

**POLITECNICO**  
MILANO 1863

# FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2023-2024

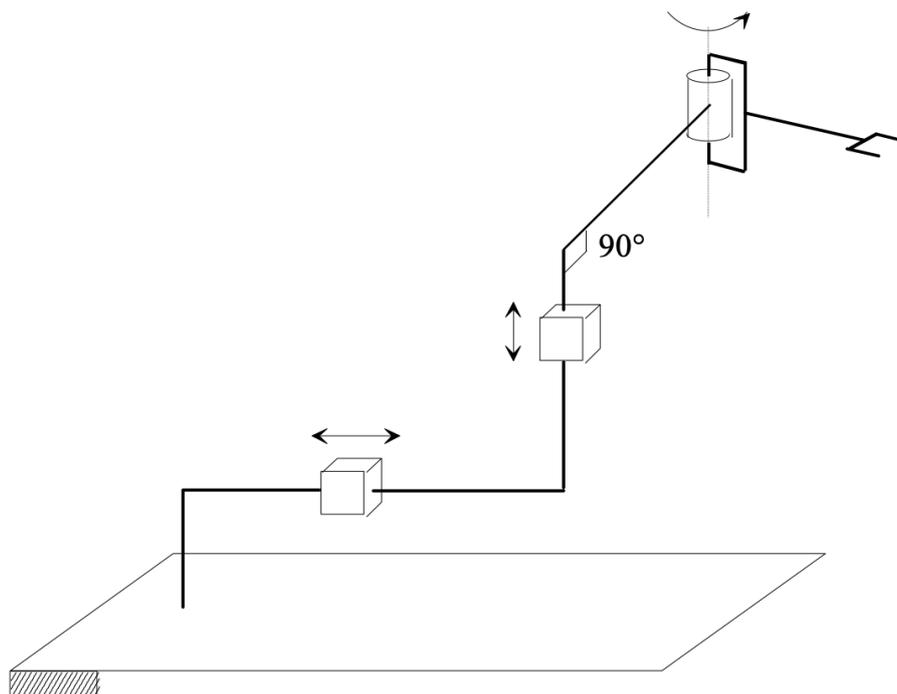
PROF. ROCCO

28 GIUGNO 2024 - PRIMO APPELLO

## SOLUZIONI

## Esercizio 1

Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



**Domanda 1.1** Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	$a$	$\alpha$	$d$	$\vartheta$
1				
2				
3				

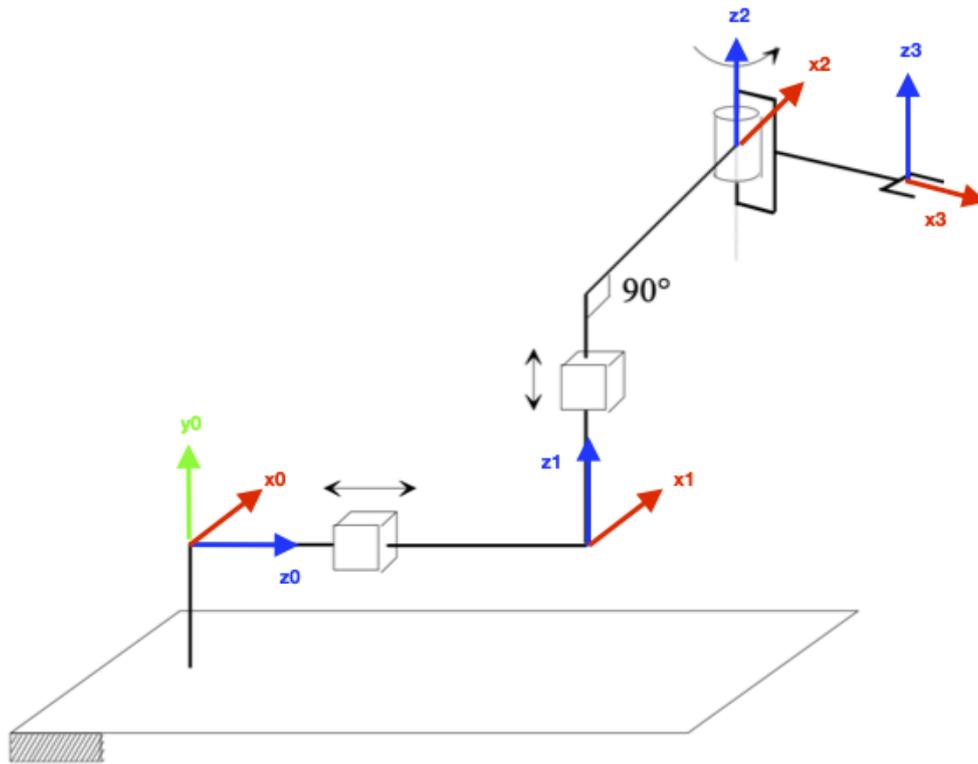
Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura.

