Fondamenti di automatica

(Prof. Rocco)

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale
(Vecchio Ordinamento)

Raccolta di temi d'esame

La presente raccolta comprende i testi e le soluzioni delle prove scritte intermedie e i testi di tutti gli appelli ordinari degli A.A. 1998-99, 1999-00 e 2000-01.

Fondamenti di automatica

(Prof. Rocco)

Appello del ....

Cognome:...

Nome: ....

Matricola:..............................

Firma:..

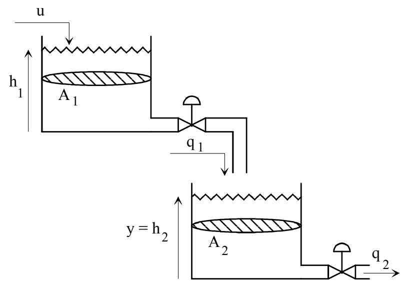
Avvertenze:

- Il presente fascicolo si compone di **8** fogli (compresa la copertina). Tutti i fogli utilizzati vanno firmati.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.

Prima prova scritta intermedia A.A. 1998/99

Esercizio 1

Si consideri il sistema idraulico riportato in figura:



Il sistema è costituito da due serbatoi di sezione costante collegati da una valvola. Anche il secondo serbatoio presenta una valvola in uscita. Le due valvole, entrambe ad apertura costante, stabiliscono tra la portata di liquido che le attraversa e il livello nel serbatoio a monte le relazioni:

$$q_1 = \alpha_1 \sqrt{h_1}, \quad q_2 = \alpha_2 \sqrt{h_2} \,.$$

Si assuma come *ingresso* la portata entrante u e come *uscita* del sistema il livello del secondo serbatoio $y = h_2$.

1.1 Si indichi se le seguenti affermazioni sono vere o false:

Il sistema è di ordine 4.	VERO	FALSO
Il sistema è lineare.	VERO	FALSO
Il sistema è strettamente proprio.	VERO	FALSO
Il sistema è tempo variante.	VERO	FALSO

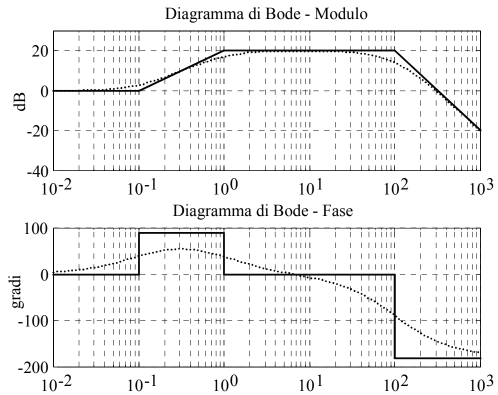
1.2 Si scrivano le equazioni del sistema dinamico.

1.3 Posto $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, si determinino eventuali punti di equilibrio del sistema corrispondenti all'ingresso costante $u = \bar{u} = 2$.

1.4 Si discuta la stabilità degli eventuali stati di equilibrio determinati al punto precedente.

Esercizio 2

Un sistema dinamico presenta i diagrammi di Bode (esatti e asintotici) del modulo e della fase della risposta in frequenza riportati in figura:



2.1 Si tracci il diagramma polare approssimato della risposta in frequenza.

2.2 Sapendo che il sistema non presenta poli o zeri complessi, si determini un'espressione della funzione di trasferimento compatibile con i diagrammi riportati.

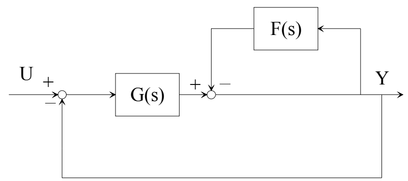
2.3 Si determinino il valore iniziale e l'eventuale valore finale della risposta allo scalino unitario del sistema.

2.4 Si determini, nel modo più rapido possibile, l'espressione, anche approssimata, dell'uscita a transitorio esaurito quando l'ingresso assume l'andamento:

$$u(t) = \sin(7t) \,.$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico descritto dal seguente schema a blocchi:



dove:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}, \quad F(s) = \frac{2s+4}{s^2-1} \,.$$

3.1 Si determini la funzione di trasferimento del sistema complessivo (da u a y).

3.2 Si discuta la stabilità del sistema complessivo.

3.3 Si dica, motivando la risposta, se il sistema complessivo è a fase minima o non minima.

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Falso (il sistema è di ordine 2), Falso, Vero, Falso.

1.2

Posto $x_1 = h_1$, $x_2 = h_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{\alpha_1\sqrt{x_1}}{A_1} + \dfrac{u}{A_1} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\alpha_1\sqrt{x_1}}{A_1} - \dfrac{\alpha_2\sqrt{x_2}}{A_2} \end{cases}$$

$y = x_2$

1.3

Annullando le derivate, si trova l'unico stato di equilibrio:

$$\begin{cases} -\sqrt{\bar{x}_1} + \bar{u} = 0 \\ \sqrt{\bar{x}_1} - 2\sqrt{\bar{x}_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 4 \\ \bar{x}_2 = 1 \end{cases}.$$

1.4

Si linearizza il sistema nell'intorno del punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\dfrac{\alpha_1}{2A_1\sqrt{\bar{x}_1}}\delta x_1 + \dfrac{\delta u}{A_1} \\ \delta\dot{x}_2 = \dfrac{\alpha_1}{2A_1\sqrt{\bar{x}_1}}\delta x_1 - \dfrac{\alpha_2}{2A_2\sqrt{\bar{x}_2}}\delta x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}_1 = -\dfrac{1}{4}\delta x_1 + \delta u \\ \delta\dot{x}_2 = \dfrac{1}{4}\delta x_1 - \delta x_2 \end{cases}.$$

La matrice dinamica del sistema linearizzato è:

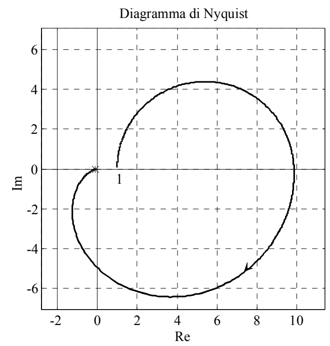
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & -1 \end{bmatrix},$$

ed essendo triangolare, ha gli autovalori sulla diagonale. Poiché entrambi gli autovalori (-1, $-1/4$) hanno parte reale negativa, il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, e quindi lo è anche il punto di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

Esercizio 2

2.1

Diagramma polare:



2.2

Il sistema ha tipo zero (pendenza iniziale del modulo nulla) e guadagno pari a 1 (modulo iniziale 0 dB e fase iniziale nulla). Ha uno zero a parte reale negativa alla pulsazione 0.1, un polo a parte reale negativa alla pulsazione 1 e due poli a parte reale negativa alla pulsazione 100:

$$G(s) = \frac{1+10s}{(1+s)(1+0.01s)^2}.$$

2.3

Valore iniziale:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty}\left[s\frac{G(s)}{s}\right] = \lim_{s\to\infty} G(s) = 0.$$

Essendo il sistema asintoticamente stabile, si può applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{G(s)}{s}\right] = G(0) = 1.$$

2.4

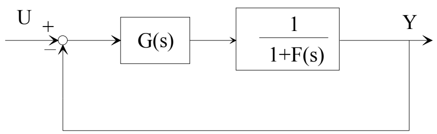
$$y(t) = |G(7j)|\sin(7t + \angle G(7j)) \approx 10\sin(7t),$$

avendo ricavato immediatamente modulo e fase di $G(7j)$ dai diagrammi di Bode.

Esercizio 3

3.1

Elaboriamo lo schema a blocchi:



Si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G(s)\frac{1}{1+F(s)}}{1+G(s)\frac{1}{1+F(s)}}=\frac{G(s)}{1+G(s)+F(s)}=\cdots=\frac{s^2-1}{s^3+5s^2+7s+5}.$$

3.2

Applichiamo il criterio di Routh al denominatore:

1	7	0
5	5	0
6	0	
5		

Poiché gli elementi della prima colonna della tabella sono tutti positivi, il sistema è asintoticamente stabile.

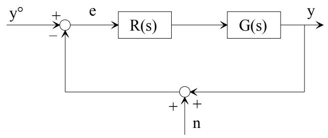
3.3

Il sistema non è a fase minima, dal momento che presenta uno zero a parte reale positiva (s=1).

Seconda prova scritta intermedia A.A. 1998/99

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{100}{s(1+0.01s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

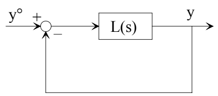
- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{ram}(t)$, con A costante arbitraria, ed in assenza del disturbo n, l'errore e a transitorio esaurito sia nullo.
- Un disturbo $n(t) = \sin(\overline{\omega}t)$, con $\overline{\omega} \geq 10 rad/s$, sia attenuato a regime sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 60° e la pulsazione critica sia maggiore o uguale a 2 *rad/s*.

1.2 Con il regolatore così progettato, si tracci l'andamento qualitativo della risposta di y allo scalino unitario in $y°$.

1.3 Si determini un valore adeguato del tempo di campionamento per la realizzazione digitale del controllore. Quindi si discretizzi la funzione di trasferimento del controllore con il metodo di Eulero implicito (o Eulero all'indietro).

Esercizio 2

Si consideri un generico sistema dinamico in retroazione:



in cui $L(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema *privo di poli a parte reale positiva*.

2.1 Si giustifichi la seguente affermazione: "Se risulta $|L(j\omega)| < 1$ per ogni ω, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile".

2.2 Detta $S(s) = 1/(1+L(s))$ la funzione di sensitività del sistema, si spieghi perché il valore massimo S_M di $|S(j\omega)|$ costituisce un indice di robustezza della stabilità del sistema in anello chiuso.

2.3 Posto quindi $L(s) = k\dfrac{1-2s}{(1+2s)^3}$, con $k > 0$, si determini, con il criterio di Nyquist, l'intervallo di valori di k per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.4 Si verifichi il risultato con il metodo del luogo delle radici.

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.5x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + 0.5x_3(k) \end{cases}$$

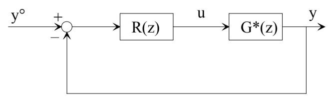
$$y(k) = x_3(k)$$

3.1 Si discuta la stabilità del sistema dinamico.

3.2 Si determini la funzione di trasferimento $G^*(z)$ da u a y.

3.3 Si dica se il sistema può essere interpretato come un sistema a segnali campionati (serie di uno ZOH, di una funzione di trasferimento a tempo continuo razionale e di un campionatore).

3.4 Con riferimento al seguente sistema di controllo:



si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y ad uno scalino in $y°$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Progetto statico

Il requisito di errore nullo a regime con riferimento a rampa impone tipo della funzione di trasferimento d'anello pari almeno a due, e quindi tipo del regolatore pari almeno a uno. Il guadagno del regolatore è indeterminato. Poniamo:

$$R_1(s)=\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad L_1(s)=\frac{100}{s^2(1+0.01s)}.$$

Il requisito di attenuazione del disturbo impone che:

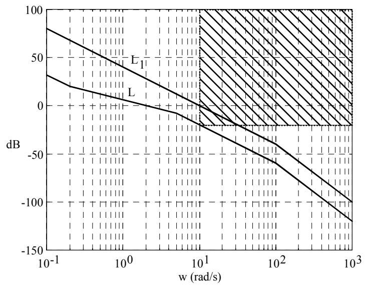
$$\frac{\left|L(j\varpi)\right|}{\left|1+L(j\varpi)\right|}\le 0.1 \quad \forall\varpi>10,$$

ossia, approssimativamente:

$$\left|L(j\varpi)\right|\le 0.1 \quad \left[\left|L(j\varpi)\right|_{dB}\le -20\right] \quad \forall\varpi>10.$$

Progetto dinamico

Scegliamo di tagliare in ω_c = 2. Per evitare la "zona proibita" in alta frequenza, aggiungiamo un polo in ω =5. Occorre anche aggiungere uno zero in bassa frequenza (ω = 0.2).



Si ottiene:

$$\varphi_m=180°-\left|-180°+\arctan(10)-\arctan(2/5)-\arctan(2/100)\right|\approx 61°.$$

Risulta quindi:

$$L(s)=\frac{\mu_L}{s^2}\frac{1+5s}{(1+0.01s)(1+0.2s)}.$$

μ_L si ricava osservando che $\frac{\mu_L}{0.2^2}=10 \quad \Rightarrow \quad \mu_L=0.4$.

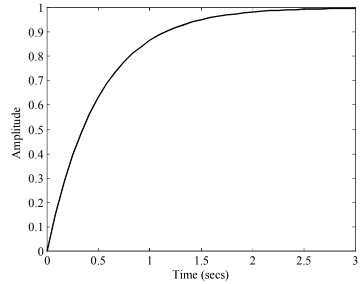
Pertanto:

$$R(s)=R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)}=\frac{0.004}{s}\frac{1+5s}{1+0.2s}.$$

1.2

Poiché il margine di fase è elevato, si può approssimare il sistema in anello chiuso con un sistema a costante di tempo:

$$F(s)\cong\frac{1}{1+s/\omega_c}=\frac{1}{1+0.5s}.$$



1.3

$$\Omega_N=10\omega_c=20 \quad \Rightarrow \quad T=\pi/\Omega_N\cong 0.15$$

Eulero implicito:

$$R^*(z)=R\left(\frac{z-1}{Tz}\right)=\frac{0.004}{\frac{z-1}{Tz}}\frac{1+5\frac{z-1}{Tz}}{1+0.2\frac{z-1}{Tz}}=\frac{0.004Tz}{z-1}\frac{(T+5)z-5}{(T+0.2)z-0.2}.$$

Esercizio 2

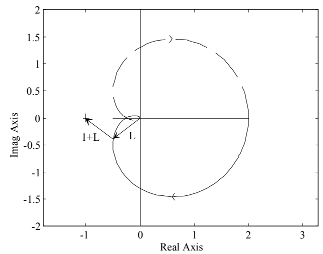
2.1

Se il modulo di $L(j\omega)$ è sempre minore di 1, il diagramma di Nyquist associato a L è tutto contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio 1, per cui non compie giri intorno al punto -1. Risulta quindi $N=P_d=0$, e, per il criterio di Nyquist, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.2

La minima distanza del diagramma polare di L dal punto -1 è pari a:

$$\min_{\omega}\left|1+L(j\omega)\right|.$$

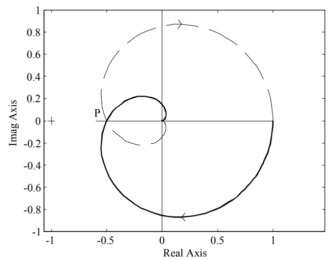


Per aumentare la robustezza della stabilità occorre massimizzare questa quantità, o, equivalentemente, minimizzare:

$$\max_{\omega}\frac{1}{\left|1+L(j\omega)\right|}=S_M.$$

2.3

Il diagramma di Nyquist con k = 1 è riportato di seguito:



Poiché $P_d = 0$, il diagramma non deve compiere giri intorno al punto -1.

Il punto P è caratterizzato dalla pulsazione ω_π tale che:

$$\angle L\left(j\omega_\pi\right) = -180° \quad \Rightarrow \quad -4\arctan\left(2\omega_\pi\right) = -180° \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = \frac{1}{2}\tan(45°) = 0.5.$$

In corrispondenza:

$$\left|L\left(j\omega_\pi\right)\right| = \frac{k}{1+4\omega_\pi^2} = \frac{k}{2}.$$

Deve essere:

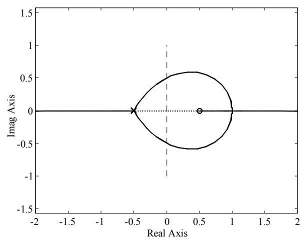
$$\left|L\left(j\omega_\pi\right)\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad k < 2\ .$$

2.4

Riscriviamo $L(s)$ come:

$$L(s) = \rho\frac{s-0.5}{(s+0.5)^3},\ \text{con } \rho = -\frac{k}{4}.$$

Poiché $k > 0$, si ha $\rho < 0$, e occorre tracciare il luogo inverso:



Poiché la somma delle parti reali dei poli si conserva (e vale -1.5), quando due dei tre rami entrano nel semipiano destro, il terzo polo si trova in -1.5. Eseguiamo la punteggiatura su questo punto:

$$\bar{\rho} = -\left|\bar{\rho}\right| = -\frac{1\times1\times1}{2} = -0.5\ .$$

Si ha quindi asintotica stabilità per:

$$\bar{\rho} < \rho < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < k < -4\bar{\rho} \quad \Rightarrow \quad 0 < k < 2.$$

Esercizio 3

3.1

La matrice dinamica A del sistema risulta:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Essendo triangolare, gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale (-0.5, 0, 0.5). Poiché tutti gli autovalori sono a modulo minore di 1, il sistema è asintoticamente stabile.

