Seconda prova scritta intermedia A.A. 2001/02

Soluzioni ●

Esercizio 1

1.1

Per ottenere errore a transitorio esaurito nullo, in presenza di una variazione a scalino del riferimento, è necessaria una funzione di trasferimento d'anello di tipo uno, e quindi un regolatore di tipo uno. Il guadagno del regolatore è invece arbitrario ai fini del soddisfacimento della specifica statica.

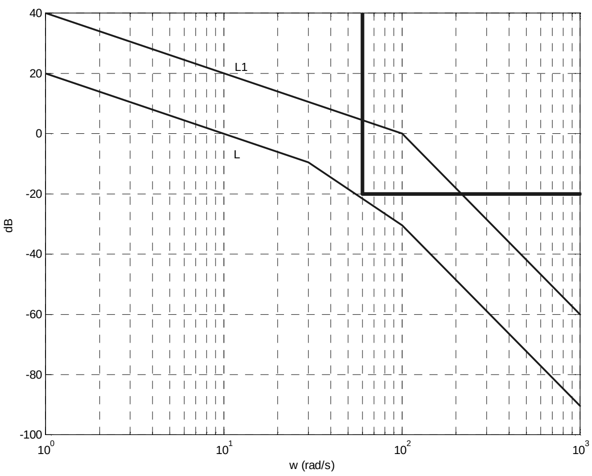
Concludiamo il progetto statico ponendo formalmente:

$$R_1(s)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad L_1(s)=R_1(s)G(s)=\frac{100}{s(1+0.01s)^2},$$

Il requisito di attenuazione del disturbo in linea di retroazione comporta, come è noto, un vincolo sul modulo di $L(j\omega)$:

$$|L(j\omega)|\le\frac{1}{10}, \quad \left[|L(j\omega)|_{dB}\le -20\right], \quad \forall\omega>60.$$

Il tracciamento del diagramma del modulo di L_1 evidenzia che occorre procedere al progetto dinamico per soddisfare i requisiti sul margine di fase e sull'attenuazione del disturbo. Per il tracciamento del modulo di L, scegliendo di tagliare alla pulsazione 10, conviene mantenere un polo a pulsazione 100 ed aggiungerne un altro alla pulsazione 30, per garantire l'attenuazione del disturbo. In bassa frequenza si possono far correre paralleli i diagrammi.



Si ottiene quindi $\omega_c = 10$, mentre la fase critica e il margine di fase valgono:

$$\varphi_c=-90°-\text{atan}(10/30)-\text{atan}(10/100)=-90°-18.4°-5.7°=-114.1°$$

$$\varphi_m=180°-|\varphi_c|=180°-114.1°=65.9°$$

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{10}{s(1+s/30)(1+0.01s)},$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento del regolatore:

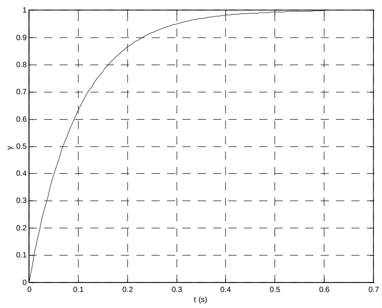
$$R(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{1}{s}\frac{10(1+0.01s)^2}{100(1+0.03s)(1+0.01s)} = \frac{0.1}{s}\frac{1+0.01s}{1+0.03s},$$

che è di ordine 2 come richiesto.

1.2

Poiché il margine di fase è elevato, si può approssimare la funzione di trasferimento da $y°$ a y con un sistema del primo ordine a guadagno unitario e costante di tempo pari all'inverso della pulsazione critica:

$$F(s) \approx \frac{1}{1+s/\omega_c} = \frac{1}{1+0.1s}.$$



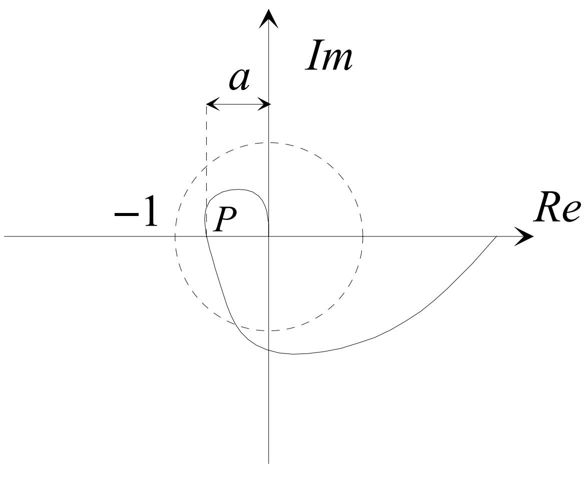
1.3

Dalle tabelle di precisione statica, tenendo conto che $g_L = 1$ e che $y°(t)$ = sca(t)+2ram(t), si ha:

$$e_\infty = 0 + \frac{2}{\mu_L} = 0.2.$$

Esercizio 2

2.1



Si supponga che il diagramma polare di L attraversi il semiasse reale negativo in uno e un solo punto.

