

POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2024-2025

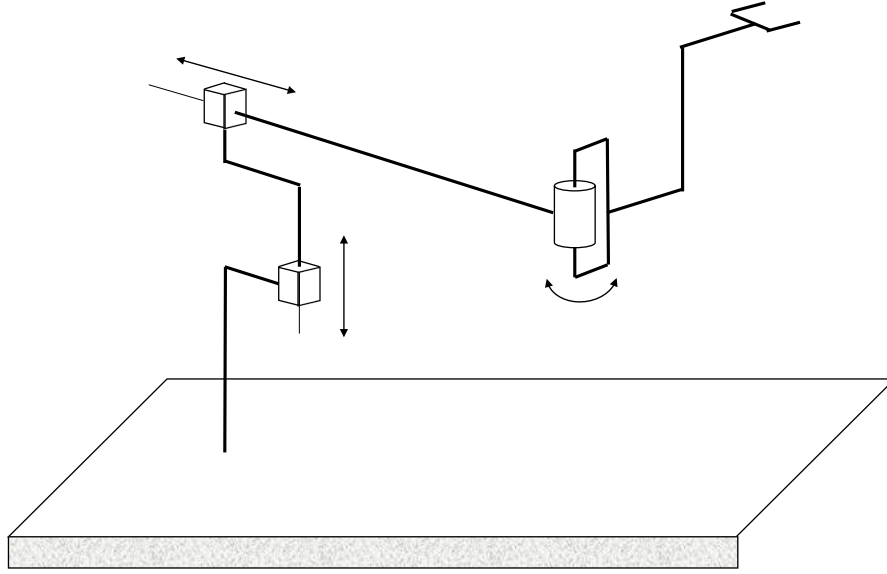
PROF. ROCCO

27 GIUGNO 2025 - PRIMO APPELLO

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Domanda 1.1 Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

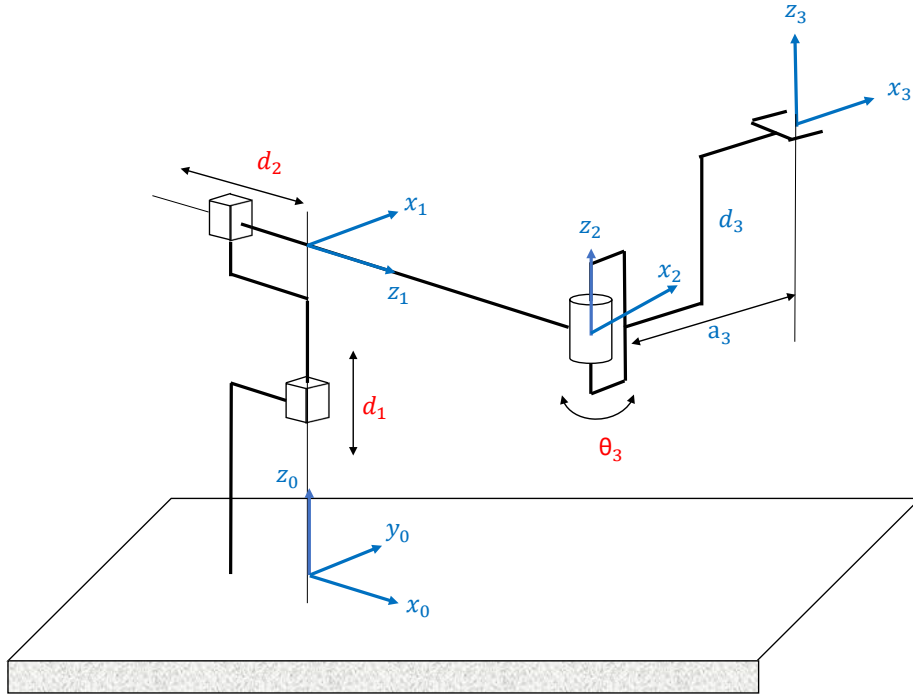
*Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura.
La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:*