3.2

Trasformando le singole equazioni a stato iniziale nullo:

$$\begin{cases} zX_1(z) = -0.5X_1(z) + U(z) \\ zX_2(z) = 2X_1(z) \\ zX_3(z) = X_1(z) + X_2(z) + 0.5X_3(z) \end{cases}$$

$$Y(z) = X_3(z)$$

Eliminando X_1 e X_2 e sostituendo nella terza equazione, otteniamo:

$$Y(z) = X_3(z) = \frac{1}{z-0.5}\left(1+\frac{2}{z}\right)\frac{1}{z+0.5}U(z) \quad \Rightarrow \quad G^*(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+2}{z(z-0.5)(z+0.5)}.$$

3.3

Il sistema non può essere un sistema a segnali campionati, in quanto il polo in z=0 non può essere l'immagine attraverso la trasformazione di campionamento ($z = e^{sT}$) di un polo del sistema a tempo continuo.

3.4

G^* è asintoticamente stabile ma a fase non minima. Ha grado relativo 2.

Poniamo quindi:

$$F^*(z) = \frac{1}{3}\frac{z+2}{z^3},$$

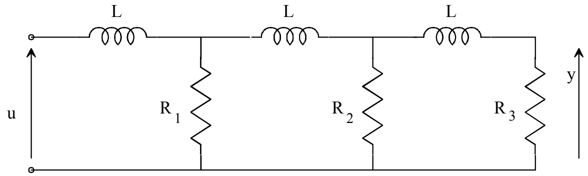
da cui:

$$R(z) = \frac{1}{G^*(z)}\frac{F^*(z)}{1-F^*(z)} = \frac{z(z-0.5)(z+0.5)}{z+2}\frac{1}{3}\frac{z+2}{z^3-1/3(z+2)} = \frac{z(z-0.5)(z+0.5)}{3z^3-z-2}.$$

Prima prova scritta intermedia A.A. 1999/00

Esercizio 1

Si consideri la rete elettrica riportata in figura:



1.1 Si scrivano le equazioni del sistema che descrive la dinamica della rete elettrica[1].

1.2 Posto $L = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, $R_3 = 1$, si discuta la stabilità del sistema.

1.3 Si determini, se possibile, il valore dell'uscita y quando l'ingresso assume il valore costante $u = \bar{u} = 2$.

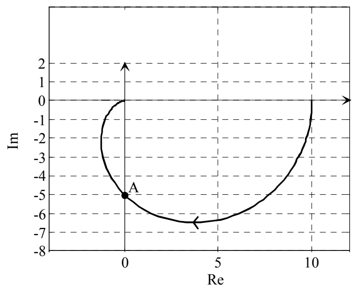
1.4 Si determini, nel modo più rapido possibile, il valore iniziale della risposta di y ad uno scalino unitario in u.

Esercizio 2

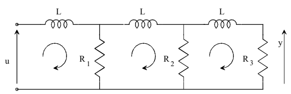
Un sistema dinamico, di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT)^2}$$

presenta il diagramma polare della risposta in frequenza riportato in figura:



[1] Dopo aver effettuato la scelta delle variabili di stato, si utilizzino le leggi di equilibrio delle tensioni alle tre maglie della rete.



2.1 Sapendo che il punto A del diagramma è associato alla pulsazione $\omega_A = 1$ *rad/s*, si determinino i valori dei parametri μ e T della funzione di trasferimento.

2.2 Si determini, nel modo più rapido possibile, l'espressione a transitorio esaurito dell'uscita y quando l'ingresso u assume l'andamento $u(t) = 5\sin(t)$.

2.3 Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase della risposta in frequenza $G(j\omega)$.

2.4 Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema, indicando approssimativamente la durata del transitorio.

Esercizio 3

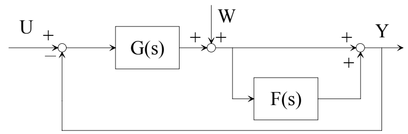
3.1 Con riferimento ad un generico sistema dinamico, si enunci, anche in modo schematico, il principio di sovrapposizione degli effetti, avendo cura di specificarne le ipotesi di validità.

3.2 Per ciascuno dei 4 sistemi dinamici del primo ordine riportati di seguito, si dica, giustificando la risposta, se il principio di sovrapposizione degli effetti è valido:

1) $\dot{x}(t) = x(t)u(t)$ 2) $\dot{x}(t) = tu(t)$ 3) $\dot{x}(t) = \sqrt{3}x(t) + u(t)$ 4) $\dot{x}(t) = x(t) + \sqrt{3u(t)}$

(si assuma $y(t) = x(t)$ per tutti i sistemi).

3.3 Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, si determini la trasformata di Laplace $Y(s)$ dell'uscita per il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



dove:

$$G(s) = \frac{6}{s+1}, \quad F(s) = \frac{2}{s},$$

$$u(t) = \text{sca}(t), \quad w(t) = \text{sca}(t).$$

3.4 Si determini l'espressione analitica dell'uscita y nel dominio del tempo (ossia l'espressione $y(t) = ...$).

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Dette x_1, x_2, x_3 le correnti nelle tre induttanze, si scrivono le equazioni di bilancio delle tensioni alle tre maglie:

$$\begin{cases} u = L\dot{x}_1 + R_1(x_1 - x_2) \\ R_1(x_1 - x_2) = L\dot{x}_2 + R_2(x_2 - x_3) \\ R_2(x_2 - x_3) = L\dot{x}_3 + R_3 x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_1}{L}x_1 + \dfrac{R_1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{R_1}{L}x_1 - \dfrac{R_1+R_2}{L}x_2 + \dfrac{R_2}{L}u \\ \dot{x}_3 = \dfrac{R_2}{L}x_2 - \dfrac{R_2+R_3}{L}x_3 \end{cases}$$

$$y = R_3 x_3$$

1.2

La matrice dinamica del sistema risulta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

ed ha polinomio caratteristico:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda + 1 .$$

Poiché la tabella di Routh:

1	6	0
5	1	0
29/5	0	
1		

presenta tutti gli elementi della prima colonna positivi, il sistema è asintoticamente stabile.

1.3

Occorre determinare l'uscita di equilibrio. Si può procedere come segue:

$$\bar{y} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\bar{u} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} = \bar{u} = 2$$

(si osservi che $\det(\boldsymbol{A}) = -\chi_A(0)$).

1.4

Poiché il sistema è strettamente proprio risulta $y(0) = 0$.

Esercizio 2

2.1

Poiché il diagramma parte dal punto 10, si ha $\mu = 10$. Inoltre la fase in corrispondenza del punto A vale $-\pi/2$, per cui:

$$\angle G(j\omega_A) = -2\arctan(\omega_A T) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_A T = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_A} = 1 .$$

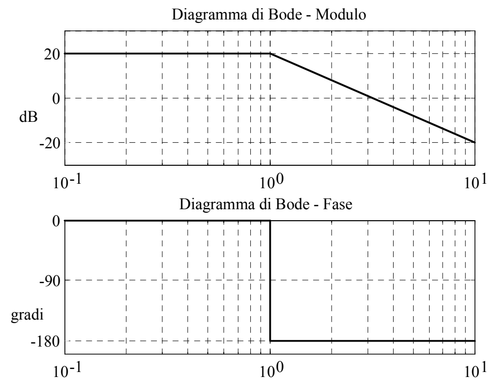
2.2

Risulta:

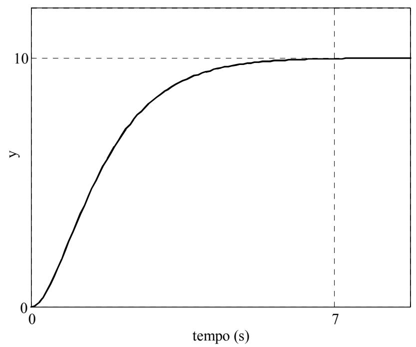
$$y(t) = 5|G(j)| sin(t + \angle G(j)) = 25 sin(t - \pi/2) = 25\cos(t),$$

dove modulo e fase di $G(j)$ si leggono direttamente dal diagramma polare ($\omega_A = 1$).

2.3



2.4



Il transitorio si esaurisce dopo un tempo pari a circa 7 volte la costante di tempo (7 secondi).

Esercizio 3

3.1

Dato un sistema dinamico lineare, si consideri il movimento $\boldsymbol{x}'(t)$, $\boldsymbol{y}'(t)$ che origina dallo stato $\boldsymbol{x}_0'$ all'istante t_0 ed è forzato dall'ingresso $\boldsymbol{u}'(t)$ a partire da t_0 ed il movimento $\boldsymbol{x}''(t)$, $\boldsymbol{y}''(t)$ che origina dallo stato $\boldsymbol{x}_0''$ all'istante t_0 ed è forzato dall'ingresso $\boldsymbol{u}''(t)$ a partire da t_0.

Se ora si considera il movimento $\boldsymbol{x}'''(t)$, $\boldsymbol{y}'''(t)$ che origina dallo stato $\boldsymbol{x}_0''' = \alpha\,\boldsymbol{x}_0' + \beta\,\boldsymbol{x}_0''$ all'istante t_0 ed è forzato dall'ingresso $\boldsymbol{u}'''(t) = \alpha\,\boldsymbol{u}'(t) + \beta\,\boldsymbol{u}''(t)$ a partire da t_0, risulta:

$\boldsymbol{x}'''(t) = \alpha\,\boldsymbol{x}'(t) + \beta\,\boldsymbol{x}''(t)$, $\boldsymbol{y}'''(t) = \alpha\,\boldsymbol{y}'(t) + \beta\,\boldsymbol{y}''(t)$, a partire da t_0,

α e β essendo due numeri reali arbitrari.

3.2

1) Non valido: sistema non lineare.

2) Valido: sistema lineare (tempo variante)

3) Valido: sistema lineare

4) Non valido: sistema non lineare.

3.3

$$Y(s) = \frac{G(s)\big(1+F(s)\big)}{1+G(s)\big(1+F(s)\big)}U(s) + \frac{1+F(s)}{1+G(s)\big(1+F(s)\big)}W(s)$$

$$= \cdots = \frac{6s+12}{s^2+7s+12}U(s) + \frac{s^2+3s+2}{s^2+7s+12}W(s) = \frac{s^2+9s+14}{s\left(s^2+7s+12\right)}$$

3.4

Metodo di Heaviside:

$$Y(s) = \frac{s^2+9s+14}{s\left(s^2+7s+12\right)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+3} + \frac{\alpha_3}{s+4} = \frac{\alpha_1(s+3)(s+4) + \alpha_2 s(s+4) + \alpha_3 s(s+3)}{s\left(s^2+7s+12\right)}$$

Valutando il numeratore in $s = 0$, $s = -3$, $s = -4$, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 12\alpha_1 = 14 \\ -3\alpha_2 = -4 \\ 4\alpha_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 7/6 \\ \alpha_2 = 4/3 \\ \alpha_3 = -3/2 \end{cases}.$$

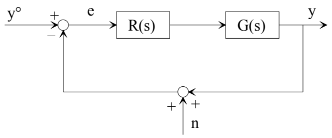
Pertanto:

$$y(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-3t} + \alpha_3 e^{-4t} = \frac{7}{6} + \frac{4}{3}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}, \quad t \geq 0\,.$$

Seconda prova scritta intermedia A.A. 1999/00

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{100}{s}\dfrac{1-s}{(1+10s)(1+s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

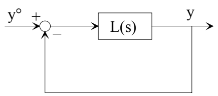
- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\mathrm{sca}(t)$, con A costante arbitraria, ed in assenza del disturbo n, l'errore e a transitorio esaurito sia nullo.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 0.3 *rad/s*.
- Il regolatore abbia ordine (numero di poli) uguale a 1.

1.2 Con il regolatore così progettato, si determini l'insieme delle pulsazioni ω per cui un eventuale disturbo sinusoidale in linea di retroazione $n(t) = \sin(\omega t)$ sia attenuato, a regime, sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.

1.3 Si supponga di volere realizzare il regolatore in tecnologia digitale: si calcoli il decremento di margine di fase associato al ritardo intrinseco di conversione, quando si adotta come pulsazione di Nyquist il valore Ω_N = 1 rad/s (prescindendo dall'eventuale aliasing causato dal disturbo n).

Esercizio 2

2.1 Con riferimento al sistema di controllo di figura,



in cui si suppongono soddisfatte le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode, detta $F(s) = Y(s)/Y°(s)$ la funzione di trasferimento in anello chiuso e ω_c la pulsazione critica, si dimostri che $\left|F(j\omega_c)\right|$ dipende solo dal margine di fase dell'anello.

2.2 Si spieghi perché anche lo smorzamento dei poli dominanti in anello chiuso dipende solo dal margine di fase.

2.3 Posto quindi $L(s) = \dfrac{10}{s}\dfrac{1-s\tau}{1+s\tau}$, con $\tau > 0$, si determini, *con il criterio di Nyquist*, il massimo valore τ_{max} di τ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.4 Posto $\tau = \tau_{max}/\sqrt{3}$ si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y allo scalino in $y°$.

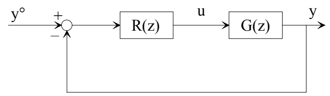
Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -0.25x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{cases}.$$
$$y(k) = -2x_1(k) + x_2(k)$$

3.1 Si determini la funzione di trasferimento $G(z)$ dall'ingresso u all'uscita y.

3.2 Con riferimento al seguente sistema di controllo:



posto $R(z) = \rho_R$, con $\rho_R > 0$, si determini *con il luogo delle radici*, il massimo valore di ρ_R per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.3 Si determini quindi la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y ad uno scalino in $y°$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

3.4 Si discuta la stabilità del regolatore progettato al punto precedente.

Soluzioni

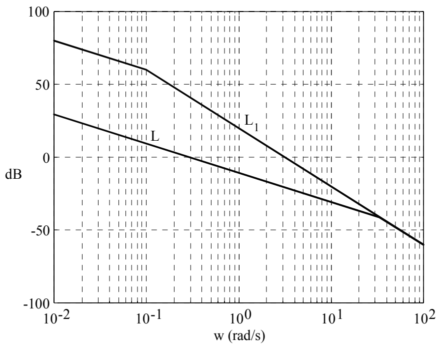
Esercizio 1

1.1

Poiché $G(s)$ è di tipo 1, l'errore a transitorio esaurito prodotto da un riferimento a scalino è nullo anche per regolatore di tipo zero, qualunque sia il guadagno del regolatore. Formalmente potremo porre:

$$R_1(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad L_1(s) = R_1(s)G(s) = G(s).$$

Il tracciamento del diagramma del modulo di L_1 evidenzia che occorre procedere al progetto dinamico per soddisfare i requisiti sul margine di fase. Tracciato il modulo di L come in figura, si ottiene $\omega_c = 0.3$, mentre la fase critica e il margine di fase valgono:



$$\varphi_c = -90° - 2 \times \arctan(0.3) - \arctan(0.01) = -90° - 2 \times 16.7° - 0.5° = -124°$$
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 180° - 124° = 56°$$

(si osservi il contributo della coppia zero polo alla pulsazione 1).