La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:

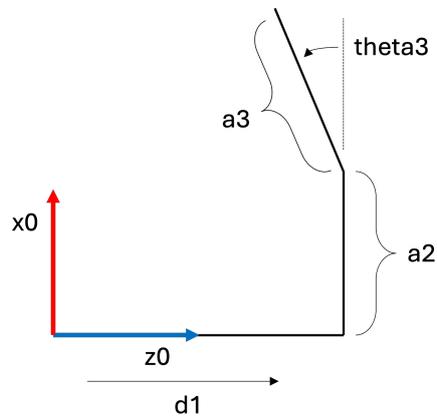
	$a$	$\alpha$	$d$	$\vartheta$
1	0	-90	$d_1$	0
2	$a_2$	0	$d_2$	0
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

**Domanda 1.2** Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:



Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano  $x_0 - z_0$ :



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= a_2 + a_3 c_3 \\ p_z &= d_1 - a_3 s_3 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_y = d_2$$

---


$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Domanda 1.3** Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità<sup>2</sup>

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = [ \mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) ]$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 + a_3 c_3 \\ d_2 \\ d_1 - a_3 s_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 c_3 \\ 0 \\ -a_3 s_3 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a_3 c_3 \end{bmatrix}$$

Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

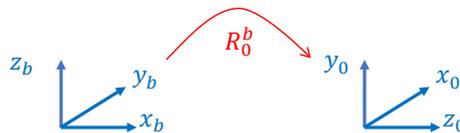
$$\det(\mathbf{J}_P) = a_3 s_3 = 0$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando  $s_3 = 0$ , quindi per  $\theta_3 = 0 + k\pi$ .

**Domanda 1.4** Supponendo ora che la terna base sia orientata con  $z$  verso l'alto e  $x$  in direzione del primo asse, scrivere la matrice di rotazione  $R_b^0$  tra detta terna e la terna 0 della convenzione di Denavit-Hartenberg. Si ricavi quindi una terna di angoli di Eulero ZYZ corrispondente a tale rotazione.

Nella terna base, la terna 0 di Denavit-Hartenberg ha l'asse  $z_0$  orientato come  $x_b$ , l'asse  $y_0$  come  $z_b$  e l'asse  $x_0$  come  $y_b$ , pertanto:

$$R_b^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Si può facilmente verificare che è possibile passare dalla terna base alla terna 0 eseguendo una rotazione di  $90^\circ$  intorno all'asse  $y$  seguita da una rotazione di  $90^\circ$  intorno all'asse  $z$ . Pertanto una terna di angoli di Eulero ZYZ è data da  $\{0^\circ, 90^\circ, 90^\circ\}$ .

<sup>2</sup>Si ricorda che il prodotto vettoriale tra i vettori  $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$  e  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  è  $c = a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

## Esercizio 2

Si supponga che un asse lineare debbia compiere in  $T = 3$  s un movimento di  $h = 2$  m, partendo e arrivando con velocità nulle.

**Domanda 2.1** Supponendo una velocità massima di  $1$  m/s, determinare tempo di accelerazione e accelerazione iniziale del corrispondente profilo a velocità trapezoidale.

*Dati lo spostamento, il tempo di percorrenza e la massima velocità, possiamo calcolare il tempo di accelerazione e l'accelerazione iniziale come:*

$$T_a = T - \frac{h}{v} = 1, \quad a = \frac{v}{T_a} = 1$$

**Domanda 2.2** Si supponga ora che, per il posizionamento discusso al punto precedente, il valore massimo di accelerazione sia pari a  $\frac{3}{2}$  del valore calcolato precedentemente, mentre il valore di velocità massimo sia quello del punto precedente. Si determini il valore minimo del tempo di posizionamento.

*L'accelerazione massima è  $a_{\max} = 1.5$ , mentre la velocità massima è  $v_{\max} = 1$ . Poiché:*

$$h > \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}$$

*entrambi i valori massimi possono essere raggiunti e il tempo di posizionamento minimo si calcola come:*

$$T = \frac{h}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{2}{1} + \frac{1}{1.5} = 2.66$$

**Domanda 2.3** Si supponga ora di dover pianificare il moto dell'end effector di un robot lungo un percorso lineare che parte da  $\mathbf{p}_i = [1 \ \sqrt{3} \ 0]^T$  e termina nell'origine del sistema di riferimento. Si spieghi se, e in che modo, il profilo discusso in uno dei punti precedenti possa essere utilizzato nella pianificazione di questo movimento.