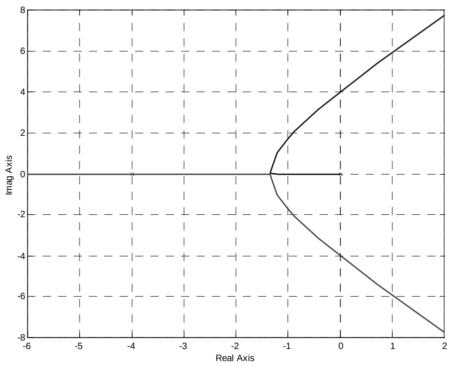
Detta a la distanza del punto P dall'origine, si definisce margine di guadagno la quantità:

$$k_m = \frac{1}{a} = \frac{1}{\left|L\left(j\omega_p\right)\right|}, \quad \text{con } \angle L\left(j\omega_p\right) = -180° .$$

Il margine di guadagno è un indicatore della robustezza della stabilità a fronte di incertezze sul guadagno d'anello: esprime il massimo fattore per cui si può moltiplicare il guadagno d'anello per non incorrere in instabilità

2.2

Tracciamo il luogo delle radici diretto:



Per determinare il valore di $\overline{\rho}$ occorre eseguire la punteggiatura del luogo nel punto $\overline{s} = -6$.

$\overline{\rho} = 2 \times 2 \times 6 = 24$.

2.3

Il massimo valore di ρ per l'asintotica stabilità in anello chiuso si ha in corrispondenza del valore di ρ per cui due dei tre rami del luogo entrano nel semipiano destro. Sfruttando la regola di conservazione della somma delle parti reali dei poli, possiamo equivalentemente calcolare il valore di ρ con riferimento al punto −8 (quando due poli hanno parte reale nulla, il terzo ha parte reale −8). Eseguendo la punteggiatura in questo punto:

$\rho_M = 4 \times 4 \times 8 = 128$.

Poiché $\overline{\rho}$ è minore di questo valore limite, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.4

Poiché il margine di guadagno è il massimo fattore moltiplicativo ammissibile per il guadagno d'anello, si ha:

$$\gamma_m = \frac{\rho_M}{\overline{\rho}} = \frac{128}{24} = \frac{16}{3} = 5.33.$$

Esercizio 3

3.1

Dette ***A****,***B****,***C****,***D**** le matrici del sistema a segnali campionati, risulta:

$$\boldsymbol{A}^* = e^{\boldsymbol{A}T}, \quad \boldsymbol{B}^* = \int_0^T e^{\boldsymbol{A}\eta}\boldsymbol{B}d\eta, \quad \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D}$$

3.2

Una rappresentazione in variabili di stato del sistema si ha ponendo:

$A = -p, B = p, C = 1, D = 0.$

Utilizzando le formule precedenti con $T = 1$, otteniamo:

$$A^* = e^{-p}, \quad B^* = \int_0^1 e^{-p} p d\eta = 1 - e^{-p}, \quad C^* = 1, \quad D^* = 0,$$

e quindi la funzione di trasferimento richiesta:

$$G^*(z) = \frac{C^* B^*}{z - A^*} + D^* = \frac{1 - e^{-p}}{z - e^{-p}}.$$

3.3

Posto $p = -\ln(3)$ si ha:

$$G^*(z) == \frac{1 - e^{\ln(3)}}{z - e^{\ln(3)}} = -\frac{2}{z - 3}.$$

La funzione di trasferimento ha guadagno $G^*(1)$ unitario, tipo nullo (non ha poli o zeri in $z = 1$), ed è instabile, avendo l'unico polo in $z = 3$ (e quindi a modulo maggiore di 1).

3.4

Perché la risposta si esaurisca in tempo finito, tutti i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso di F devono essere nulli, mentre il vincolo di causalità del regolatore impone che il grado relativo di F sia almeno pari a 1 (come G^*). Poniamo quindi:

$$F(z) = \rho \frac{z + a}{z^2}.$$

Imponiamo i vincoli di precisione statica e sull'assenza della cancellazione:

$$\begin{cases} \rho(1 + a) = 1 \\ \rho(3 + a) = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ \rho = 4 \end{cases} \Rightarrow F(z) = \frac{4z - 3}{z^2}$$

Applicando la formula risolutiva si ottiene:

$$R(z) = \frac{1}{G^*(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \cdots = -\frac{1}{2} \frac{4z - 3}{z - 1}.$$