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{0.3}{s} \frac{1-s}{(1+0.03s)(1+s)},$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento, del primo ordine:

$$R(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = 0.03 \frac{1+10s}{1+0.03s}.$$

1.2

A regime l'uscita forzata da n risulta:

$$y(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega)),$$

con $H(s) = -L(s)/(1+L(s))$. Occorre quindi determinare l'insieme delle pulsazioni per cui risulta:

$$|H(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1+L(j\omega)|} \approx |L(j\omega)| \le \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad |L(j\omega)|_{dB} \le -20dB,$$

dove l'approssimazione è valida per valori di pulsazione decisamente maggiori della pulsazione critica. Per ispezione del grafico l'intervallo dei valori è dato da $\omega > 3$ rad/s.

1.3

$$\Delta\varphi_m = -\frac{T}{2}\omega_c \frac{180°}{\pi} = -90° \frac{\omega_c}{\Omega_N} = -90° \times 0.3 = -27°.$$

Esercizio 2

2.1

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1+L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1+e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1+\cos\varphi_c + j\sin\varphi_c|} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cos\varphi_c^{\,2} + 2\cos\varphi_c + \sin\varphi_c^{\,2}}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\varphi_m)}} = \frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)}$$

2.2

Assunta per $F(s)$ un'approssimazione del secondo ordine, a guadagno unitario e con poli complessi a pulsazione naturale ω_c:

$$F(s) = \frac{\omega_c^{\,2}}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^{\,2}},$$

si ha:

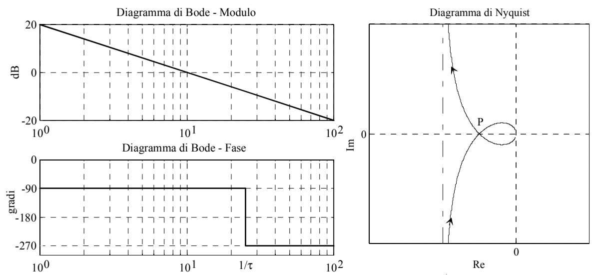
$$F(j\omega_c) = \frac{1}{2\zeta j} \quad \Rightarrow \quad |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\zeta}.$$

Per confronto con l'espressione trovata al punto precedente:

$$\frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)} \quad \Rightarrow \quad \zeta = \sin(\varphi_m/2).$$

2.3

Si tracciano i diagrammi asintotici di Bode, per un generico valore di τ, dai quali si deduce l'andamento qualitativo del diagramma di Nyquist:



Non avendo L poli a parte reale positiva, per il criterio di Nyquist il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il punto P di intersezione del diagramma polare è a destra del punto -1. Risulta:

$$\angle L(j\omega_P) = -90° - 2\arctan(\omega_P \tau) = -180° \quad \Rightarrow \quad \omega_P \tau = \tan(45°) = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_P = 1/\tau$$

e quindi:

$$\left| L(j\omega_P) \right| = \frac{10}{\omega_P} = 10\tau < 1 \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = 0.1 .$$

2.4

Dai diagrammi di Bode si deduce $\omega_c = 10$, mentre:

$$\varphi_c = -90° - 2\arctan(\omega_c \tau) = -90° - 2\arctan\left(1/\sqrt{3}\right) = -150° \quad \Rightarrow \quad \varphi_m = 30° .$$

Essendo il margine di fase esiguo, è opportuno fare riferimento all'approssimazione del secondo ordine ricordata al punto 2.2. Lo smorzamento vale:

$$\zeta = \sin(\varphi_m/2) \approx \varphi_m/100 = 0.3 ,$$

ed il tempo di assestamento:

$$\tau_a \approx \frac{5}{\omega_c \zeta} = \frac{5}{3} = 1.67 .$$

Esercizio 3

3.1

Applicando la trasformata Zeta alle singole equazioni a stato iniziale nullo:

$$\begin{cases} zX_1(z) = X_2(z) \\ zX_2(z) = -0.25X_1(z) + X_2(z) + U(z) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & z^2 X_1(z) + 0.25X_1(z) - zX_1(z) = U(z) \\ & Y(z) = (z-2)X_1(z) \end{aligned} ,$$

$$Y(z) = -2X_1(z) + X_2(z)$$

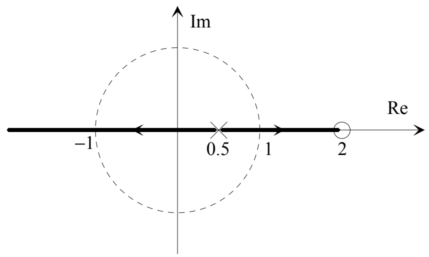
e quindi:

$$G(z) = \frac{z-2}{z^2 - z + 0.25} .$$

3.2

La funzione di anello risulta:

$$L(z) = R(z)G(z) = \rho_R \frac{z-2}{(z-0.5)^2} .$$



Occorre tracciare il luogo delle radici diretto.

Il sistema è asintoticamente stabile se entrambi i poli sono all'interno del cerchio segnato in figura. Il valore di ρ_R per cui un ramo arriva al punto 1 è (con la regola di punteggiatura):

$$\rho_{R_1} = \frac{0.5 \times 0.5}{1} = 0.25 ,$$

mentre il valore di ρ_R per cui un ramo arriva al punto -1 è:

$$\rho_{R_{-1}} = \frac{1.5 \times 1.5}{3} = 0.75 .$$

Deve quindi essere:

$$\rho_R < \min\left(\rho_{R_1}, \rho_{R_{-1}}\right) = 0.25 .$$

3.3

Poiché G ha uno zero a modulo maggiore di 1, anche la funzione di trasferimento in anello chiuso, F, deve presentare lo stesso zero. Perché la risposta si esaurisca in tempo finito, tutti i poli di F devono essere nulli, mentre il vincolo di causalità del regolatore impone che il grado relativo di F sia almeno pari a 1 (grado realtivo di G). Poniamo quindi:

$$F(z) = \rho \frac{z-2}{z^2} .$$

Il vincolo di precisione statica impone $F(1)=1$, da cui $\rho = -1$. Applicando la formula risolutiva:

$$R(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{F(z)}{1 - F(z)} = \cdots = -\frac{(z-0.5)^2}{(z-1)(z+2)} .$$

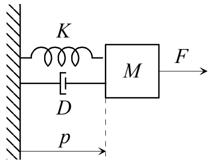
3.4

Essendo presente un polo a modulo maggiore di 1 (in $z = -2$) il regolatore è instabile.

Prima prova scritta intermedia A.A. 2000/01

Esercizio 1

Si consideri il sistema meccanico riportato in figura:



Il sistema è costituito da un corpo di massa M, soggetto ad una forza esterna F, ad una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità v ($D\,v$) e ad una forza di richiamo elastico **non lineare proporzionale al cubo della posizione p** ($K\,p^3$).

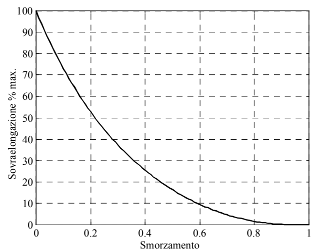
1.1 Si scrivano le equazioni del sistema dinamico corrispondente (si assuma come uscita la posizione p).

1.2 Posto $M = 1$, $D = 4$, $K = 3$, si determini il punto di equilibrio del sistema in presenza di una forza costante $F = \bar{F} = 24$.

1.3 Si discuta la stabilità dello stato di equilibrio determinato al punto precedente.

1.4 Si supponga ora che, a partire dalla precedente condizione di equilibrio, la forza F sia sottoposta ad una piccola perturbazione a scalino, $\delta F(t) = \mathrm{sca}(t)$.

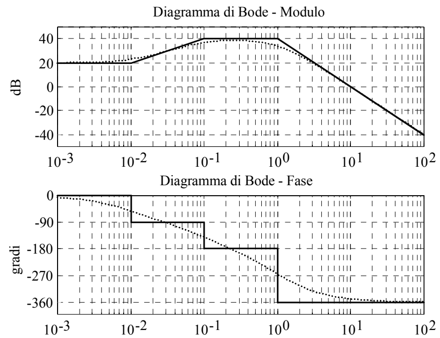
Si determinino approssimativamente il valore di regime raggiunto dalla corrispondente variazione di posizione, il tempo di assestamento al 99% e la sovraelongazione percentuale massima (si riporta a lato il diagramma sovraelongazione percentuale massima/smorzamento).



Esercizio 2

2.1 Si dia la definizione di risposta in frequenza di un sistema dinamico, indicando in particolare la classe dei sistemi (lineari e/o non lineari, tempo invarianti e/o tempo varianti, asintoticamente stabili e/o non asintoticamente stabili) a cui si applica la definizione.

2.2 Si consideri ora un sistema dinamico di ordine 3 avente i diagrammi di Bode, effettivi e asintotici, della risposta in frequenza riportati in figura:



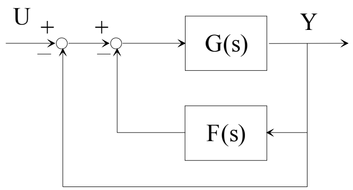
Si tracci il diagramma polare qualitativo della risposta in frequenza del sistema.

2.3 Si determini un'espressione della funzione di trasferimento compatibile con i diagrammi sopra riportati e si dica se il sistema è asintoticamente stabile e a fase minima.

2.4 Si supponga che il sistema sia soggetto ad un ingresso ad onda quadra di periodo $T = 10\pi$. Si determinino approssimativamente, nel modo più rapido possibile, il fattore di amplificazione (o di attenuazione) dell'armonica principale dell'ingresso e lo sfasamento dell'armonica stessa.

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico descritto dal seguente schema a blocchi:



3.1 Si determini la funzione di trasferimento $H(s) = Y(s)/U(s)$.

3.2 Posto $G(s) = \dfrac{1}{(1+s)^2}$, $F(s) = \dfrac{k}{s}$, si determini l'insieme dei valori del parametro k per i quali il sistema di funzione di trasferimento $H(s)$ è asintoticamente stabile.

3.3 Posto k=2 e detta $y(t)$ la risposta allo scalino unitario in u, si determinino $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$ e, se esiste, $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

3.4 Si scriva l'espressione generale del guadagno statico di un sistema dinamico lineare e invariante in termini delle matrici A, B, C e D che lo definiscono e, senza eseguire conti, si dica quanto vale il guadagno statico per il sistema di funzione di trasferimento $H(s)$.

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Il sistema meccanico è retto dall'equazione:

$$M\dot{v} + Dv + Kp^3 = F\,.$$

Posto $x_1 = p$, $x_2 = v$, $u = F$, si scrivono le equazioni del sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{K}{M}x_1{}^3 - \dfrac{D}{M}x_2 + \dfrac{1}{M}u \end{cases}$$
$$y = x_1$$

1.2

Annullando le derivate, si trova l'unico stato di equilibrio:

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ -3\bar{x}_1{}^3 - 4\bar{x}_2 + 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 2 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}.$$

1.3

Si linearizza il sistema nell'intorno del punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \delta\dot{x}_1 = \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 = -3\left(3\bar{x}_1{}^2\right)\delta x_1 - 4\delta x_2 + \delta u = -36\delta x_1 - 4\delta x_2 + \delta u \end{cases}$$
$$\delta y = \delta x_1$$

La matrice dinamica del sistema linearizzato è:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -36 & -4 \end{bmatrix},$$

ed il suo polinomio caratteristico è:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 36\,.$$

Poiché il polinomio, di secondo grado, ha tutti i coefficienti positivi, i due autovalori hanno parte reale negativa. Pertanto il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, e quindi lo è anche il punto di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

1.4

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è la seguente:

$$\frac{\delta y}{\delta u} = \frac{1}{s^2 + 4s + 36} = \mu\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

con:

$$\mu = \frac{1}{36},\quad \omega_n = 6,\quad \zeta = \frac{1}{3}.$$

Il valore di regime della variazione di posizione, a seguito dell'ingresso $\delta u(t) = \mathrm{sca}(t)$, è quindi pari a μ=1/36.

Dal diagramma si trova che per uno smorzamento ζ=1/3 la sovraelongazione percentuale massima è di circa il 30%.

Infine, il tempo di assestamento al 99% si può calcolare approssimativamente come:

$$T_{a1} = \frac{\ln(100)}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4.6}{2} = 2.3\,.$$

Esercizio 2

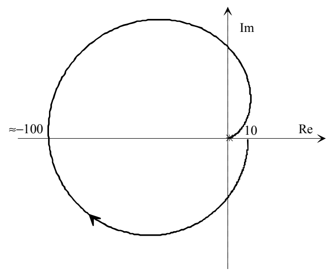
2.1

Dato un sistema *lineare, tempo invariante* di funzione di trasferimento $G(s)$ si definisce risposta in frequenza la funzione complessa di variabile reale ω data da $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$.

La definizione non richiede l'asintotica stabilità del sistema.

2.2

Diagramma polare:



2.3

Il sistema ha tipo zero (pendenza iniziale del modulo nulla) e guadagno pari a 10 (modulo iniziale 20 dB e fase iniziale nulla). Ha uno zero a parte reale positiva alla pulsazione 0.01, un polo a parte reale negativa alla pulsazione 0.1 e due poli a parte reale negativa alla pulsazione 1:

$$G(s) = 10\frac{1 - 100s}{(1 + 10s)(1 + s)^2}\,.$$

Essendo tutti e tre i poli a parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile, ma non è a fase minima per via dello zero a parte reale positiva.

2.4

La pulsazione dell'armonica principale dell'ingresso è pari a:

$$\overline{\omega} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10\pi} = 0.2\,\mathrm{rad/s}.$$

Essendo il sistema asintoticamente stabile vale il teorema della risposta in frequenza. Il fattore di amplificazione e lo sfasamento si leggono direttamente sui diagrammi di Bode:

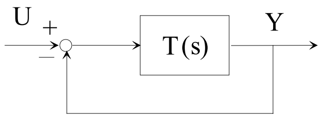
Amplificazione: $\left|G(0.2j)\right| \approx 100$ (il diagramma del modulo vale circa 40 dB)

Sfasamento: $\angle G(0.2j) \approx -180°$.

Esercizio 3

3.1

Lo schema a blocchi presenta dua anelli di retroazione negativa innestati. Elaborando quello più interno si ottiene:



con:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)}.$$

Pertanto:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{T(s)}{1+T(s)} = \frac{\dfrac{G(s)}{1+G(s)F(s)}}{1+\dfrac{G(s)}{1+G(s)F(s)}} = \frac{G(s)}{1+G(s)+G(s)F(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)\left[1+F(s)\right]}.$$

3.2

Sostituendo le espressioni date di G e F si ha:

$$H(s) = \frac{1/(1+s)^2}{1+1/(1+s)^2\left[1+k/s\right]} = \cdots = \frac{s}{s^3+2s^2+2s+k}.$$

Applichiamo il criterio di Routh al denominatore, costruendo la tabella di Routh:

1	2	0
2	k	0
$\frac{4-k}{2}$	0	
k		

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo gli elementi della prima colonna della tabella sono tutti positivi. Si ottiene quindi:

$$\begin{cases} 4-k>0 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0<k<4.$$

3.3

Applicando il teorema del valore iniziale si ottiene:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty}\left[sY(s)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[s\frac{H(s)}{s}\right] = \lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^3+2s^2+2s+2} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty}\left[s\left(sY(s)-y(0)\right)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[s^2Y(s)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[sH(s)\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{s^2}{s^3+2s^2+2s+2} = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s\to\infty}\left[s\left(ssY(s)-\dot{y}(0)\right)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[s^3Y(s)\right] = \lim_{s\to\infty}\left[s^2H(s)\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{s^3}{s^3+2s^2+2s+2} = 1$$

Poiché per k=2 il sistema è asintoticamente stabile, si può applicare il teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0}\left[sY(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\frac{H(s)}{s}\right] = \lim_{s\to 0} H(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s^3+2s^2+2s+2} = 0.$$

3.4

L'espressione generale del guadagno statico, valida per sistemi con matrice $\boldsymbol{A}$ non singolare, è:

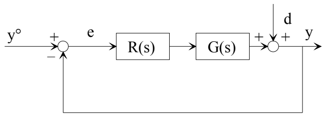
$$-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}.$$

Poiché questa espressione coincide con il valore assunto dalla funzione di trasferimento in s=0, nel nostro caso il guadagno statico vale $H(0) = 0$.