	a	α	d	ϑ
1	0	90°	d_1	90°
2	0	-90°	d_2	0
3	a_3	0	0	ϑ_3

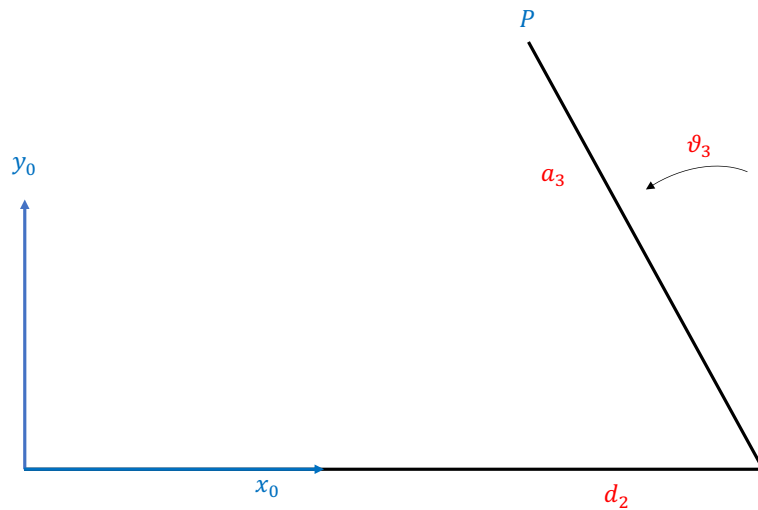
Domanda 1.2 Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione.¹

¹Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - y_0$:



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= d_2 - a_3 s_3 \\ p_y &= a_3 c_3 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_z = d_1 + d_3$$

Domanda 1.3 Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \end{bmatrix}$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} d_2 - a_3 s_3 - d_2 \\ a_3 c_3 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a_3 c_3 \\ 0 & 0 & -a_3 s_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

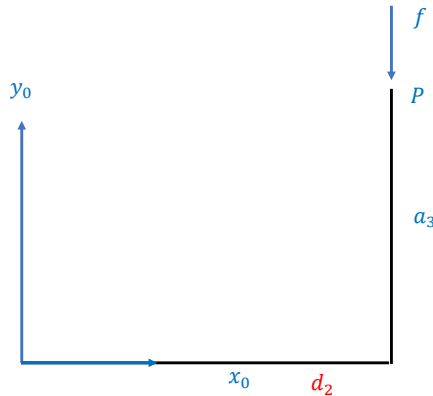
Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = -a_3 s_3$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $s_3 = 0$, ovvero $\vartheta_3 = 0$ oppure $\vartheta_3 = \pi$.

Domanda 1.4 Si consideri il manipolatore in una delle configurazioni singolari prima determinate. Si mostri analiticamente che una forza di ampiezza arbitraria, opportunamente diretta, è equilibrata da forze e coppie ai giunti nulle. Si spieghi anche in quale direzione, nella stessa configurazione singolare, il manipolatore non può esprimere velocità all'organo terminale.

Consideriamo il robot nella configurazione $\vartheta_3 = 0$:



Una forza di ampiezza arbitraria orientata come l'asse y_0 è equilibrata dalle seguenti forze e coppie:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_P^T \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questa configurazione singolare il robot non può esprimere velocità lungo l'asse y_0 (si osservi che la seconda riga dello Jacobiano è nulla).

Esercizio 2

Si supponga che un link di un robot connesso a un giunto prismatico debba compiere in $T = 3$ s un movimento di $h = 2$ m, partendo e arrivando con velocità nulle.

Domanda 2.1 Supponendo una velocità massima di 1 m/s, determinare tempo di accelerazione e accelerazione iniziale del corrispondente profilo a velocità trapezoidale.

Dati lo spostamento, il tempo di percorrenza e la massima velocità, possiamo calcolare il tempo di accelerazione e l'accelerazione iniziale come:

$$T_a = T - \frac{h}{v} = 1, \quad a = \frac{v}{T_a} = 1$$

Domanda 2.2 Si supponga ora che, per il posizionamento discusso al punto precedente, il valore massimo di accelerazione sia pari al doppio del valore calcolato precedentemente, mentre il valore di velocità massimo sia quello del punto precedente. Si determini il valore minimo del tempo di posizionamento.

