



POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2024-2025

PROF. ROCCO

28 GENNAIO 2026 - QUARTO APPELLO

COGNOME E NOME: _____

MATRICOLA: _____

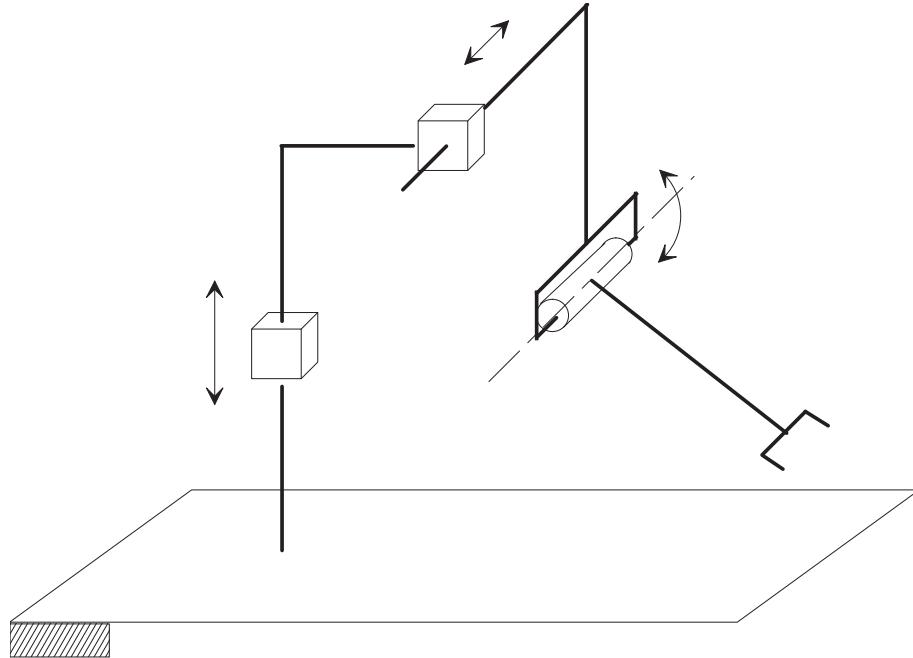
FIRMA: _____

Avvertenze:

- Il presente fascicolo si compone di **8** pagine (compresa la copertina). Firmare il frontespizio.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula per nessun motivo se non consegnando il compito o ritirandosi.
- Nei primi 30 minuti della prova non è consentito ritirarsi.
- Durante la prova non è consentito consultare libri o appunti di alcun genere.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici con display grafico.
- Le risposte vanno fornite **esclusivamente negli spazi** predisposti. Solo in caso di correzioni o se lo spazio non è risultato sufficiente, utilizzare la controcopertina del fascicolo.
- La chiarezza e l'**ordine** delle risposte costituiranno elemento di giudizio.
- Al termine della prova va consegnato **solo il presente fascicolo**. Ogni altro foglio eventualmente consegnato non sarà preso in considerazione.

Esercizio 1

Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Domanda 1.1 Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

Domanda 1.2 Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione.¹

¹Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

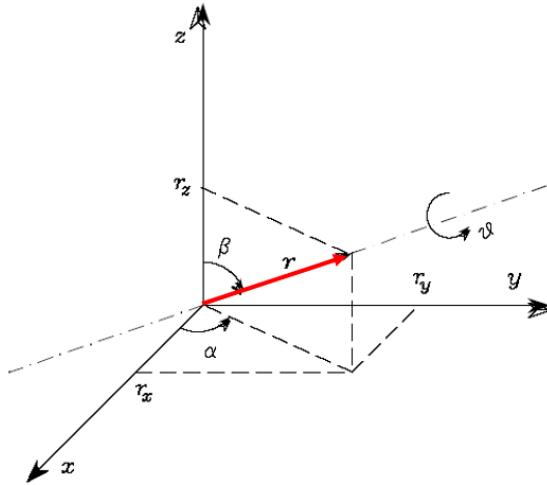
Domanda 1.3 Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità²

Domanda 1.4 Si rappresenti il manipolatore in una delle configurazioni singolari prima determinate e si scriva l'espressione della matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla terna 0 in questa configurazione.

²Si ricorda che il prodotto vettoriale tra i vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ è $c = a \times b = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

Esercizio 2

Domanda 2.1 Facendo riferimento alla seguente figura, si discuta che cosa si intende per rappresentazione asse-angolo dell'orientamento. Si spieghi in particolare da quanti elementi è composta questa rappresentazione e che vincolo sussiste tra tali elementi.