Seconda prova scritta intermedia A.A. 2000/01

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{10}{(1+0.33s)^2(1+0.02s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$, con $|A| < 2$, ed in assenza del disturbo d, l'errore e a transitorio esaurito soddisfi la limitazione:

$|e_\infty| \le 0.03$

- Un disturbo d con componenti armoniche a pulsazioni non superiori a 2 *rad/s* sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 10 *rad/s*.

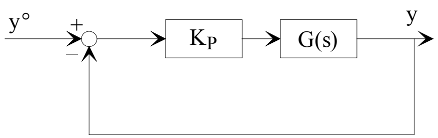
1.2 Si dica, giustificando la risposta se il sistema di controllo è in grado di inseguire correttamente il seguente segnale di riferimento:

$$y^o(t) = 2 + 3\sin(t) + 4\sin(100t)$$

1.3 Si supponga di volere realizzare il regolatore in tecnologia digitale: si calcoli il decremento di margine di fase associato al ritardo intrinseco di conversione, quando si adotta come pulsazione di Nyquist il valore Ω_N = 50 rad/s.

Esercizio 2

Si consideri il sistema di controllo di figura,



in cui:

$$G(s) = \frac{1}{s}\frac{1-s}{(1+s)^2},\ K_P > 0.$$

2.1 Si determini con il luogo delle radici il massimo valore $\overline{K}_P$ di K_P per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.2 Si tracci, per $K_P = \overline{K}_P$, il diagramma di Nyquist qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello del sistema.

2.3 Sempre per $K_P = \overline{K}_P$, si determini il periodo dell'oscillazione permanente che si manifesta nel sistema in anello chiuso sottoposto ad una perturbazione (ad esempio uno scalino in $y°$).

2.4 Si supponga ora di progettare il controllore proporzionale K_P con le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso, ossia si ponga $K_P = 0.5\overline{K}_P$. Si tracci anche in questo caso il diagramma di Nyquist qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello del sistema, avendo cura di indicare sul diagramma, con precisione, il punto corrispondente alla pulsazione critica.

Esercizio 3

Si consideri un segnale a tempo discreto $y^*(k)$ e la relativa trasformata Zeta $Y^*(z)$

3.1 Si enuncino i teoremi del valore iniziale e del valore finale a tempo discreto, con le eventuali ipotesi di applicabilità.

3.2 Si supponga che il segnale $y^*(k)$ sia in realtà il risultato del campionamento di un segnale $y(t)$ a tempo continuo, con passo di campionamento pari a T. Si dica sotto quali ipotesi è possibile ricostruire il segnale y a partire da y^* e si scriva la formula che dà esplicitamente la ricostruzione.

3.3 Si consideri ora il sistema di funzione di trasferimento:

$$G^*(z) = \frac{z-1}{z^2 - 6z + 8}.$$

Sapendo che il sistema è in realtà un sistema a segnali campionati (serie di uno ZOH, di un sistema a tempo continuo e di un campionatore sincrono e in fase con lo ZOH), con periodo di campionamento T=1, si determinino i poli del sistema originario a tempo continuo.

3.4 Si determinino i primi quattro campioni della risposta di G^* allo scalino unitario.

Soluzioni

Esercizio 1

1.1

Per ottenere errore a transitorio esaurito finito, non nullo, in presenza di una variazione a scalino del riferimento, è sufficiente una funzione di trasferimento d'anello di tipo zero, e quindi un regolatore di tipo zero. L'errore risulterà pari, in modulo, a:

$$|e_\infty| = \frac{|A|}{1+10\mu_R} < \frac{2}{1+10\mu_R} \le 0.03\,,$$

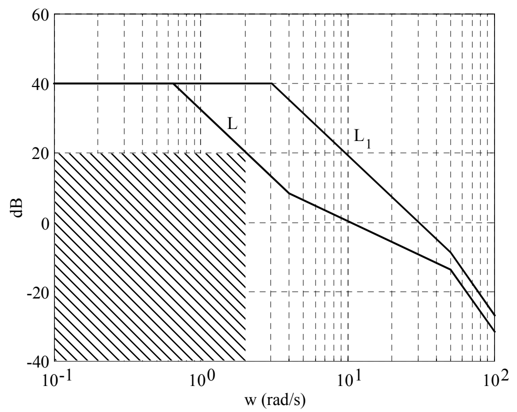
da cui $\mu_R \ge 6.56$. Scelto $\mu_R = 10$, concludiamo il progetto statico ponendo formalmente:

$$R_1(s) = 10 \quad \Rightarrow \quad L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{100}{(1+0.33s)^2(1+0.02s)}\,,$$

Il requisito di attenuazione del disturbo in linea di andata comporta, come è noto, un vincolo sul modulo di $L(j\omega)$:

$$|L(j\omega)| \ge 10 \quad \left[|L(j\omega)|_{dB} \ge 10\right], \quad \forall \omega < 2\,.$$

Il tracciamento del diagramma del modulo di L_1 evidenzia che occorre procedere al progetto dinamico per soddisfare i requisiti sul margine di fase. Per il tracciamento del modulo di L, scegliendo di tagliare alla pulsazione 10, occorre introdurre uno zero, per esempio a pulsazione 0.4, per garantire l'attenuazione del disturbo. In bassa frequenza si raccordano i diagrammi, mentre in alta frequenza si può mantenere il polo alla pulsazione 50, aggiungendone un altro.



Si ottiene quindi $\omega_c = 10$, mentre la fase critica e il margine di fase valgono:

$$\varphi_c = -2\times\arctan(10/0.65) + \arctan(10/4) - 2\times\arctan(10/50) = -2\times 86° + 68° - 2\times 11.3° = -126.6°$$

$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 180° - 126.6° = 53.4°$$

Le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = 100\frac{(1+s/4)}{(1+s/0.65)^2(1+s/50)^2} = 100\frac{(1+0.25s)}{(1+1.54s)^2(1+0.02s)^2}\,,$$

da cui si ottiene l'espressione della funzione di trasferimento del regolatore:

$$R(s) = R_1(s)\frac{L(s)}{L_1(s)} = 10\frac{(1+0.25s)(1+0.33s)^2}{(1+1.54s)^2(1+0.02s)}\,.$$

1.2

Il segnale di riferimento presente un'armonica a pulsazione (100) di molto superiore all'estremo superiore della banda passante del sistema (10). Pertanto il segnale non può essere riprodotto correttamente in uscita.

1.3

$$\Delta\varphi_m = -\frac{T}{2}\omega_c\frac{180°}{\pi} = -90°\frac{\omega_c}{\Omega_N} = -90°\times\frac{10}{50} = -18°\,.$$

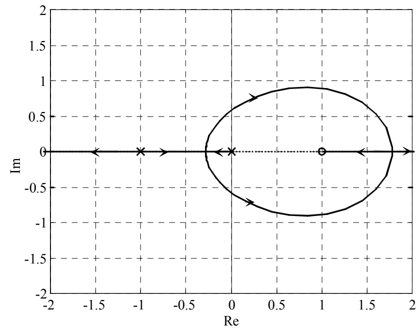
Esercizio 2

2.1

La funzione di trasferimento d'anello è:

$$L(s) = K_P G(s) = \frac{K_P}{s}\frac{1-s}{(1+s)^2} = \rho\frac{s-1}{s(s+1)^2}\,,$$

con $\rho = -K_P < 0$. Occorre quindi tracciare il luogo inverso:

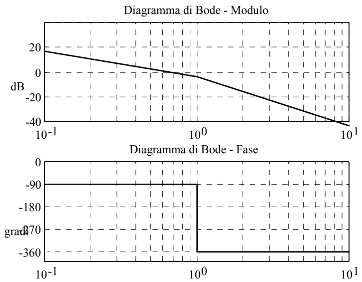


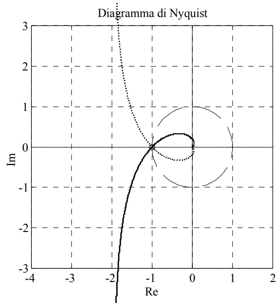
Per determinare il massimo valore di K_P, occorre determinare il valore di ρ per cui due dei tre rami del luogo entrano nel semipiano destro. Sfruttando la regola di conservazione della somma delle parti reali dei poli, possiamo equivalentemente calcolare il valore di ρ con riferimento al punto -2 (quando due poli hanno parte reale nulla, il terzo ha parte reale -2). Eseguendo la punteggiatura in questo punto:

$$\overline{K}_P = -\rho_m = -\left(-\frac{1\times1\times2}{3}\right) = \frac{2}{3}\,.$$

2.2

Per il tracciamento del diagramma di Nyquist, ci si può appoggaire al tracciamento dei diagrammi di Bode asintotici:





E' importante osservare che, essendo per $K_P = \overline{K}_P$ il sistema al limite di stabilità, il diagramma di Nyquist passa per il punto -1.

2.3

La pulsazione dell'oscillazione si trova in corrispondenza del punto in cui il diagramma polare di L passa per il punto -1, ossia la fase di L vale $-180°$

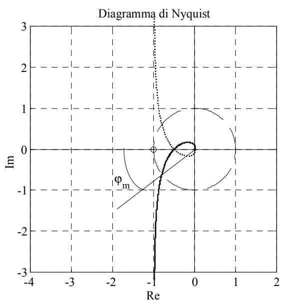
$$\angle L(j\overline{\omega}) = -90° - 3\arctan(\overline{\omega}) = -180° \quad \Rightarrow \quad \overline{\omega} = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Il periodo dell'oscillazione vale quindi:

$$\overline{T} = \frac{2\pi}{\overline{\omega}} = 2\pi\sqrt{3} \approx 10.88\,.$$

2.4

Il diagramma di Nyquist ha la stessa forma del precedente, ma taglia il semiasse reale negativo nel punto -0.5 (avendo dimezzato il guadagno d'anello):



La pulsazione critica corrisponde al punto in cui il diagramma polare incontra la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. Per individuare questo punto con precisione, occorre calcolare il margine di fase. Dai diagrammi di Bode si deduce $\omega_c \approx 0.33$, mentre:

$$\varphi_c = -90° - 3\arctan(\omega_c) = -90° - 3\arctan(0.33) = -145° \quad \Rightarrow \quad \varphi_m = 35°\,.$$

Esercizio 3

3.1

Teorema del valore iniziale:

$$y^*(0) = \lim_{z\to\infty} Y^*(z)\,.$$

Teorema del valore finale:

Se $Y^*(z)$ è razionale, e tutti i suoi poli sono a modulo minore di 1 o in $z = 1$,

$$\lim_{k\to\infty} y^*(k) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)Y^*(z)\right]$$

3.2

Il segnale soggetto a campionamento deve essere a banda limitata, ossia il suo contenuto armonico deve essere sostanzialmente nullo per pulsazioni superiori a un estremo Ω_y, e tale estremo deve essere inferiore alla pulsazione di Nyquist $\Omega_N = \pi/T$.

La ricostruzione è data dalla formula di Shannon:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[y^*(k)\frac{\sin(\Omega_N t - k\pi)}{\Omega_N t - k\pi}\right]$$

3.3

Il legame tra i poli s_i del sistema a tempo continuo e i poli z_i del sistema a tempo discreto è dato dalla trasformazione di campionamento:

$$z_i = e^{s_i T}\,.$$

Poiché i poli di $G^*(z)$ sono $z_1 = 2$, $z_2 = 4$, i poli del sistema a tempo continuo saranno:

$$s_1 = \frac{\ln z_1}{T} = \ln 2, \quad s_2 = \frac{\ln z_2}{T} = \ln 4\,.$$

(in realtà, in assenza di ulteriori ipotesi, potrebbero anche esserci poli complessi e coniugati con parte reale s_1 o s_2 e parte immaginaria multipla di 2π).

3.4

La trasformata della risposta allo scalino è:

$$Y^*(z) = G^*(z)\frac{z}{z-1} = \frac{z}{z^2 - 6z + 8}\,.$$

Con il metodo della lunga divisione si ottiene:

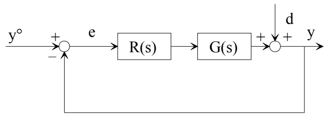
$$Y^*(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 8} = z^{-1} + 6z^{-2} + 28z^{-3} + \cdots$$

Pertanto $y^*(0) = 0$, $y^*(1) = 1$, $y^*(2) = 6$, $y^*(3) = 28$.

24 Giugno 1999

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = 10\dfrac{1-2s}{(1+10s)^2(1+0.5s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t)$ = 2sca(t), ed in assenza del disturbo d, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) soddisfi la limitazione:

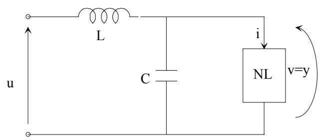
$$|e_\infty| \le 0.03$$

- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50° e la banda passante sia la più ampia possibile.

1.2 Con il regolatore così progettato, si determini l'insieme delle pulsazioni $\overline{\omega}$ per cui un disturbo in linea di andata $d(t) = \sin(\overline{\omega}t)$ sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.

Esercizio 2

Si consideri la seguente rete elettrica:



in cui NL è un elemento che, avendo ai suoi capi una tensione v, risulta attraversato da una corrente $i = v^3$.

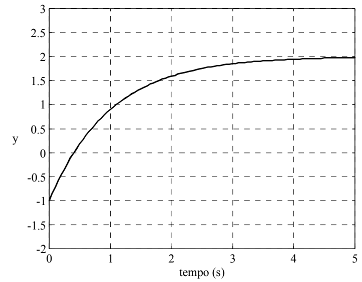
2.1 Si scrivano le equazioni del sistema dinamico che descrive il comportamento della rete elettrica.

2.2 Posto $L = C = 1$, si determinino eventuali punti di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante $u(t) = \overline{u} = 2$.

2.3 Si discuta la stabilità degli eventuali punti di equilibrio trovati al punto precedente.

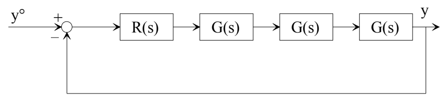
Esercizio 3

Un sistema dinamico presenta la risposta allo scalino unitario riportata in figura:



3.1 Si determini l'espressione $G(s)$ della funzione di trasferimento del sistema.

3.2 Si consideri ora il seguente sistema retroazionato:



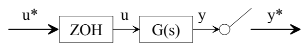
in cui $R(s) = \dfrac{k}{s}$.

Si tracci il luogo delle radici al variare di k, per $k > 0$.

3.3 Sulla base del luogo precedentemente tracciato, si spieghi se è possibile rendere il sistema di controllo arbitrariamente veloce (ossia aumentarne arbitrariamente la banda passante).

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema a segnali campionati:



dove $G(s) = \dfrac{5s}{(s-2)(s+3)}$, e il tempo di campionamento T vale 1.

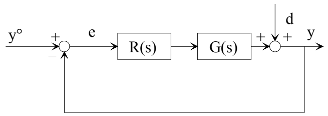
4.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento $G^*(z)$ da u^* a y^*.

4.2 Si commenti il legame tra i poli di $G(s)$ e i poli di $G^*(z)$, estendendo il risultato al caso generale.

9 Luglio 1999

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+0.5s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t)$ = Asca(t), e di un disturbo $d(t)$ = Dsca(t), con $|A| \leq 2$, $|D| \leq 1$, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) soddisfi la limitazione:

$$|e_\infty| \leq 0.05$$

- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 60° e la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 0.5 *rad/s*.
- Il regolatore sia di ordine non superiore a due.

1.2 Con il regolatore così progettato, si tracci il diagramma polare qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello, individuando approssimativamente sul diagramma il punto corrispondente a $\omega = \omega_c$.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2u(t)$$
$$y(t) = 3x(t)$$

2.1 Si scrivano le espressioni dei movimenti liberi di stato e uscita a partire da un generico stato iniziale $x(0) = x_0$.