L'accelerazione massima è $a_{\max} = 2$, mentre la velocità massima è $v_{\max} = 1$. Poiché:

$$h > \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}$$

entrambi i valori massimi possono essere raggiunti e il tempo di posizionamento minimo si calcola come:

$$T = \frac{h}{v_{\max}} + \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = 2.5$$

Domanda 2.3 Utilizzando di nuovo come tempo di posizionamento $T = 3$ s, si determini un profilo di posizione cubico per coprire la stessa distanza.

Esprimiamo il polinomio cubico di posizione come:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

e quello quadratico di velocità come:

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} q(0) &= 0 & q(3) &= 2 \\ \dot{q}(0) &= 0 & \dot{q}(3) &= 0 \end{aligned}$$

Dalle condizioni a $t = 0$ si ottiene $a_0 = a_1 = 0$. Dalle condizioni a $t = 3$ si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{aligned} 9a_2 + 27a_3 &= 2 \\ 6a_2 + 27a_3 &= 0 \end{aligned}$$

risolto il quale si ha:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{3} \\ a_3 &= -\frac{4}{27} \end{aligned}$$

Pertanto l'espressione della posizione è:

$$q(t) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{27}t^3$$

Domanda 2.4 Si supponga ora di dover pianificare il moto dell'end effector di un robot lungo un percorso lineare che parte da $\mathbf{p}_i = [1 \ k \ 1]^T$ e termina nell'origine del sistema di riferimento. Si spieghi che valore deve assumere k perché il profilo discusso in uno dei punti precedenti possa essere utilizzato nella pianificazione di questo movimento. Si scriva quindi l'espressione del percorso lineare così determinato, parametrizzato nell'ascissa curvilinea.

La distanza tra il punto finale e il punto iniziale si calcola come:

$$\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1 + k^2 + 1}$$

Affinché questa distanza sia uguale alla distanza $h = 2$ percorsa con i profili dei punti precedenti, deve essere $k = \sqrt{2}$. Detta $s(t)$ la posizione calcolata con tali profili, la pianificazione del moto dell'end effector sarà data da:

$$p(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s(t)}{h}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{s(t)}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Si consideri un sistema di controllo P/PI per un servomeccanismo elastico. Si assumano i seguenti valori dei parametri fisici:

$$\begin{aligned} J_m &= 0.02 \text{ kgm}^2 \\ D_m &= 0 \\ \rho &= 2 \end{aligned}$$

Nel corso di un esperimento eseguito bloccando meccanicamente il motore, si sono riscontrate sul carico oscillazioni poco smorzate di periodo pari a 0.0209 s.

Domanda 3.1 Si determini un valore della costante elastica K_{el} della trasmissione compatibile con i dati del problema.

A rotore bloccato, il carico oscilla alla pulsazione di antirisonanza ω_z . Pertanto, detto T il periodo delle oscillazioni:

$$\omega_z = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.0209} = 300 \text{ rad/s}$$

Il momento di inerzia del carico riferito all'asse motore risulta:

$$J_{lr} = \rho J_m = 0.04 \text{ kg/m}^2$$

Dalla relazione:

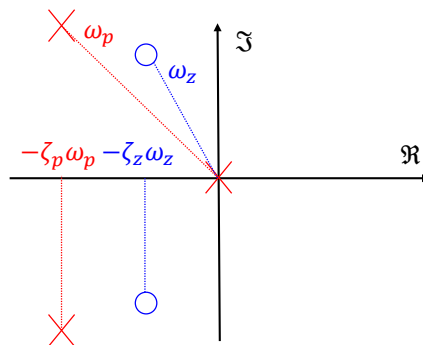
$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}$$

ricaviamo infine:

