

Seconda prova scritta intermedia A.A. 2001/02

Soluzioni



Esercizio 1

1.1

Per ottenere errore a transitorio esaurito nullo, in presenza di una variazione a scalino del riferimento, è necessaria una funzione di trasferimento d'anello di tipo uno, e quindi un regolatore di tipo uno. Il guadagno del regolatore è invece arbitrario ai fini del soddisfacimento della specifica statica.

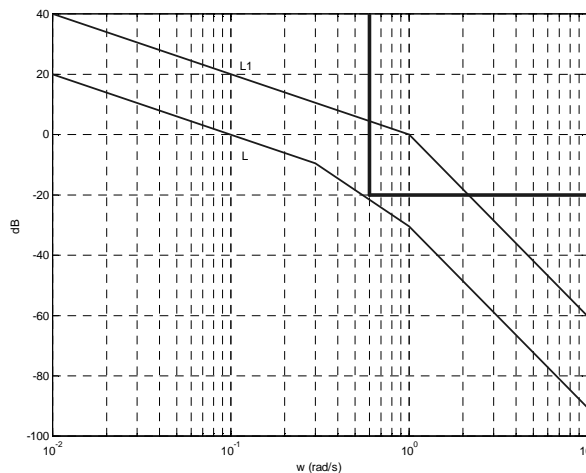
Concludiamo il progetto statico ponendo formalmente:

$$R_1(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1}{s(1+s)^2},$$

Il requisito di attenuazione del disturbo in linea di retroazione comporta, come è noto, un vincolo sul modulo di $L(j\omega)$:

$$|L(j\omega)| \leq \frac{1}{10}, \quad [L(j\omega)]_{dB} \leq -20, \quad \forall \omega > 0.6.$$

Il tracciamento del diagramma del modulo di L_1 evidenzia che occorre procedere a progetto dinamico per soddisfare i requisiti sul margine di fase e sull'attenuazione del disturbo. Per il tracciamento del modulo di L , scegliendo di tagliare alla pulsazione 0.1, conviene mantenere un polo a pulsazione 1 ed aggiungerne un altro alla pulsazione 0.3, per garantire l'attenuazione del disturbo. In bassa frequenza si possono far correre paralleli i diagrammi.



Si ottiene quindi $\omega_c = 0.1$, mentre la fase critica e il margine di fase valgono:

$$\varphi_c = -90^\circ - \text{atan}(0.1/0.3) - \text{atan}(0.1/1) = -90^\circ - 18.4^\circ - 5.7^\circ = -114.1^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - 114.1^\circ = 65.9^\circ$$

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{0.1}{s(1+s/0.3)(1+0.1s)},$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento del regolatore:

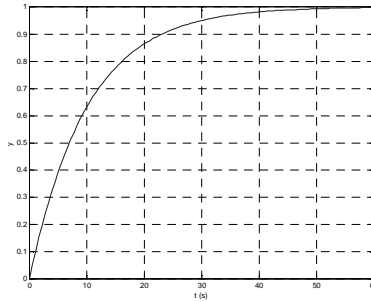
$$R(s) = R_1(s) \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{1}{s} \frac{0.1(1+s)^2}{(1+3.3s)(1+s)} = \frac{0.1}{s} \frac{1+s}{1+3.3s},$$

che è di ordine 2 come richiesto.

1.2

Poiché il margine di fase è elevato, si può approssimare la funzione di trasferimento da y° a y con un sistema del primo ordine a guadagno unitario e costante di tempo pari all'inverso della pulsazione critica:

$$F(s) \approx \frac{1}{1+s/\omega_c} = \frac{1}{1+10s}.$$



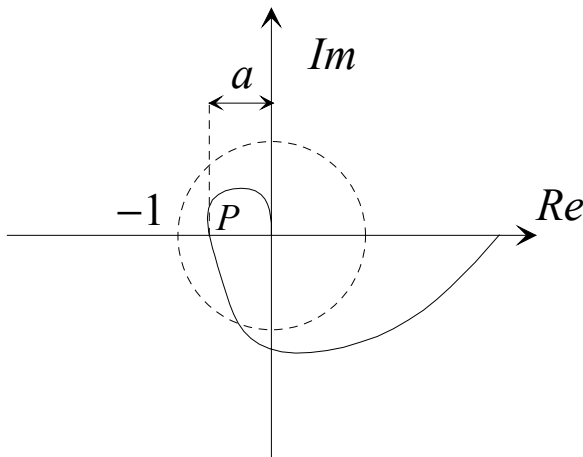
1.3

Dalle tabelle di precisione statica, tenendo conto che $g_L = 1$ e che $y^\circ(t) = sca(t) + 0.02ram(t)$, si ha:

$$e_\infty = 0 + \frac{0.02}{\mu_L} = 0.2.$$

Esercizio 2

2.1



Si supponga che il diagramma polare di L attraversi il semiasse reale negativo in uno e un solo punto.