2.2 Si scrivano le espressioni dei movimenti forzati di stato e uscita quando $u(t) = \sin(t)$. [2]

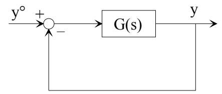
2.3 Si determini l'espressione che assume l'uscita complessiva quando $t \to \infty$.

2.4 Si verifichi il risultato del punto precedente mediante il teorema della risposta in frequenza.

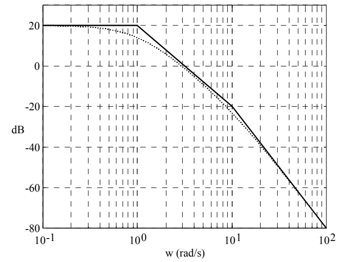
[2]Si ricorda che $\int e^\tau \sin(\tau) d\tau = \dfrac{e^\tau(\sin(\tau) - \cos(\tau))}{2}$

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema in retroazione:



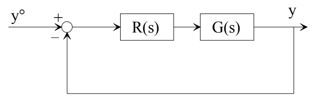
in cui $G(s)$ è un sistema dinamico, a fase minima, il cui diagramma del modulo della risposta in frequenza è riportato di seguito:



3.1 Si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y allo scalino in $y°$.

3.2 Si determini approssimativamente il margine di guadagno del sistema in anello chiuso.

3.3 Si consideri ora il seguente sistema di controllo:



dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema del punto 3.1. Si supponga di voler determinare il regolatore nella classe dei regolatori PID, utilizzando le regole di Ziegler e Nichols ad anello chiuso. Si determinino i valori del periodo $\overline{T}$ dell'oscillazione critica ed il valore $\overline{K}_P$ del guadagno critico.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + u^2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k)x_2(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k)x_3(k) \end{cases}$$

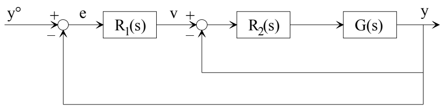
4.1 Si determini il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u(k) = \overline{u} = 2$.

4.2 Si discuta la stabilità del suddetto punto di equilibrio.

23 Luglio 1999

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



in cui $G(s) = \dfrac{1}{(s-2)(s+1)}$.

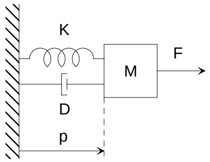
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R_2(s)$ del regolatore dell'anello interno in modo tale che il sistema di funzione di trasferimento $Y(s)/V(s)$ (ossia l'anello interno chiuso) sia asintoticamente stabile, con due poli coincidenti in $s = -2$.

1.2 Si progetti quindi il regolatore $R_1(s)$ dell'anello esterno nella classe dei regolatori *integrali*, in modo tale che il margine di fase φ_m valga 30°

1.3 Con i regolatori così progettati, si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di *y* allo scalino in *y*°.

Esercizio 2

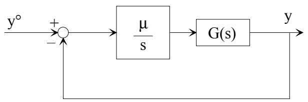
Si consideri il seguente sistema meccanico (massa, molla e smorzatore):



2.1 Si determini la funzione di trasferimento $G(s)$ dalla forza *F* alla posizione *p*.

2.2 Posto $M = 1$, $D = 3$, $K = 2$, si scriva l'espressione analitica della risposta della posizione *p* allo scalino unitario sulla forza *F*.

2.3 Si consideri ora il seguente sistema di controllo:

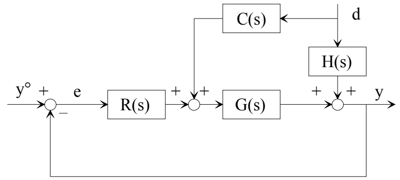


in cui $G(s)$ è la funzione di trasferimento del punto 2.1, mentre $\mu > 0$.

Si determini l'intervallo di valori di μ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:



in cui:

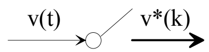
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}, \quad R(s) = 10, \quad H(s) = \frac{1}{s+2}.$$

3.1 Posto $C(s) = k$, si determini *k* in modo tale che un disturbo $d(t) = 2\text{sca}(t)$ abbia effetto nullo a transitorio esaurito sull'uscita *y*.

3.2 Si determini un'espressione della funzione di trasferimento del compensatore $C(s)$ in modo tale che il sistema nel suo complesso sia asintoticamente stabile e che un disturbo $d(t) = 2\sin(t)$ abbia effetto nullo a transitorio esaurito sull'uscita *y*.

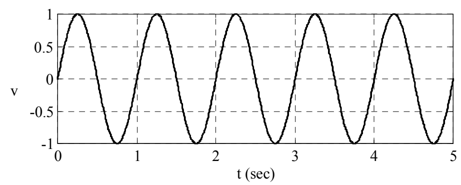
Esercizio 4

Si consideri un campionatore ideale, con periodo di campionamento *T*:



4.1 Si scriva la relazione che intercorre tra la trasformata di Fourier $V(j\omega)$ del segnale di ingresso e la trasformata di Fourier $V^*(e^{j\theta})$ del segnale di uscita.

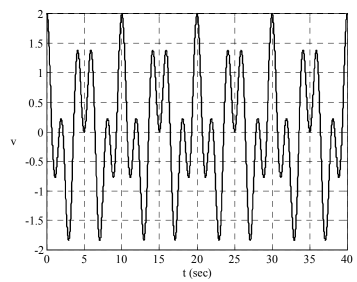
4.2 Si campioni il seguente segnale sinusoidale con un periodo di campionamento scelto in modo tale da mettere in evidenza il fenomeno dell'*aliasing* (ci si limiti a segnare i campioni sulla figura).



4.3 Si enunci il teorema di Shannon (o del campionamento).

4.4 Si consideri ora il seguente segnale a tempo continuo, ottenuto sommando due sinusoidi:

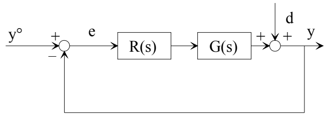
Si determini il massimo valore del periodo di campionamento per la conversione analogico/digitale corretta (senza aliasing) del segnale.



3 Settembre 1999

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{15}{s(1+s)(1+0.2s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$, con A costante arbitraria, e di un disturbo $d(t) = \sin(0.2t)$, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) soddisfi la limitazione:

$$|e_\infty(t)| \le 0.1$$

- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 40° e la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 2 *rad/s*.

1.2 Si supponga ora che la funzione di trasferimento del processo sotto controllo sia in realtà affetta da un ritardo di tempo:

$$G(s) = \frac{15}{s(1+s)(1+0.2s)} e^{-s\tau}$$

Si determini il massimo valore che può assumere il ritardo τ perché il sistema in anello chiuso, con il regolatore progettato al punto 1.1, rimanga asintoticamente stabile.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - x_3(t) + 2u(t) \end{cases}$$
$$y(t) = 3x_1(t)$$

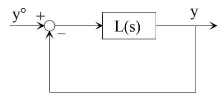
2.1 Si determini l'insieme dei valori del parametro α per cui il sistema è asintoticamente stabile.

2.2 Posto $\alpha = -2$, si determini il guadagno statico del sistema.

2.3 Sempre per $\alpha = -2$ si determinino le caratteristiche asintotiche, per $t \to \infty$, del movimento libero e del movimento forzato dell'uscita quando $u(t) = 2\text{sca}(t)$.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema in retroazione:



in cui:

$$L(s) = \rho \frac{s-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} .$$

3.1 Si tracci il luogo delle radici diretto associato a $L(s)$.

3.2 Si tracci il luogo delle radici inverso associato a $L(s)$.

3.3 Per uno dei due casi ($\rho>0$ oppure $\rho<0$), a scelta, sulla base del luogo tracciato, si determini l'insieme dei valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Esercizio 4

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{z+2}{z(z+1)(2z+1)}$$

4.1 Si determini il guadagno di G.

4.2 Si determini il tipo di G.

4.3 Si discuta la stabilità del sistema.ù

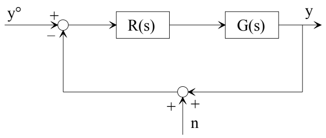
4.4 Si dica se il sistema è a fase minima o no.

4.5 Si determinino i primi 5 campioni della risposta del sistema allo scalino unitario.

14 Settembre 1999

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \frac{100}{s}\frac{1-0.1s}{1+s}$.

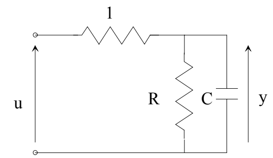
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- Un disturbo n, trasformabile secondo Fourier, avente componenti armoniche significative solo a pulsazioni maggiori di $\overline{\omega} = 10 rad/s$, sia attenuato sull'uscita y almeno di un fattore 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 40° e la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 2 *rad/s*.

1.2 Si determini un valore adeguato del tempo di campionamento per la corretta realizzazione digitale del controllore.

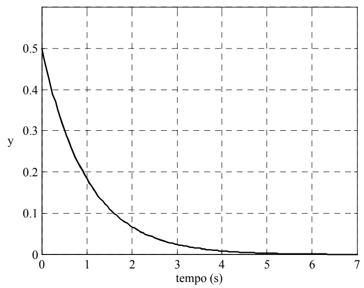
Esercizio 2

Con riferimento alla seguente rete elettrica:



2.1 Si determini la funzione di trasferimento dalla tensione u alla tensione y.

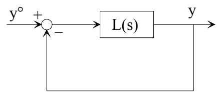
2.2 La figura seguente mostra la risposta di y all'impulso in u:



Sulla base del grafico, si determinino i valori di R e C.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema di controllo:



3.1 Si spieghi che cosa si intende per "diagramma di Nyquist" associato a L.

3.2 Si enunci il criterio di Nyquist, spiegando il significato di tutti i simboli utilizzati.

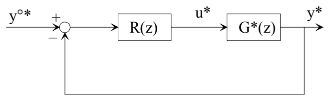
3.3 Sia ora:

$$L(s) = \frac{k}{s}\frac{1-s}{1+s}, \text{ con } k > 0.$$

Si determini, con il criterio di Nyquist, l'insieme dei valori di k per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Esercizio 4

4.1 Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G^*(z) = \frac{2z+1}{z^2-2z},$$

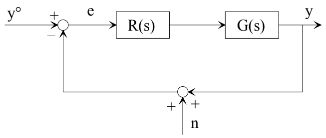
si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y^* ad uno scalino in $y°^*$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

4.2 Si discuta la stabilità del regolatore $R(z)$ determinato al punto precedente.

18 Gennaio 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



in cui $G(s) = \dfrac{10}{s}\dfrac{30}{s+30}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In assenza del disturbo n, l'errore e a transitorio esaurito, e_∞, sia nullo quando $y°(t)$ = sca(t)
- Un disturbo n, trasformabile secondo Fourier, avente componenti armoniche significative solo a pulsazioni maggiori di $\overline{\omega} = 60 rad/s$, sia attenuato sull'uscita y almeno di un fattore 100.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 60° e la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale di 3 *rad/s*.
- Il regolatore sia di ordine 1.

1.2 Si tracci l'andamento qualitativo del diagramma polare associato alla funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ risultante dal precedente progetto, evidenziando sul grafico il punto corrispondente alla pulsazione critica ω_c.

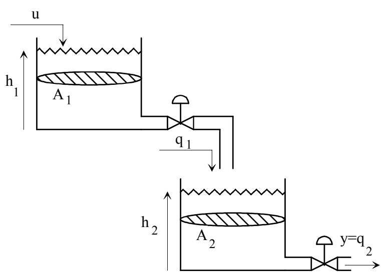
Esercizio 2

Si consideri il sistema idraulico riportato in figura:

Il sistema è costituito da due serbatoi di sezione costante collegati da una valvola. Anche il secondo serbatoio presenta una valvola in uscita. Le due valvole, entrambe ad apertura costante, stabiliscono tra la portata di liquido che le attraversa e il livello nel serbatoio a monte le relazioni:

$$q_1 = \alpha_1\sqrt{h_1}, \quad q_2 = \alpha_2\sqrt{h_2}\ .$$

Si assuma come *ingresso* la portata entrante u e come *uscita* del sistema la portata in uscita dal secondo serbatoio $y = q_2$.



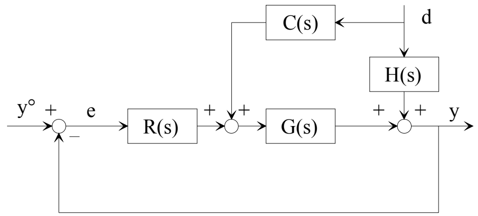
2.1 Posto $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, si determini il punto di equilibrio del sistema corrispondente all'ingresso costante $u = \overline{u} = 3$.

2.2 Si discuta la stabilità dello stato di equilibrio determinato al punto precedente.

2.3 Si supponga ora che, a partire dal punto di equilibrio determinato precedentemente, il sistema venga sollecitato con una piccola variazione a scalino dell'ingresso u. Si tracci l'andamento qualitativo dell'uscita y corrispondente a tale perturbazione.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}, \quad H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}\ .$$

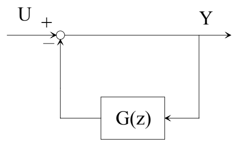
3.1 Si determini il regolatore $R(s)$ in modo tale che il sistema in anello chiuso abbia due poli con pulsazione naturale $\omega_n = 3\sqrt{2}$ e smorzamento ζ=0.7.

3.2 Si supponga di dover progettare il compensatore $C(s)$ in modo tale che il sistema nel suo complesso sia asintoticamente stabile e che un disturbo $d(t) = \sin(t)$ abbia effetto nullo a transitorio esaurito sull'uscita y. Si scrivano le condizioni che devono essere soddisfatte dalla risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $C(s)$ (non è richiesta l'espressione di $C(s)$).

Esercizio 4

4.1 Con riferimento ad un generico sistema dinamico lineare a tempo discreto, si enuncino le condizioni di asintotica stabilità, stabilità semplice ed instabilità del sistema

4.2 Si consideri ora il seguente sistema in retroazione:



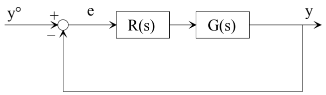
in cui $G(z) = \dfrac{z-3}{z^3}$.

Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso.

31 Gennaio 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1}{(1+100s)(1+2s+s^2)} e^{-s}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\mathrm{sca}(t)$, con $|A| \leq 1$, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) soddisfi la limitazione:

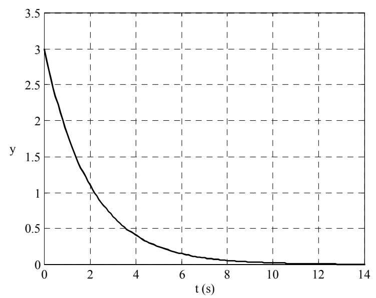
$|e_\infty| \leq 0.015$

- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50° e la pulsazione critica ω_c sia la massima possibile.
- Il regolatore sia di ordine uno.

1.2 Si tracci l'andamento qualitativo del diagramma polare associato alla funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ risultante dal precedente progetto, evidenziando sul grafico il punto corrispondente alla pulsazione critica ω_c.

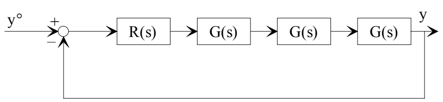
Esercizio 2

Un sistema dinamico presenta la risposta all'*impulso* riportata di seguito:



2.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

2.2 Si consideri ora il seguente sistema retroazionato:



in cui $R(s) = k, \quad k > 0.$

Utilizzando il metodo del luogo delle radici, si determini il massimo valore k_{max} di k per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.3 Posto quindi $k = k_{max}/2$, si determini il margine di guadagno del sistema retroazionato risultante.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema dinamico lineare tempo invariante:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t) + \boldsymbol{Du}(t)$$

3.1 Si scrivano le espressioni del movimento libero di stato e uscita.

3.2 Si scrivano le espressioni del movimento forzato di stato e uscita.

3.3 Sia ora:

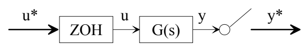
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = 0 \ .$$

Si determini l'espressione del movimento libero dell'uscita a partire dalla condizione iniziale $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}'$.