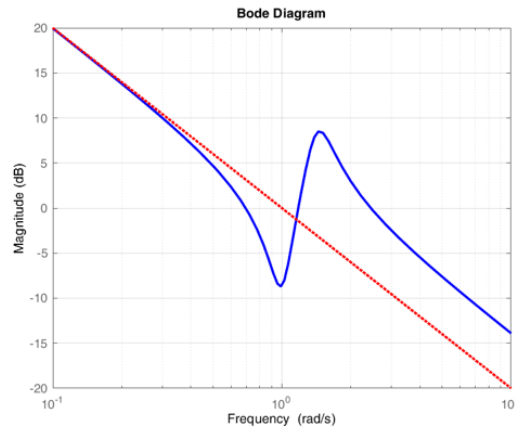
$$K_{el} = \omega_z^2 J_{lr} = 3600 \text{ Nm/rad}$$

Domanda 3.2 Si consideri la funzione di trasferimento $G_{vm}(s)$ da coppia motore a velocità motore per un generico servomeccanismo elastico (con $D_m = 0$). Per tale funzione di trasferimento si rappresentino nel piano complesso poli e zeri e si tracci il diagramma qualitativo di Bode del modulo della risposta in frequenza. In tale diagramma i poli complessi e coniugati precedono o seguono gli zeri? A cosa corrisponde ciò nella rappresentazione sul piano complesso di poli e zeri?

La disposizione qualitativa di poli e zeri della funzione di trasferimento è la seguente:



mentre il modulo della risposta in frequenza è rappresentato di seguito:



Nel diagramma di risposta in frequenza gli zeri precedono i poli. Nel piano complesso, questo corrisponde al fatto che gli zeri complessi e coniugati sono più vicini all'origine rispetto ai poli, dal momento che risulta:

$$\omega_z = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \rho^2}}$$

e quindi $\omega_z < \omega_p$.

Domanda 3.3 Per il servomeccanismo della domanda 3.1, si determinino il guadagno proporzionale e il tempo integrale di un regolatore PI di velocità opportunamente tarato.

Come è noto, la banda dell'anello di velocità può essere espressa come:

$$\omega_{cv} = K_{pv}\mu$$

dove:

$$\mu = \frac{1}{J_m + J_{lr}}$$

Per evitare l'insorgere di oscillazioni, ω_{cv} può essere scelta pari al 70% della pulsazione di antirisonanza ω_z .

Pertanto:

$$K_{pv} = \frac{\omega_{cv}}{\mu} = (J_m + J_{lr})0.7\omega_z = (0.02 + 0.04) * 0.7 * 300 = 12.6$$

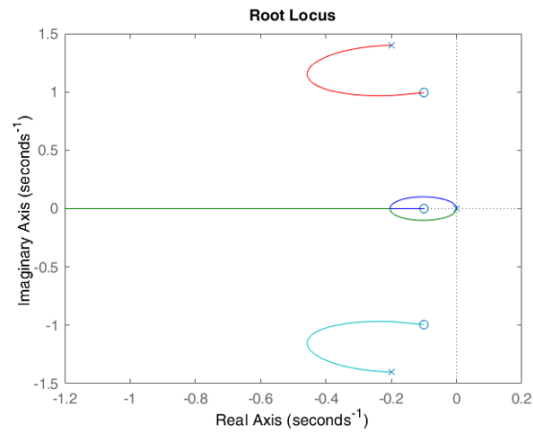
Lo zero del PI può essere posto una decade prima della pulsazione di antirisonanza:

$$\frac{1}{T_{iv}} = 0.1\omega_z$$

da cui:

$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_z} = 0.033$$

Domanda 3.4 Si supponga ora di aumentare significativamente, per esempio raddoppiandolo o triplicandolo, il guadagno del controllore di velocità. Facendo riferimento al luogo delle radici dell'anello di velocità si spieghi dove tendono a collocarsi i poli del sistema in anello chiuso e che conseguenze questa scelta può avere sul comportamento del sistema in anello chiuso.



Il luogo delle radici al variare del guadagno del controllore di velocità assume questo aspetto: Aumentando molto il valore del guadagno del controllore, i poli in anello chiuso tendono a posizionarsi in sovrapposizione agli zeri poco smorzati della funzione di trasferimento avente come uscita la velocità motore. Questi poli sono autovalori del sistema in anello chiuso e comportano oscillazioni poco smorzate del carico