Domanda 2.2 Si supponga ora di volere pianificare la traiettoria di orientamento dell'end-effector di un robot. Le matrici di rotazione che esprimono rispettivamente l'orientamento iniziale e l'orientamento finale rispetto alla terza dimensione sono:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si determini l'asse intorno a cui deve essere effettuata la rotazione e l'angolo per cui occorre ruotare.

Domanda 2.3 Si definisca il quaternione unitario, spiegando da quanti elementi è composta questa rappresentazione e che vincolo sussiste tra tali elementi. Si esprima la rotazione della terna finale rispetto a quella iniziale di questo esercizio con un quaternione unitario.

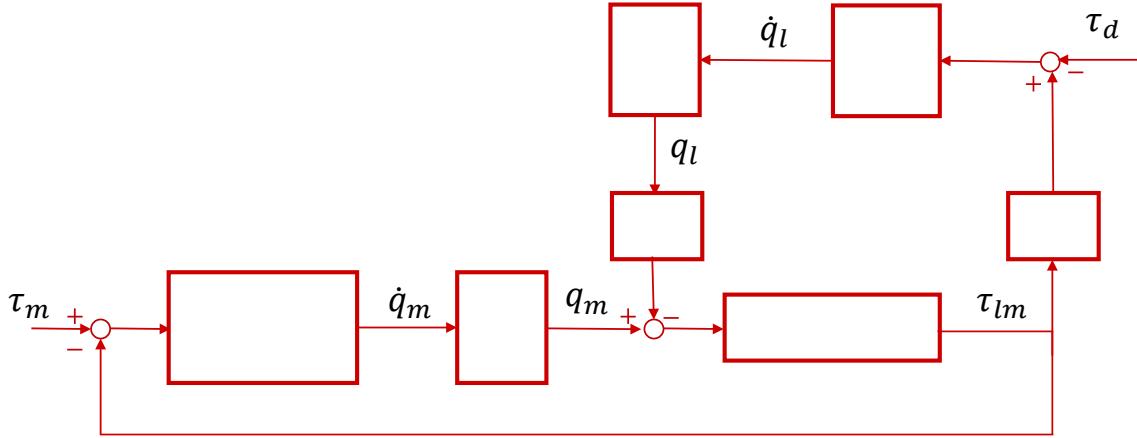
Domanda 2.4 Sempre con riferimento ai dati di questo esercizio, si pianifichi l'evoluzione dell'angolo con un profilo di velocità trapezoidale, con tempo di posizionamento pari a $T = 2s$ e tempo di accelerazione pari a $T_a = 0.4s$. Si determini il valore massimo che assume la velocità intorno all'asse di rotazione.³

³Nel caso non si sia riusciti a risolvere il punto 2 dell'esercizio, si risolva il presente punto assumendo come valore finale dell'angolo 60° .

Esercizio 3

Si consideri un servomeccanismo elastico.

Domanda 3.1 Definendo τ_m la coppia motrice, τ_{lm} la coppia trasmessa tra motore e carico, τ_d una coppia di disturbo lato carico, q_m e \dot{q}_m posizione e velocità lato motore, q_l e \dot{q}_l posizione e velocità lato carico, e facendo riferimento alla seguente figura, si completi lo schema a blocchi corrispondente al modello dinamico del servomeccanismo:



Domanda 3.2 Si tracci l'andamento qualitativo del diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza da coppia motrice a velocità motore (in assenza della coppia di disturbo τ_d e nell'ipotesi $D_m = 0$) e si confronti tale diagramma con quello dell'approssimazione rigida della stessa risposta in frequenza.

Domanda 3.3 Si assumano ora i seguenti valori dei parametri fisici:

$$\begin{aligned}J_m &= 0.02 \text{kgm}^2 \\D_m &= 0 \\\rho &= 1.5\end{aligned}$$

Nel corso di un esperimento eseguito bloccando meccanicamente il motore, si sono riscontrate sul carico oscillazioni poco smorzate di periodo pari a 0.0314 s.

Si determini un valore della costante elastica K_{el} della trasmissione compatibile con i dati del problema.

Domanda 3.4 Si determinino il guadagno proporzionale e il tempo integrale di un regolatore PI di velocità opportunamente tarato.