3.4 Con i valori numerici assegnati al punto precedente, si determini il valore a cui tende y quando $u(t) = 3\ \mathrm{sca}(t)$.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema a segnali campionati:



dove $G(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$, e il tempo di campionamento T vale 1.

4.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento $G^*(z)$ da u^* a y^*.

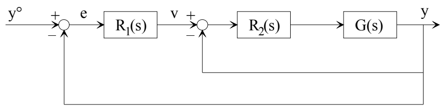
4.2 Si determini il guadagno del sistema di funzione di trasferimento $G^*(z)$.

4.3 Si dica se il sistema di funzione di trasferimento $G^*(z)$ è a fase minima.

18 Febbraio 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



in cui $G(s) = \dfrac{10}{(s-3)(s+1)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R_2(s)$ del regolatore dell'anello interno in modo tale che il sistema di funzione di trasferimento $Y(s)/V(s)$ (ossia l'anello interno chiuso) sia asintoticamente stabile, con due poli coincidenti in $s = -1$.

1.2 Si progetti quindi il regolatore $R_1(s)$ dell'anello esterno nella classe dei regolatori *integrali* in modo tale che il margine di fase φ_m sia uguale a 50°.

Esercizio 2

2.1 Con riferimento ad un generico sistema dinamico tempo invariante:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

si dia la definizione di stabilità di un movimento.

2.2 Si dica per quale categoria di sistemi dinamici tempo invarianti ha senso parlare di "stabilità del sistema" e per quale motivo.

2.3 Si consideri ora il seguente sistema dinamico:

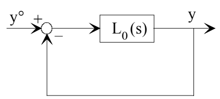
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + \alpha x_2 - x_3 + u \end{cases}$$
$$y = x_3$$

Si individui l'insieme dei valori di α per cui il sistema è asintoticamente stabile.

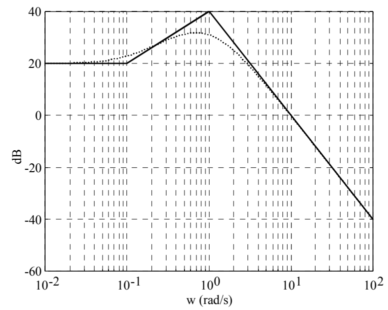
2.4 Si dica quindi se per l'intervallo di valori individuato al punto precedente il sistema è anche a fase minima

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:



in cui $L_0(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile, a fase minima e guadagno positivo, il cui diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza è riportato di seguito:



3.1 Si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y allo scalino in $y°$.

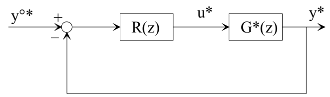
3.2 Si tracci il diagramma polare qualitativo della risposta in frequenza associata a $L_0(s)$.

3.3 Si supponga ora che sia presente un ritardo nell'anello, ossia che la funzione di trasferimento d'anello sia $L(s) = e^{-s\tau} L_0(s)$.

Si determini il massimo valore del ritardo τ per cui il sistema in anello chiuso rimane asintoticamente stabile.

Esercizio 4

4.1 Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G^*(z) = \frac{1}{z-2} \ ,$$

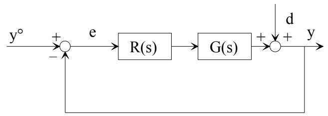
si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di $y*$ ad uno scalino in $y°*$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

4.2 Si dica se il regolatore $R(z)$ determinato al punto precedente è a fase minima.

22 Giugno 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1}{(1+0.1s)(1+s)^2}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$, con $|A| \le 3$, ed in assenza del disturbo d, l'errore e a transitorio esaurito soddisfi la limitazione:

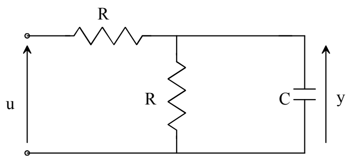
$|e_\infty| \le 0.05$

- Un disturbo $d(t)$ avente componenti armoniche significative solo per $\omega \le 0.3$ rad/s sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 1 *rad/s*.
- *L' ordine (numero di poli) del regolatore sia minimo*.

1.2 Con il regolatore così progettato, si tracci l'andamento qualitativo del diagramma polare associato a L, avendo cura di indicare sul diagramma il punto corrispondente a ω_c.

Esercizio 2

2.1 Con riferimento alla seguente rete elettrica,



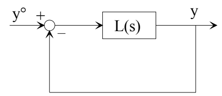
in cui RC = 1, si determini l'espressione della funzione di trasferimento dall'ingresso u all'uscita y.

2.2 Si determini l'espressione, a transitorio esaurito, di y quando u assume l'andamento $u(t) = \sin(t) + 2$.

Esercizio 3

3.1 Si citino, senza aggiungere altri commenti, due ragioni che possono indurre, in un generico progetto del controllore, a scegliere una banda passante ampia, e due che invece possono indurre a mantenerla limitata.

3.2 Con riferimento ora al seguente sistema di controllo:



in cui $L(s) = \mu \dfrac{(1+10s)^2}{(1+s)^3}$,

si determini il valore $\bar{\mu}$ di μ in modo tale che la banda passante del sistema di controllo abbia come estremo superiore la pulsazione 1000 *rad/s*.

3.3 Si tracci il luogo delle radici, per $\mu > 0$, associato al sistema di controllo, indicando approssimativamente sul luogo la posizione dei poli del sistema in anello chiuso quando $\mu = \bar{\mu}$.

Esercizio 4

4.1 Dato il sistema a tempo discreto di funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{z}{4z^3 + 2z^2 + 3z + 2},$$

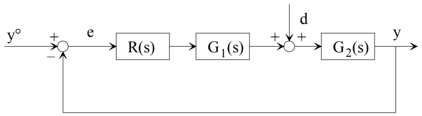
si discuta, *senza calcolare numericamente le radici del denominatore*, la stabilità del sistema.

4.2 Si determinino il valore iniziale e l'eventuale valore finale della risposta di G all'impulso unitario.

6 Luglio 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G_1(s) = \dfrac{1}{(1+s)(1+0.1s)}$, $G_2(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\mathrm{sca}(t)$ e di un disturbo $d(t) = D\mathrm{sca}(t)$, con A e D costanti arbitrarie, l'errore e a transitorio esaurito sia nullo.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 45°.
- La pulsazione critica ω_c sia circa uguale a 0.3 *rad/s*.

1.2 Si supponga il disturbo d misurabile. Si disegni lo schema a blocchi del sistema di controllo comprensivo del compensatore del disturbo.

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + \alpha x_3(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$
$$y(t) = x_3(t)$$

2.1 Si determini l'insieme dei valori del parametro α per cui il sistema è asintoticamente stabile.

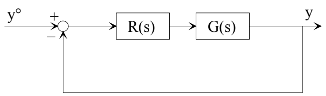
2.2 Si ponga ora $\alpha = -1$. Si supponga che, a partire dalla condizione iniziale $x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$, $x_3(0)=1$, il sistema venga sollecitato dall'ingresso:

$$u(t) = 2 + e^{-t}\cos(t), \quad t \geq 0 \ .$$

Si determini il valore, se esiste, a cui tende y per $t \to \infty$.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:



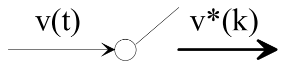
in cui $G(s) = \dfrac{1}{s^2 - 1}$.

3.1 Utilizzando il metodo del luogo delle radici, si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che il sistema in anello chiuso abbia due poli complessi con smorzamento $\zeta = 1/\sqrt{2}$ e pulsazione naturale $\omega_n = 5\sqrt{2}$.

3.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si tracci il diagramma di Nyquist qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello, verificando la stabilità del sistema in anello chiuso.

Esercizio 4

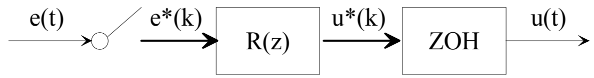
Si consideri un campionatore ideale, con periodo di campionamento T:



4.1 Si enunci il teorema di Shannon (o del campionamento).

4.2 Sia ora $v(t) = \sin(4t)$, $T = \pi/3$. Dopo aver appurato che la condizione del teorema di Shannon non è verificata, si trovi il periodo della sinusoide derivante dall'aliasing del segnale.

4.3 Si consideri ora il seguente sistema esternamente a tempo continuo:

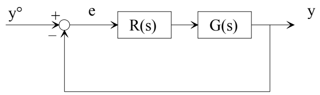


in cui il campionatore e lo ZOH operano con lo stesso periodo T. Si scriva l'espressione della risposta in frequenza $U(j\omega)/E(j\omega)$.

21 Luglio 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1}{s(1+0.01s)^2}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = 2t$, $t \geq 0$, l'errore e a transitorio esaurito soddisfi la limitazione:

$|e_\infty| \leq 0.03$.

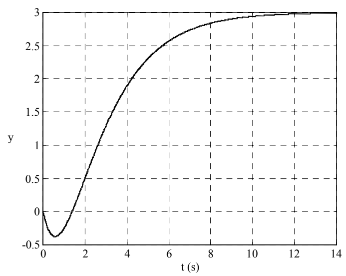
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 50°.
- La pulsazione critica ω_c sia circa uguale a 30 *rad/s*.
- Il regolatore abbia ordine (numero di poli) minimo.

Esercizio 2

2.1 Si spieghi che cosa si intende per sistema a fase minima, spiegando in particolare con molta precisione il significato di questa espressione (ossia descrivendo la proprietà di questi sistemi che dà origine al termine "fase minima").

2.2 Si scriva l'espressione dell'approssimante di Padé 1/1 della funzione di trasferimento $G(s) = e^{-2s}$ e si dica se costituisce un sistema a fase minima.

2.3 Si consideri ora la seguente risposta allo scalino di un sistema dinamico:



Si individui, giustificando la risposta, l'espressione corretta della funzione di trasferimento del sistema tra quelle di seguito riportate:

$$G_1(s) = \frac{3(1+s)}{(1+2s)(1-s)} \qquad G_2(s) = \frac{3(s-1)}{(1+2s)(s+1)} \qquad G_3(s) = \frac{3(1-s)}{(1+2s)(1+s)}$$

$$G_4(s) = \frac{3(s-1)}{(1-2s)(1+s)}$$

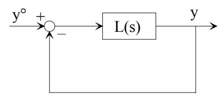
2.4 Si tracci, sul grafico precedente, l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{3}{1+2s}e^{-2s},$$

commentando brevemente la relazione esistente tra questa funzione di trasferimento e quella individuata al punto precedente.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:



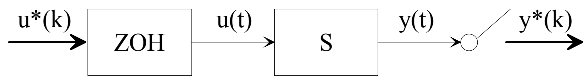
in cui $L(s) = \dfrac{k}{s}\dfrac{1-s}{(1+s)^2}$, $k > 0$.

3.1 Utilizzando il metodo del luogo delle radici, si determini il massimo valore di k per cui il sistema in anello chiuso si mantiene asintoticamente stabile.

3.2 Si verifichi il risultato del punto precedente con il criterio di Routh.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema, esternamente a tempo discreto:



in cui il campionatore e lo ZOH operano con lo stesso periodo T. Il sistema S è lineare invariante a tempo continuo, ed è caratterizzato dalla quaterna di matrici A, B, C, D.

4.1 Dette A^*, B^*, C^*, D^* le corrispondenti matrici del sistema a tempo discreto, si scriva il legame che sussiste tra le due quaterne di matrici.

4.2 Sia ora:

$$G(s) = \frac{2s}{s^2+5s+6}$$

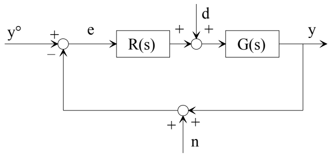
la funzione di trasferimento del sistema a tempo continuo S. Posto T=1, si ricavi, utilizzando un metodo qualsiasi, la funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a tempo discreto.

4.3 Si illustri il legame tra i poli di $G(s)$ e quelli di $G^*(z)$.

6 Settembre 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1}{s(1+0.1s)^2}$.

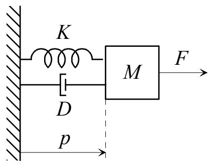
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In assenza del disturbo in linea di retroazione n, un disturbo in linea di andata $d(t) = A\text{sca}(t)$, con A arbitrario, dia luogo a errore nullo a transitorio esaurito.
- Un disturbo $n(t)$ periodico di periodo π sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno uguale a 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 0.3 *rad/s*.

1.2 Si determini un valore adeguato del tempo di campionamento per la corretta realizzazione digitale del controllore progettato al punto precedente.

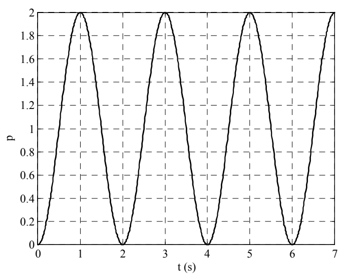
Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema meccanico:



2.1 Si determini la funzione di trasferimento dalla forza F alla posizione p.

2.2 Si supponga ora D=0 e che la risposta allo scalino del sistema presenti il seguente andamento:

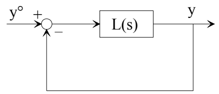


Si determinino i parametri M e K.

2.3 Con i valori di M e K determinati al punto precedente, si determini il valore del paramentro D in modo tale che i poli del sistema abbiano smorzamento $\xi = 0.5$.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema di controllo:



e si supponga che $L(s)$ soddisfi le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode.

3.1 Si spieghi che cosa si intende per "robustezza" della stabilità del sistema in anello chiuso.

3.2 Limitandosi al tracciamento del diagramma polare di L, si proponga un esempio in cui né il margine di fase, né il margine di guadagno, costituiscano buoni indici di robustezza della stabilità.

3.3 Si spieghi quale indice si potrebbe utilizzare per qualificare in modo completo la robustezza della stabilità.

3.4 Posto quindi:

$$L(s) = \frac{5}{(1+s)^3},$$

si determini il margine di guadagno del sistema di controllo.

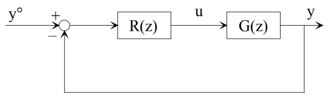
Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = 0.25x_1(k) + u(k) \end{cases}.$$
$$y(k) = x_1(k)$$

4.1 Si determini la funzione di trasferimento $G(z)$ dall'ingresso u all'uscita y.

4.2 Con riferimento al seguente sistema di controllo:

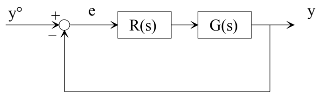


posto $R(z) = \rho_R$ si determini *con il luogo delle radici*, l'insieme dei valori di ρ_R per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

15 Settembre 2000

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1-5s}{(1+s)^2}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$, con $|A| \le 1$, l'errore e a transitorio esaurito soddisfi la limitazione:

$|e_\infty| \le 0.125$.

- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale di 55°.
- La pulsazione critica ω_c sia la più grande possibile.
- Il regolatore abbia ordine (numero di poli) minimo.

1.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si tracci il diagramma polare qualitativo della funzione di trasferimento d'anello, segnando su di esso il punto corrispondente alla pulsazione critica.

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = 1 + \alpha \sin(x_1(t)) - x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 1 + x_1(t) - x_3(t)^3 \end{cases}$$

$$y(t) = x_3(t)$$

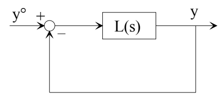
2.1 Si determini un punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u = \bar{u} = 0$.

2.2 Si discuta, al variare del parametro α, la stabilità del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio ricavato al punto precedente.

2.3 Si determini, nel modo più rapido possibile, il valore iniziale dell'uscita y conseguente all'applicazione di un ingresso $u(t) = \sigma\,\text{sca}(t)$, con σ costante opportunamente piccola.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:



in cui:

$$L(s) = \rho \frac{1}{(s+p)^3}, \qquad p > 0.$$

3.1 Supposto $\rho>0$, si determini, *con il metodo del luogo delle radici*, il valore $\bar{p}$ di p in modo tale che, detto $[0, \rho_{max}]$ l'insieme dei valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, risulti $\rho_{max} = 64$.