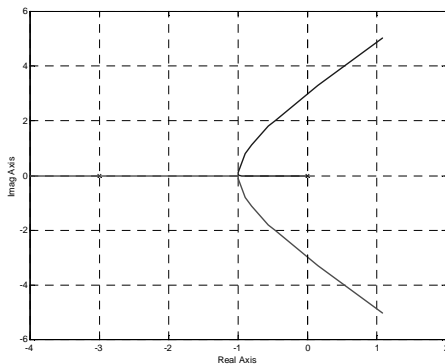
Detta a la distanza del punto P dall'origine, si definisce margine di guadagno la quantità:

$$k_m = \frac{1}{a} = \frac{1}{|L(j\omega_p)|}, \quad \text{con } \angle L(j\omega_p) = -180^\circ.$$

Il margine di guadagno è un indicatore della robustezza della stabilità a fronte di incertezze sul guadagno d'anello: esprime il massimo fattore per cui si può moltiplicare il guadagno d'anello per non incorrere in instabilità

2.2

Tracciamo il luogo delle radici diretto:



Per determinare il valore di $\bar{\rho}$ occorre eseguire la punteggiatura del luogo nel punto $\bar{s} = -5$.

$$\bar{\rho} = 2 \times 2 \times 5 = 20.$$

2.3

Il massimo valore di ρ per l'asintotica stabilità in anello chiuso si ha in corrispondenza del valore di ρ per cui due dei tre rami del luogo entrano nel semipiano destro. Sfruttando la regola di conservazione della somma delle parti reali dei poli, possiamo equivalentemente calcolare il valore di ρ con riferimento al punto -6 (quando due poli hanno parte reale nulla, il terzo ha parte reale -6). Eseguendo la punteggiatura in questo punto:

$$\rho_M = 3 \times 3 \times 6 = 54.$$

Poiché $\bar{\rho}$ è minore di questo valore limite, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.4

Poiché il margine di guadagno è il massimo fattore moltiplicativo ammissibile per il guadagno d'anello, si ha:

$$\gamma_m = \frac{\rho_M}{\bar{\rho}} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10} = 2.7.$$

Esercizio 3

3.1

Dette A^*, B^*, C^*, D^* le matrici del sistema a segnali campionati, risulta:

$$A^* = e^{AT}, \quad B^* = \int_0^T e^{A\eta} B d\eta, \quad C^* = C, \quad D^* = D$$

3.2

Una rappresentazione in variabili di stato del sistema si ha ponendo:

$$A = -p, \quad B = p, \quad C = 1, \quad D = 0.$$

Utilizzando le formule precedenti con $T = 1$, otteniamo:

$$A^* = e^{-p}, \quad B^* = \int_0^1 e^{-p} p d\eta = 1 - e^{-p}, \quad C^* = 1, \quad D^* = 0,$$

e quindi la funzione di trasferimento richiesta:

$$G^*(z) = \frac{C^* B^*}{z - A^*} + D^* = \frac{1 - e^{-p}}{z - e^{-p}}.$$

3.3

Posto $p = -\ln(4)$ si ha:

$$G^*(z) = \frac{1 - e^{\ln(4)}}{z - e^{\ln(4)}} = -\frac{3}{z - 4}.$$

La funzione di trasferimento ha guadagno $G^*(1)$ unitario, tipo nullo (non ha poli o zeri in $z = 1$), ed è instabile, avendo l'unico polo in $z = 4$ (e quindi a modulo maggiore di 1).

3.4

Perché la risposta si esaurisca in tempo finito, tutti i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso di F devono essere nulli, mentre il vincolo di causalità del regolatore impone che il grado relativo di F sia almeno pari a 1 (come G^*). Poniamo quindi:

$$F(z) = \rho \frac{z + a}{z^2}.$$

Imponiamo i vincoli di precisione statica e sull'assenza della cancellazione:

$$\begin{cases} \rho(1+a) = 1 \\ \rho(4+a) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ \rho = 5 \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{5z - 4}{z^2}$$

Applicando la formula risolutiva si ottiene:

$$R(z) = \frac{1}{G^*(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \dots = -\frac{1}{3} \frac{5z - 4}{z - 1}.$$