



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

# FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2024-2025

PROF. ROCCO

28 GENNAIO 2026 - QUARTO APPELLO

COGNOME E NOME: \_\_\_\_\_

MATRICOLA: \_\_\_\_\_

FIRMA: \_\_\_\_\_

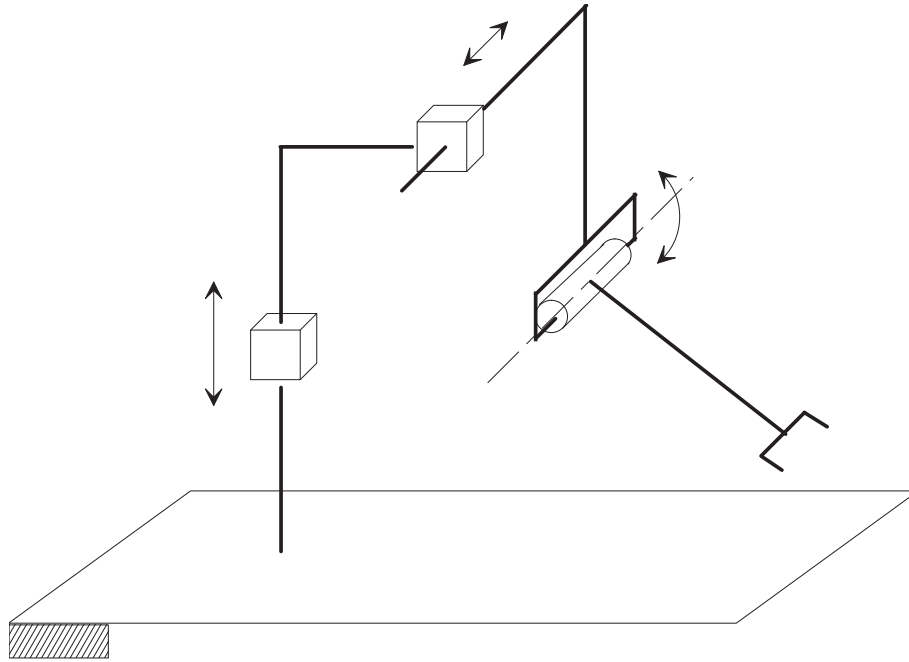
## Avvertenze:

- Il presente fascicolo si compone di **8** pagine (compresa la copertina). Firmare il frontespizio.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti. Solo in caso di correzioni o se lo spazio non è risultato sufficiente, utilizzare la controcopertina del fascicolo.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.



## Esercizio 1

Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



**Domanda 1.1** Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	$a$	$\alpha$	$d$	$\vartheta$
1				
2				
3				

**Domanda 1.2** Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Domanda 1.3** Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità<sup>2</sup>

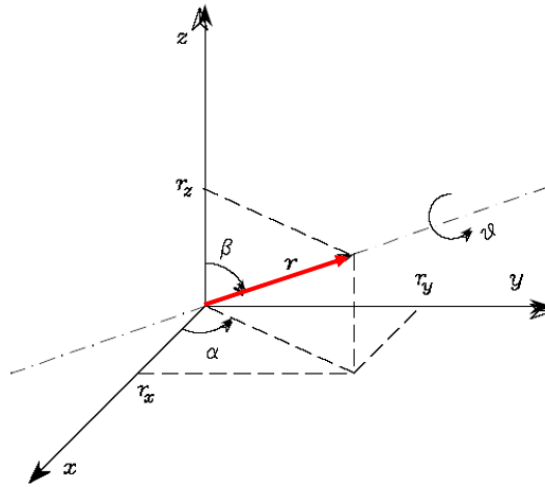
**Domanda 1.4** Si rappresenti il manipolatore in una delle configurazioni singolari prima determinate e si scriva l'espressione della matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla terna 0 in questa configurazione.

---

<sup>2</sup>Si ricorda che il prodotto vettoriale tra i vettori  $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$  e  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  è  $c = a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

## Esercizio 2

**Domanda 2.1** Facendo riferimento alla seguente figura, si discuta che cosa si intende per rappresentazione asse-angolo dell'orientamento. Si spieghi in particolare da quanti elementi è composta questa rappresentazione e che vincolo sussiste tra tali elementi.



