L.I.N.F.A. Laboratorio Informatico-Numerico di Fondamenti di Automatica

Prof. Paolo Rocco

MODULO 1: MATLAB e l'algebra lineare

Alcune funzioni utili

```
eye(n)           matrice identità di ordine n
diag(v)          matrice diagonale con gli elementi di v sulla diagonale
det(A)           determinante
inv(A)           inversa
poly(A)          polinomio caratteristico
eig(A)           autovalori
[V,AD]=eig(A)    autovalori e autovettori (nella matrice V)
polyval(p,x)     valutazione del polinomio p nel punto x
polyvalm(p,A)    valutazione del polinomio p con argomento la matrice A
expm(A)          esponenziale di matrice
norm(A)          norma (in L2) di matrice
```

Esercizio 1

Data la matrice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

1. se ne ricavi il polinomio caratteristico;
2. si calcolino gli autovalori;
3. si determini la matrice $\boldsymbol{T}$ che mette in forma diagonale, verificando il risultato;
4. si verifichi il teorema di Cayley-Hamilton.

Esercizio 2

Si considerino le seguenti matrici:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} -13 & 0 & -8 \\ -12 & -1 & -8 \\ 12 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Per ciascuna di esse:
1. Si ricavino gli autovalori, verificando che non sono distinti;
2. Si ricavi il polinomio minimo;
3. Sulla base del polinomio minimo, si determini la forma di Jordan della matrice.

Esercizio 3

Si consideri nuovamente la matrice dell'esercizio 1.

1. Si calcoli la matrice esponenziale $e^{\boldsymbol{A}}$;
2. Detti λ_i gli autovalori di $\boldsymbol{A}$, e $\boldsymbol{T}$ la matrice che mette $\boldsymbol{A}$ in forma diagonale, si verifichi che $e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\,\mathrm{diag}\left\{e^{\lambda_i}\right\}\boldsymbol{T}$.
3. Si determini il minimo valore di m tale che, detta $\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} + \cdots \frac{\boldsymbol{A}^m}{m!}$, risulti $\frac{\left\| e^{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{E}_m \right\|}{\left\| e^{\boldsymbol{A}} \right\|} < 0.05$.