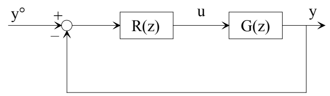
3.2 Supposto ora $\rho<0$, e posto $p = \bar{p}$, si determini, sempre con il *metodo del luogo delle radici*, l'insieme $[\rho_{min}, 0]$ dei valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile[3].

Esercizio 4

Con riferimento ad un generico sistema di controllo digitale:

4.1 Si spieghi che cosa si intende con l'espressione "punto di vista digitale", nello studio del sistema di controllo.

4.2 Con riferimento quindi al seguente sistema di controllo a tempo discreto:



in cui $G(z) = \dfrac{2z-1}{2z^2+5z+2}$,

si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y ad uno scalino in $y°$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

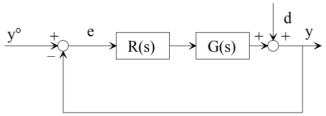
---

[3] Se non si è risolto il punto 3.1, si risolva il punto 3.2 attribuendo a $\bar{p}$ un valore arbitrario > 0.

23 Gennaio 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{1-0.02s}{1+0.01s}$.

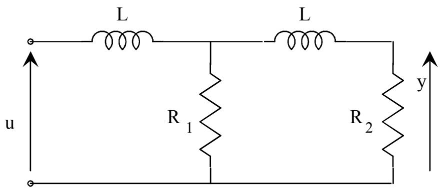
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In assenza del disturbo d, ed in presenza di un segnale di riferimento costante di valore arbitrario, l'errore e a regime sia nullo.
- L'armonica principale di un disturbo d periodico di periodo 2π sia attenuata sull'uscita y almeno di un fattore 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 45°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 5 rad/s.
- Il regolatore abbia ordine (numero di poli) minimo.

1.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si tracci il diagramma polare qualitativo della funzione di trasferimento d'anello, segnando su di esso il punto corrispondente alla pulsazione critica.

Esercizio 2

Si consideri la rete elettrica riportata in figura:



2.1 Si scrivano le equazioni del sistema che descrive la dinamica della rete elettrica.

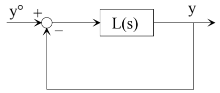
2.2 Posto $L = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1$, si discuta la stabilità del sistema.

2.3 Si determini, se possibile, il valore dell'uscita y quando l'ingresso assume il valore costante $u = \bar{u} = 2$.

2.4 Si dica, motivando la risposta, se il moto libero del sistema presenta oscillazioni.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema di controllo in retroazione:



3.1 Si definisca il diagramma di Nyquist associato a L.

3.2 Si enunci con precisione il criterio di Nyquist per la stabilità del sistema in anello chiuso.

3.3 Posto ora:

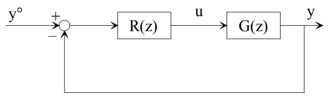
$$L(s) = 10\frac{1-2s}{(1+2s)^3},$$

si studi con il criterio di Nyquist la stabilità del sistema in anello chiuso.

3.4 Si verifichi il risultato del punto precedente con il metodo del luogo delle radici.

Esercizio 4

4.1 Con riferimento al seguente sistema di controllo a tempo discreto:



in cui $G(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+2z}$,

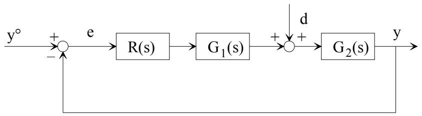
si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y ad uno scalino in $y°$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

4.2 Si discuta la stabilità del controllore progettato al punto precedente.

6 Febbraio 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G_1(s) = \dfrac{1}{1+s}$, $\quad G_2(s) = \dfrac{1}{s(1+0.2s)}$.

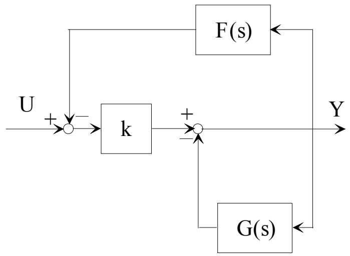
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\mathrm{sca}(t)$ e di un disturbo $d(t) = D\mathrm{sca}(t)$, con A e D costanti arbitrarie, l'errore e a transitorio esaurito sia nullo.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 65°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 0.2 rad/s.

1.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si tracci l'andamento qualitativo della risposta di y allo scalino unitario in $y°$ (in assenza di disturbo).

Esercizio 2

Si consideri il seguente schema a blocchi:



2.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento da u a y.

2.2 Posto:

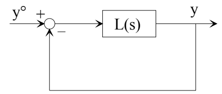
$$G(s) = \frac{1}{s}, \quad F(s) = \frac{1}{(1+s)^2},$$

si determini l'insieme dei valori del parametro k per i quali il sistema è asintoticamente stabile.

2.3 Posto quindi $k = 1$, si determinino il valore iniziale e l'eventuale valore finale della risposta allo scalino unitario del sistema.

Esercizio 3

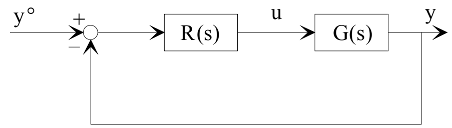
Si consideri un generico sistema di controllo in retroazione:



3.1 Si spieghi che cosa si intende per "luogo delle radici" del sistema di controllo.

3.2 Si enunci con precisione la regola di appartenenza dei punti dell'asse reale al luogo (diretto e inverso).

3.3 Si consideri ora il seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2}.$$

Si determini l'espressione di $R(s)$ in modo tale che il sistema in anello chiuso abbia due poli coincidenti in $s = -2$.

3.4 Sempre con riferimento al sistema di controllo del punto precedente, si determini l'espressione di $R(s)$ in modo tale che il sistema in anello chiuso abbia due poli con pulsazione naturale $\omega_n = 4$ e smorzamento $\zeta = 0.5$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.5x_1(k) + u(k)^2 \\ x_2(k+1) = x_1(k)x_2(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k)x_3(k) \end{cases}.$$

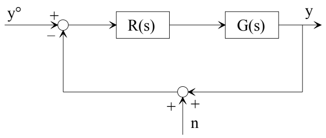
4.1 Si determini il punto di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso costante $u(k) = \bar{u} = 1$.

4.2 Si discuta la stabilità del suddetto punto di equilibrio.

21 Febbraio 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s)=\dfrac{1-0.2s}{(1+s)(1+0.1s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t)$ = sca(t) ed in assenza del disturbo n, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) soddisfi la limitazione:

$|e_\infty| \le 0.015$

- Un disturbo $n(t) = \sin(10t)$ sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 60°
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 1 rad/s.

1.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si tracci il diagramma polare qualitativo della funzione di trasferimento d'anello, segnando su di esso il punto corrispondente alla pulsazione critica.

Esercizio 2

Un sistema dinamico è retto dalla seguente equazione differenziale del terzo ordine:

$$\begin{aligned}&\dddot{y}(t)+6\ddot{y}(t)+11\dot{y}(t)+ky(t)=u(t)\\&y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0\end{aligned}.$$

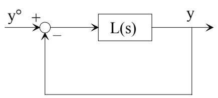
2.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento da u a y.

2.2 Si discuta la stabilità del sistema dinamico al variare del parametro k.

2.3 Posto quindi $k = 6$ e sapendo che il sistema ha un polo in $s = -1$, si determini l'espressione analitica della risposta di y all'impulso unitario in u.

Esercizio 3

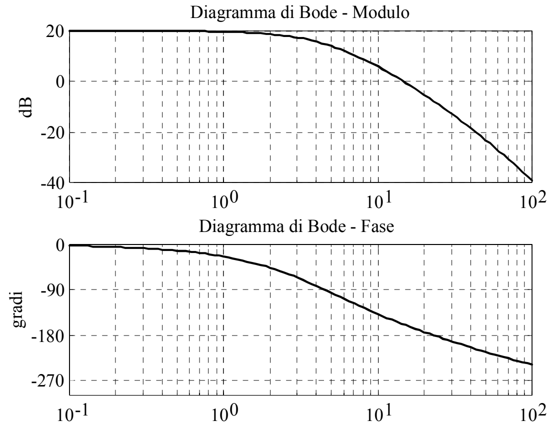
Si consideri un generico sistema di controllo in retroazione:



e si supponga che L soddisfi le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode.

3.1 Si dia la definizione di margine di guadagno del sistema.

3.2 Si supponga ora che ad L siano associati i diagrammi di Bode del modulo e della fase riportati in figura:

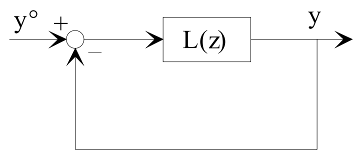


Si determini approssimativamente il margine di guadagno del sistema.

3.3 Si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y allo scalino in $y°$.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema di controllo a tempo discreto:



in cui $L(z)=\dfrac{k}{4z^2-1}$, $k>0$.

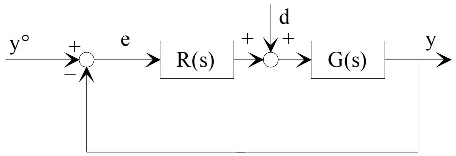
4.1 Si determini, *con il metodo del luogo delle radici*, l'insieme dei valori di k per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

4.2 Posto $k = 2$, si determinino i primi quattro campioni della risposta di y allo scalino unitario in $y°$.

21 Giugno 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s)=\dfrac{10}{s(1+0.1s)}$.

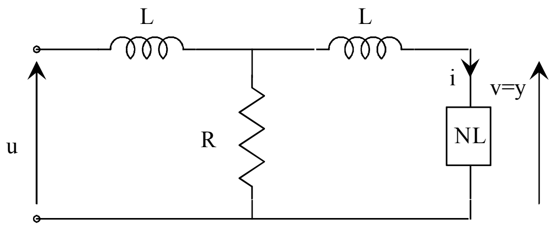
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- Un segnale di riferimento $y°(t) = A$ sca(t) ed un disturbo sulla variabile di controllo $d(t) = D$ sca(t) (con A e D costanti arbitrarie) diano luogo a errore nullo a transitorio esaurito.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 45°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 0.5 rad/s.
- L'ordine del regolatore sia non superiore a 2

1.2 Si supponga di voler effettuare la compensazione del disturbo d. Si disegni lo schema della struttura di controllo comprensiva del compensatore del disturbo.

Esercizio 2

Si consideri la rete elettrica riportata in figura:



in cui l'elemento non lineare NL stabilisce tra la corrente i che l'attraversa e la tensione v ai suoi capi la relazione: $v=i^3$.

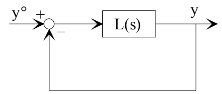
2.1 Si scrivano le equazioni del sistema dinamico corrispondente.

2.2 Posto L= 1, R=1, si determini il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u=\bar{u}=8$.

2.3 Si discuta la stabilità dello stato di equilibrio determinato al punto precedente.

Esercizio 3

Si consideri un generico sistema di controllo:



3.1 Si definisca con precisione il luogo delle radici associato al sistema.

3.2 Si spieghi che cosa si intende per "punteggiatura" del luogo.

3.3 Posto quindi:

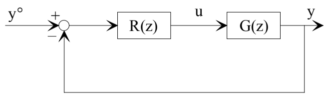
$$L(s)=\frac{\rho}{(1+s)^4},$$

si determini con il luogo delle radici[4] l'insieme dei valori di ρ (positivi o negativi) per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.4 Si verifichi il risultato del punto precedente con il criterio di Routh.

Esercizio 4

4.1 Con riferimento al seguente sistema di controllo a tempo discreto:



in cui $G(z)=\dfrac{z+2}{(z-0.5)^2}$,

si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y ad uno scalino in $y°$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

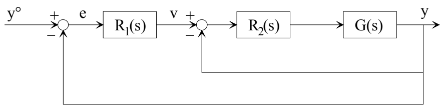
4.2 Si tracci, limitatamente ai primi 5 campioni, la risposta di y ad uno scalino unitario in $y°$.

[4] N.B. Per il sistema dato i rami del luogo delle radici sono sovrapposti agli asintoti.

5 Luglio 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



in cui $G(s) = \dfrac{1}{s^2 - 1}$.

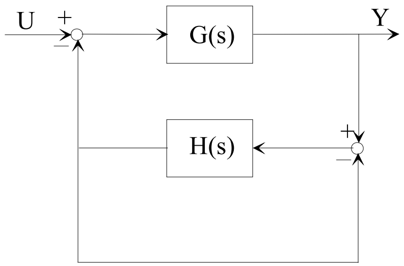
1.1 Si determini, con il metodo del luogo delle radici, la funzione di trasferimento $R_2(s)$ del regolatore dell'anello interno in modo tale che il sistema di funzione di trasferimento $Y(s)/V(s)$ (ossia l'anello interno chiuso) sia asintoticamente stabile, con due poli coincidenti in $s = -1$.

1.2 Si tracci il diagramma di Nyquist della funzione d'anello $L_2(s) = R_2(s)\ G(s)$, dove $R_2(s)$ è la funzione di trasferimento del regolatore determinato al punto precedente, verificando la stabilità con il criterio di Nyquist.

1.3 Si progetti quindi il regolatore $R_1(s)$ dell'anello esterno nella classe dei regolatori *integrali*, in modo tale che il margine di fase φ_m valga 60°.

Esercizio 2

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



in cui:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(1+s)^2} e^{-s\tau},\ \tau \geq 0 \quad H(s) = \frac{1}{s}.$$

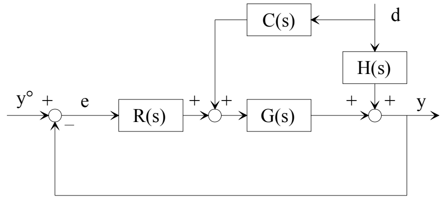
2.1 Posto $\tau = 0$, si determini la funzione di trasferimento da u a y.

2.2 Sempre per $\tau = 0$, si determini l'insieme dei valori di α per cui il sistema è asintoticamente stabile.

2.3 Posto $\alpha = 1$, si determini l'insieme dei valori di τ per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Esercizio 3

Si consideri il seguente sistema di controllo:



in cui:

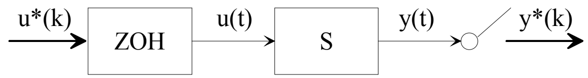
$$G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad R(s) = 10, \quad H(s) = \frac{1}{(s+2)^2}.$$

3.1 Posto $C(s) = k$, si determini k in modo tale che un disturbo $d(t) = D\mathrm{sca}(t)$, con D arbitrario, abbia effetto nullo a transitorio esaurito sull'uscita y.

3.2 Si determini un'espressione della funzione di trasferimento del compensatore $C(s)$ in modo tale che il sistema nel suo complesso sia asintoticamente stabile e che un disturbo $d(t) = D\sin(3t)$, con D arbitrario, abbia effetto nullo a transitorio esaurito sull'uscita y.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema, esternamente a tempo discreto:



in cui il campionatore e lo ZOH operano con lo stesso periodo T. Il sistema S è lineare invariante a tempo continuo, ed è caratterizzato dalla quaterna di matrici A, B, C, D.

4.1 Dette A^*, B^*, C^*, D^* le corrispondenti matrici del sistema a tempo discreto, si scriva il legame che sussiste tra le due quaterne di matrici.

4.2 Si discuta il legame tra gli autovalori di A e A^*, illustrando in particolare graficamente come viene mappato il piano complesso in cui si rappresentano gli autovalori di A nel piano complesso in cui si rappresentano gli autovalori di A^*.

4.3 Sia ora:

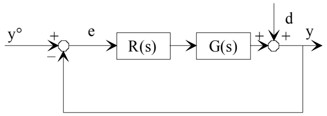
$$G(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

la funzione di trasferimento del sistema a tempo continuo S. Posto T=1, si ricavi, utilizzando un metodo qualsiasi, la funzione di trasferimento $G^*(z)$ del sistema a tempo discreto.

24 Luglio 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{20}{1 + 0.25s}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$, e di un disturbo $d(t) = D\text{sca}(t)$, con $|A| \leq 2$, $|D| \leq 1$, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) soddisfi la limitazione: $|e_\infty| \leq 0.05$
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50° e la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 3 *rad/s*.
- Il regolatore sia di ordine non superiore a due.

