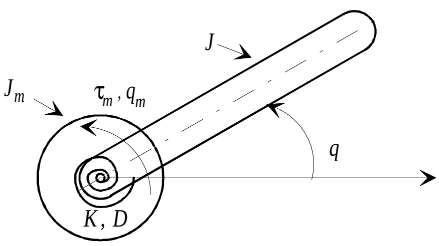
**L.I.N.F.A. Laboratorio Informatico-Numerico di Fondamenti di Automatica**
**Prof. Paolo Rocco**
# MODULO 7: Modellistica e controllo di bracci flessibili

**Braccio rigido connesso ad un motore da un giunto flessibile**




Si tratta di un sistema meccanico a due gradi di libertà, associati rispettivamente alla coordinata libera del motore, $q_m$, e alla coordinata del *link* $q$. Detti $J_m$ e $J$ i momenti di inerzia di motore e link, rispettivamente, $K$ e $D$ i coefficienti di rigidezza e attrito viscoso del giunto, $D_m$ il coefficiente di attrito viscoso relativo al motore e $\tau_m$ la coppia motrice, il modello matematico si compone delle seguenti equazioni:

$$J_m\ddot{q}_m + D_m\dot{q}_m + \tau_t = \tau_m$$
$$\tau_t = K(q_m - q) + D(\dot{q}_m - \dot{q})$$
$$J\ddot{q} = \tau_t$$

La funzione di trasferimento dalla coppia motrice $\tau_m$ alla posizione del motore $q_m$ assume la seguente espressione:

$$G(s) = \frac{q_m(s)}{\tau_m(s)} = \frac{\mu}{s}\frac{1 + 2\frac{\zeta_Z}{\omega_{nZ}}s + \frac{1}{\omega_{nZ}^2}s^2}{(1+Ts)\left(1 + 2\frac{\zeta_P}{\omega_{nP}}s + \frac{1}{\omega_{nP}^2}s^2\right)}.$$

Adottando i seguenti valori per i parametri fisici:

| $J_m$ [$Kgm^2$] | $J_l$ [$Kgm^2$] | $D_m$ [$Nms/rad$] | $D$ [$Nms/rad$] | $K$ [$Nm/rad$] |
|---|---|---|---|---|
| 0.0006 | 0.00148 | 0.003 | 0.01 | 8.0 |

si ottengono i seguenti valori per i parametri della funzione di trasferimento:

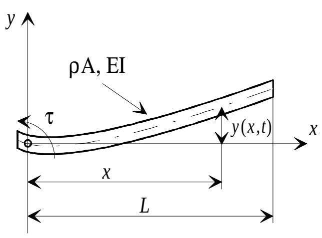
| $\mu$ | $T$ | $\zeta_Z$ | $\zeta_P$ | $\omega_{nZ}$ | $\omega_{nP}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 333.3 | 0.694 | 0.046 | 0.10 | 73.48 | 136.8 |

a) si definisca $G$ con il comando **tf**, se ne traccino i diagrammi di Bode e se ne simuli la risposta all'impulso;
b) si progetti un regolatore PID chiuso sull'errore di posizione motore. Si cancelli con uno zero del PID il polo in bassa frequenza di $G$ e si scelga una pulsazione critica decisamente inferiore alla pulsazione degli zeri complessi di $G$. Si posizioni il secondo zero del PID ad una pulsazione pari ad un quinto di $\omega_c$. Un'espressione di $R(s)$ può quindi essere:

$$R(s) = \frac{\omega_c}{T_z\mu}\frac{(1+sT)(1+sT_z)}{s}, \quad T_z = \frac{5}{\omega_c} \text{ con } \omega_c = 10 \text{ rad/s.}$$

(si definisca $R$ con il comando **tf**, quindi $L = RG$ con il comando **series**; si determini il margine di fase con **margin**).
c) si simuli la risposta del sistema in anello chiuso (si definisca $F = L/(1+L)$ con il comando **feedback**).

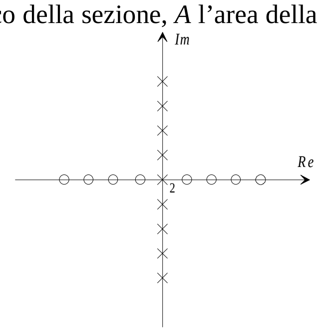
**Braccio flessibile**




Si considera un corpo flessibile incernierato in un estremo. Sotto ipotesi semplificative, la deformazione dovuta alla flessione, $y(x,t)$, risulta soluzione della seguente equazione differenziale alle derivate parziali (con le opportune condizioni al contorno):

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

dove $E$ è il modulo di Young, $I$ il momento di inerzia geometrico della sezione, $A$ l'area della sezione, $\rho$ la densità.




Il sistema è a parametri distribuiti, ma può ancora essere studiato nel campo delle trasformate di Laplace: possiamo infatti definire la funzione di trasferimento tra la coppia $\tau$ applicata ad un estremo e la posizione $y(L,t)$ dell'altro estremo. Si ottiene:

$$\frac{Y(L,s)}{\tau(s)} = H(s) = \frac{\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)}{EI\beta^2(\cos(\beta L)\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)\cosh(\beta L))}, \text{ con } \beta^4 = -\frac{\rho A s^2}{EI}.$$

Si può dimostrare che vi sono infiniti poli sull'asse immaginario e infiniti zeri sull'asse reale (comportamento risonante e a fase non minima).

Si vogliono tracciare i diagrammi di Bode della risposta in frequenza (per $L$=1.219; $\rho A$=0.245; $EI$=11.82).
Si può usare la sequenza di comandi:

```
w = logspace(0,4,1000); b = (roA/EI.*w.^2).^(1/4);
H = (sin(b*L)+sinh(b*L))./(EI*b.^2.*(cos(b*L).*sinh(b*L)-sin(b*L).*cosh(b*L)));
semilogx(w,20*log10(abs(H))); semilogx(w,angle(H));
```