*La distanza tra il punto finale e il punto iniziale si calcola come:*

$$\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| = \left| \begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{array} \right| = 2$$

*Poiché questa distanza è uguale alla distanza  $h$  percorsa con i profili dei punti precedenti, detta  $s(t)$  la posizione calcolata con tali profili, la pianificazione del moto dell'end effector sarà data da:*

$$p(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s(t)}{h}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{s(t)}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Domanda 2.4** Si supponga ora che, date le posizioni iniziale e finale dell'end effector utilizzate al punto precedente, si voglia utilizzare un percorso ad arco di circonferenza. Senza risolvere il problema dal punto di vista matematico, si diano gli elementi essenziali per affrontare il problema stesso.

*Per la pianificazione di un percorso circolare occorre dapprima pianificare il moto su un piano  $x'y'$  dove giace la circonferenza (di raggio  $\rho$  e centro l'origine del sistema di riferimento).*

$$\mathbf{p}'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Detti poi  $\mathbf{c}$  il vettore che identifica il centro della circonferenza nel sistema di riferimento di base e  $\mathbf{R}$  la matrice di rotazione dal sistema di base al sistema  $x'y'z'$  la parametrizzazione del percorso sarà:*

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R}\mathbf{p}'(s)$$

### Esercizio 3

**Domanda 3.1** Si descriva il principio di funzionamento di un encoder ottico incrementale a doppia traccia. Si determini la sua risoluzione e si spieghi il suo duplice utilizzo nel controllo del moto quando viene utilizzato un motore brushless.

*Un encoder è uno strumento per la misura di una posizione angolare basato sul principio fotoelettrico. Tra una sorgente luminosa e un fotorilevatore è posto un disco che presenta alternativamente aree opache e trasparenti su due tracce. La seconda traccia è sfasata di  $1/4$  di passo ed è utile per rilevare il senso di rotazione. Detto  $N$  numero passi (numero di zone chiare/scure per giro), la risoluzione, in gradi, è data da  $\Delta\Theta = \frac{360}{4N}$ .*

*Nel controllo del moto, l'encoder è tipicamente posizionato sull'asse motore e viene utilizzato per la misura della posizione angolare e per la stima della velocità di rotazione. Inoltre, se l'attuatore utilizzato è un motore brushless, la misura di posizione viene utilizzata per conoscere la posizione del campo magnetico rotante (angolo elettrico) che a sua volta viene utilizzata per la commutazione delle correnti, essendo il motore privo di spazzole.*

**Domanda 3.2** Si consideri ora un servomeccanismo con  $J_m = 0.003 \text{ kgm}^2$ ,  $J_l = 30 \text{ kgm}^2$ . Se ne determini il valore ottimale del rapporto di riduzione  $n$  secondo il criterio *inertia matching* e si enunci quale cifra di merito massimizza questo criterio.

*Il criterio massimizza l'accelerazione lato carico per unità di coppia lato motore. Il valore ottimale del rapporto di riduzione si ottiene come:*

$$n = \sqrt{\frac{J_l}{J_m}} = 100 \quad (1)$$

**Domanda 3.3** Supponendo che, a rotore bloccato, il carico oscilli alla pulsazione di  $120 \text{ rad/s}$ , si determini il valore della costante elastica equivalente della trasmissione.

*A rotore bloccato, il carico oscilla alla pulsazione di antirisonanza  $\omega_z$ . Pertanto  $\omega_z = 120 \text{ rad/s}$ . Tale valore è legato ai parametri meccanici come segue*

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}} = \sqrt{\frac{n^2 K_{el}}{J_l}} \quad (2)$$

$$\text{Pertanto } K_{el} = \frac{\omega_z^2 J_l}{n^2} = 43.2$$

**Domanda 3.4** Si determinino infine i parametri di un regolatore di velocità motore di tipo proporzionale-integrale, tali da massimizzare lo smorzamento in anello chiuso.

*Per il tempo integrale si scelga  $T_{iv} = \frac{10}{\omega_z} = 0.0833 \text{ s}$ , mentre per il guadagno proporzionale il valore più opportuno risulta essere*

$$K_{pv} = \frac{\omega_{cv}}{\mu} = 0.7\omega_z (J_m + J_{lr}) = 0.504 \quad (3)$$