1.2 Con il regolatore così progettato, si tracci il diagramma polare qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello, individuando approssimativamente sul diagramma il punto corrispondente a $\omega = \omega_c$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

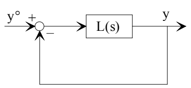
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_3(t)$$

2.1 Si determini l'insieme dei valori del parametro α per cui il sistema è asintoticamente stabile.

2.2 Posto $\alpha = 1$, si determini l'espressione analitica, a transitorio esaurito, della risposta di y all'ingresso $u(t) = \sin(t)$.

2.3 Detta $L(s)$ la funzione di trasferimento del sistema del punto 2.1, si determini l'insieme dei valori del parametro α per cui il sistema in anello chiuso di figura è asintoticamente stabile:



Esercizio 3

3.1 Si descriva il procedimento per la taratura empirica di un regolatore PID con le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

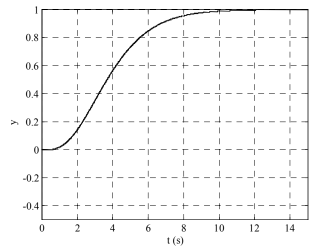
3.2 Si proponga un esempio di sistema dinamico lineare, asintoticamente stabile, per il quale le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso non sono applicabili.

3.3 Si supponga ora che il sistema per il quale si vuole tarare empiricamente il regolatore PID abbia funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^4} .$$

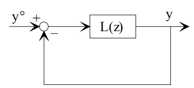
Si determinino i valori del guadagno critico $\overline{K}_P$ e del periodo di oscillazione $\overline{T}$ che si otterrebbero con l'applicazione del metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

3.4 Sapendo che la risposta allo scalino in anello aperto del sistema del punto 3.3 è quella riportata in figura, si determinino approssimativamente, per via grafica, i parametri necessari per l'applicazione delle regole di Ziegler e Nichols in anello aperto.



Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema di controllo a tempo discreto:



in cui $L(z) = \rho \dfrac{z(z-0.2)}{(z+0.1)(z-0.1)(z-0.3)}$.

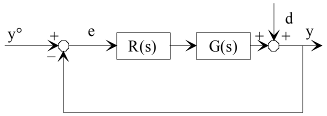
4.1 Si determini, con il metodo del luogo delle radici, l'insieme dei valori di $\rho > 0$ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

4.2 Si determini, con il metodo del luogo delle radici, l'insieme dei valori di $\rho < 0$ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

4 Settembre 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{20}{1+0.25s}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$, con A costante arbitraria ed in assenza del disturbo d, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) sia nullo.
- Un disturbo $d(t) = D\sin(0.5t)$, sia attenuato sull'uscita y di un fattore pari almeno a 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 60° e la pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 3 *rad/s*.
- L'ordine del regolatore non sia superiore a 2.

1.2 Con il regolatore così progettato, si tracci il diagramma polare qualitativo associato alla funzione di trasferimento d'anello, individuando approssimativamente sul diagramma il punto corrispondente a $\omega = \omega_c$.

Esercizio 2

Si consideri il seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 2x_3(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_3(t)$$

2.1 Si discuta la stabilità del sistema.

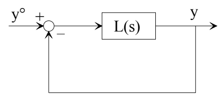
2.2 Si determini il valore di regime dell'uscita quando $u(t) = 2 + e^{-t}\sin(t)$.

2.3 Si determini l'espressione analitica, a transitorio esaurito, della risposta di y all'ingresso:

$$u(t) = 2 + \sin(t).$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema in anello chiuso di figura:



dove:

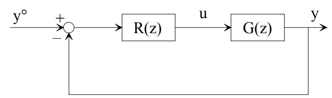
$$L(s) = \frac{\mu}{s(1+s)^2},\ \mu > 0.$$

3.1 Si determini, con il metodo del luogo delle radici, l'insieme dei valori di μ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.2 Si verifichi il risultato con il criterio di Nyquist.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema di controllo a tempo discreto:



e si indichi con $F(z)$ la funzione di trasferimento in anello chiuso da $y°$ a y.

4.1 Si ricavi, giustificando la risposta, la condizione che deve essere soddisfatta da F affinché il regolatore, di funzione di trasferimento $R(z)$, sia causale.

4.2 Si supponga che $G(z)$ presenti un polo a modulo maggiore di 1. Si ricavi, giustificando la risposta, la condizione che deve essere soddisfatta da F affinché tale polo non venga cancellato da uno zero del regolatore.

4.3 Posto ora:

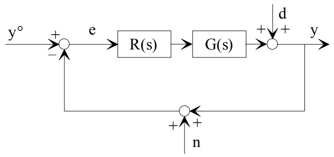
$$G(z) = \frac{1}{z-2},$$

si determini la funzione di trasferimento $R(z)$ del regolatore, causale, in modo tale che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, la risposta di y ad uno scalino in $y°$ non presenti errore a regime e si esaurisca in tempo finito e minimo.

18 Settembre 2001

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = \dfrac{10}{s(1+0.1s)}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- L'errore e a transitorio esaurito, in assenza dei disturbi d e n, sia nullo in presenza di una variazione a scalino del riferimento $y°$.
- Un disturbo in linea di andata $d(t)$, con componenti armoniche a pulsazioni inferiori a 0.8 rad/s, sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.
- Un disturbo in linea di retroazione $n(t)$, con componenti armoniche a pulsazioni superiori a 90 rad/s, sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 100.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°.
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 4 *rad/s*.

1.2 Con il controllore progettato al punto precedente, si tracci l'andamento qualitativo della risposta di y allo scalino unitario in $y°$, in assenza dei disturbi.

Esercizio 2

Si consideri un generico sistema dinamico lineare tempo invariante:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$
$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

2.1 Si spieghi che cosa si intende per "movimento" dello stato e dell'uscita.

2.2 Si scrivano le formule che danno esplicitamente il movimento dello stato e dell'uscita.

2.3 Con riferimento ora al seguente sistema dinamico:

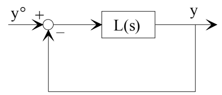
$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2u(t)$$
$$y(t) = 3x(t)$$

si ricavi l'espressione del movimento dell'uscita[5] quando $u(t) = \sin(t)$ e $x(0)=0$.

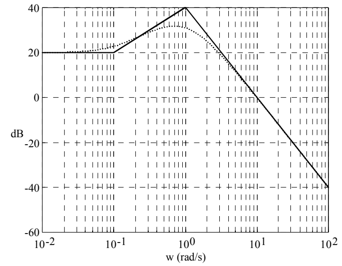
2.4 Si verifichi che il risultato ricavato al punto precedente è consistente, per $t \to \infty$, con il teorema della risposta in frequenza.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo di figura:



in cui $L(s)$ è una funzione di trasferimento a fase minima, il cui diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza è riportato di seguito:



3.1 Si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y allo scalino in $y°$.

3.2 Si supponga che nell'anello sia presente un ritardo di tempo. Si determini il massimo valore che può assumere tale ritardo perché il sistema in anello chiuso rimanga asintoticamente stabile.

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.5x_1(k) + u(k)^2 \\ x_2(k+1) = x_1(k)x_2(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k)x_3(k) \end{cases} .$$

4.1 Si determini il punto di equilibrio del sistema in corrispondenza dell'ingresso costante $u(k) = \bar{u} = 1$.

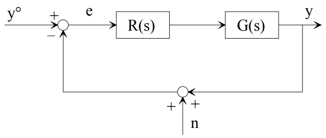
4.2 Si discuta la stabilità del suddetto punto di equilibrio.

[5] Si ricorda che $\int e^{\tau}\sin(\tau)d\tau = \dfrac{e^{\tau}(\sin(\tau)-\cos(\tau))}{2}$

23 Gennaio 2002

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s)=\dfrac{1}{(1+s)^2}$.

1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t)$ = sca(t) ed in assenza del disturbo n, l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) soddisfi la limitazione:

  $|e_\infty| \le 0.015$

- Un disturbo $n(t) = \sin(10t)$ sia attenuato sull'uscita y di un fattore almeno pari a 10.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°
- La pulsazione critica ω_c sia maggiore o uguale a 2 rad/s.

1.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si tracci il diagramma polare qualitativo della funzione di trasferimento d'anello, segnando su di esso il punto corrispondente alla pulsazione critica.

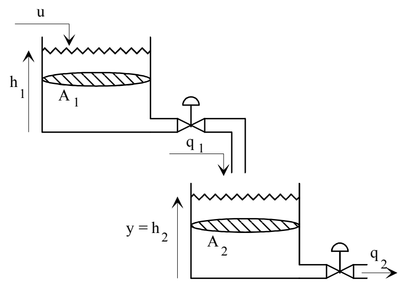
Esercizio 2

Si consideri il sistema idraulico riportato in figura.

Il sistema è costituito da due serbatoi di sezione costante collegati da una valvola. Anche il secondo serbatoio presenta una valvola in uscita. Le due valvole, entrambe ad apertura costante, stabiliscono tra la portata di liquido che le attraversa e il livello nel serbatoio a monte le relazioni:

$q_1 = \alpha_1\sqrt{h_1}, \quad q_2 = \alpha_2\sqrt{h_2}$.

Si assuma come *ingresso* la portata entrante u e come *uscita* del sistema il livello del secondo serbatoio $y = h_2$.



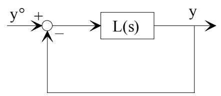
2.1 Si scrivano le equazioni del sistema dinamico.

2.2 Posto $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, si determinino eventuali punti di equilibrio del sistema corrispondenti all'ingresso costante $u = \bar{u} = 2$.

2.3 Si discuta la stabilità degli eventuali stati di equilibrio determinati al punto precedente.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo di figura:



in cui:

$$L(s)=\rho\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}.$$

3.1 Si determini, *con il metodo del luogo delle radici*, l'insieme dei valori di ρ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.2 Si verifichi il risultato precedente con il criterio di Routh applicato al polinomio caratteristico in anello chiuso.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema a segnali campionati:

dove $G(s)=\dfrac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$, e il tempo di campionamento T vale 1.

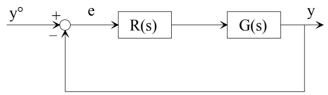
4.1 Si determini l'espressione della funzione di trasferimento $G^*(z)$ da u^* a y^*.

4.2 Si commenti il legame tra i poli di $G(s)$ e i poli di $G^*(z)$, estendendo il risultato al caso generale.

4 Febbraio 2002

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G(s) = 10\dfrac{1-s}{(1+2s)(1+0.2s)}$.

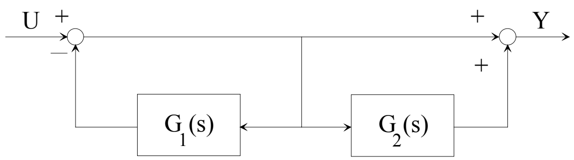
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t)$ = sca(t) l'errore e a transitorio esaurito (e_∞) sia nullo.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 50°
- La pulsazione critica ω_c sia la più grande possibile.

1.2 Si supponga di volere realizzare il regolatore in tecnologia digitale: si calcoli il decremento di margine di fase associato al ritardo intrinseco di conversione, quando si adotta come pulsazione di Nyquist il valore Ω_N = 5 rad/s.

Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dal seguente schema a blocchi:



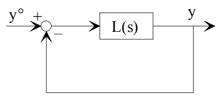
2.1 Si determini la funzione di trasferimento da u a y.

2.2 Si dica, giustificando la risposta, se è necessario e/o sufficiente che G_1 e/o G_2 siano asintoticamente stabili perché lo sia il sistema nel suo complesso.

2.3 Posto: $G_1(s) = \dfrac{1}{s}$, $G_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$, si determinino, se possibile, il valore iniziale ed il valore finale di $y(t)$ quando $u(t)$ = sca(t).

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo di figura:



in cui:

$$L(s) = \frac{\mu}{(s+2)^4}, \ \mu > 0.$$

3.1 Si determini, *con il criterio di Nyquist*, il massimo valore di μ per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

3.2 Si verifichi il risultato precedente con il metodo del luogo delle radici.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + u^2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k)x_2(k) \\ x_3(k+1) = x_1(k) + x_2(k)x_3(k) \end{cases}$$

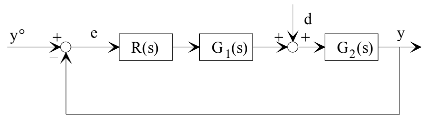
4.1 Si determini il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante $u(k) = \bar{u} = 2$.

4.2 Si discuta la stabilità del suddetto punto di equilibrio.

22 Febbraio 2002

Esercizio 1

Si consideri il sistema di controllo di figura:



dove $G_1(s) = \dfrac{1}{1+s}$, $G_2(s) = \dfrac{e^{-0.5s}}{s}$.

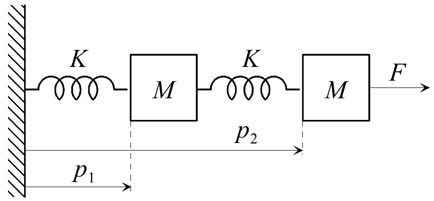
1.1 Si determini la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore in modo tale che:

- In presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = A\text{sca}(t)$ e di un disturbo $d(t) = D\text{sca}(t)$, con A e D costanti arbitrarie, l'errore e a transitorio esaurito sia nullo.
- Il margine di fase φ_m sia maggiore o uguale a 55°.
- La pulsazione critica ω_c sia approssimativamente massimizzata.

1.2 Con il regolatore progettato al punto precedente, si tracci l'andamento qualitativo della risposta di y allo scalino unitario in $y°$ (in assenza di disturbo).

Esercizio 2

Si consideri il sistema meccanico riportato in figura:



Le masse dei due corpi sono uguali (pari a M), le costanti elastiche delle due molle sono anch'esse uguali (pari a K). La forza di richiamo elastico agente sulla prima massa è proporzionale alla posizione p_1, quella agente tra le due masse alla differenza tra le posizioni p_2 e p_1.

2.1 Si dica quanto vale l'ordine del sistema

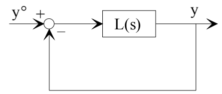
2.2 Assumendo come ingresso la forza F sulla seconda massa e come uscita la posizione p_2 della seconda massa, si scrivano le equazioni del sistema dinamico che descrive il sistema meccanico.

2.3 Si dica, giustificando la risposta, se il sistema è strettamente proprio o no.

2.4 Si ricavino le matrici A, B, C e D del sistema dinamico.

Esercizio 3

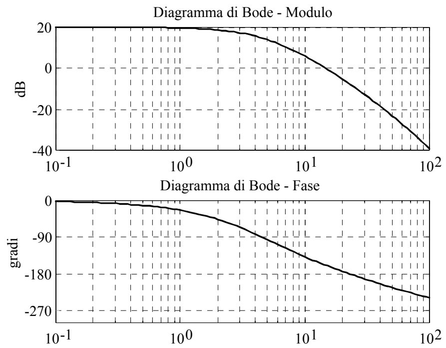
Si consideri un generico sistema di controllo in retroazione:



e si supponga che L soddisfi le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode.

3.1 Si dia la definizione di margine di guadagno del sistema.

3.2 Si supponga ora che ad L siano associati i diagrammi di Bode del modulo e della fase riportati in figura:

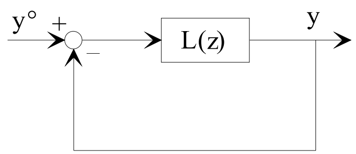


Si determini approssimativamente il margine di guadagno del sistema.

3.3 Si determini approssimativamente il tempo di assestamento della risposta di y allo scalino in $y°$.

Esercizio 4

Si consideri il seguente sistema di controllo a tempo discreto:



in cui $L(z) = \rho \dfrac{z}{z^2 + 0.4z - 0.05}$.

4.1 Si determini, *con il metodo del luogo delle radici*, l'insieme dei valori di ρ positivi per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

4.2 Si ripeta il procedimento per i valori di ρ negativi.