calcolate al punto precedente, da cui emerge che la fase del punto è  $-219^\circ$ . Con questa informazione si può indicare il punto sul diagramma polare precedentemente tracciato.

### 2.4

Poiché il modulo della risposta in frequenza non cambia mentre alla fase si aggiunge un termine negativo proporzionale ad  $\omega$ , qualitativamente il diagramma polare cambia come in figura, ossia tende all'origine del piano complesso con una spirale.



### Esercizio 3

#### 3.1

Lo schema a blocchi presenta due anelli di retroazione negativa innestati. Elaborando quello più interno si ottiene un sistema di funzione di trasferimento:

$$T(s) = \frac{1}{1+G(s)}.$$

Pertanto:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{F(s)T(s)}{1+F(s)T(s)} = \frac{\frac{F(s)}{1+G(s)}}{1+\frac{F(s)}{1+G(s)}} = \frac{F(s)}{1+G(s)+F(s)}.$$

#### 3.2

Poiché sia  $F$  che  $G$  sono chiuse in anelli di retroazione, non è necessario, né sufficiente, che nessuna delle due sia asintoticamente stabile perché lo sia il sistema nel suo complesso.

#### 3.3

Sostituendo le espressioni date di  $G$  e  $F$  si ha:

$$H(s) = \frac{\alpha/(s+1)^2}{1+3/s+\alpha/(s+1)^2} = \dots = \frac{\alpha s}{s^3 + 5s^2 + (7+\alpha)s + 3}.$$

Applichiamo il criterio di Routh al denominatore, costruendo la tabella di Routh:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 7+\alpha & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ \hline 32+5\alpha & 0 & \\ \hline 5 & & \\ 3 & & \end{array}$$

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo gli elementi della prima colonna della tabella sono tutti positivi. Si ottiene quindi la condizione:

$$32+5\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > -\frac{32}{5}.$$

#### 3.4

Poiché la funzione di trasferimento presenta uno zero in  $s=0$  il tipo vale  $-1$ .