**Domanda 2.2** Si supponga ora di volere pianificare la traiettoria di orientamento dell'end-effector di un robot. Le matrici di rotazione che esprimono rispettivamente l'orientamento iniziale e l'orientamento finale rispetto alla terna mondo sono:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si determini l'asse intorno a cui deve essere effettuata la rotazione e l'angolo per cui occorre ruotare.

**Domanda 2.3** Si definisca il quaternioni unitario, spiegando da quanti elementi è composta questa rappresentazione e che vincolo sussiste tra tali elementi. Si esprima la rotazione della terna finale rispetto a quella iniziale di questo esercizio con un quaternioni unitario.

**Domanda 2.4** Sempre con riferimento ai dati di questo esercizio, si pianifichi l'evoluzione dell'angolo con un profilo di velocità trapezoidale, con tempo di posizionamento pari a  $T = 2s$  e tempo di accelerazione pari a  $T_a = 0.4s$ . Si determini il valore massimo che assume la velocità intorno all'asse di rotazione.<sup>3</sup>

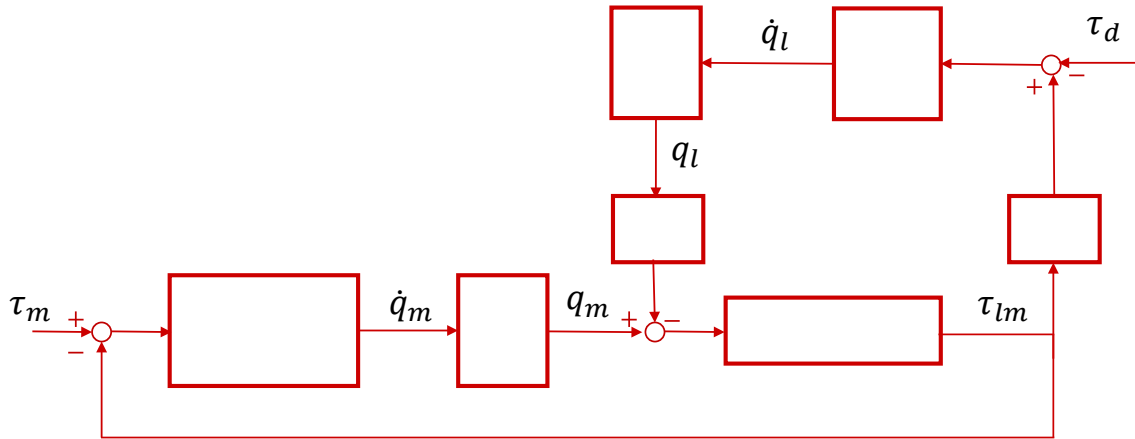
---

<sup>3</sup>Nel caso non si sia riusciti a risolvere il punto 2 dell'esercizio, si risolva il presente punto assumendo come valore finale dell'angolo  $60^\circ$ .

### Esercizio 3

Si consideri un servomeccanismo elastico.

**Domanda 3.1** Definendo  $\tau_m$  la coppia motrice,  $\tau_{lm}$  la coppia trasmessa tra motore e carico,  $\tau_d$  una coppia di disturbo lato carico,  $q_m$  e  $\dot{q}_m$  posizione e velocità lato motore,  $q_l$  e  $\dot{q}_l$  posizione e velocità lato carico, e facendo riferimento alla seguente figura, si completi lo schema a blocchi corrispondente al modello dinamico del servomeccanismo:



**Domanda 3.2** Si tracci l'andamento qualitativo del diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza da coppia motrice a velocità motore (in assenza della coppia di disturbo  $\tau_d$  e nell'ipotesi  $D_m = 0$ ) e si confronti tale diagramma con quello dell'approssimazione rigida della stessa risposta in frequenza.

**Domanda 3.3** Si assumano ora i seguenti valori dei parametri fisici:

$$\begin{aligned}J_m &= 0.02 \text{kgm}^2 \\D_m &= 0 \\\rho &= 1.5\end{aligned}$$

Nel corso di un esperimento eseguito bloccando meccanicamente il motore, si sono riscontrate sul carico oscillazioni poco smorzate di periodo pari a 0.0314 s.

Si determini un valore della costante elastica  $K_{el}$  della trasmissione compatibile con i dati del problema.

**Domanda 3.4** Si determinino il guadagno proporzionale e il tempo integrale di un regolatore PI di velocità opportunamente tarato.