Fondamenti di Robotica

Prof. Rocco

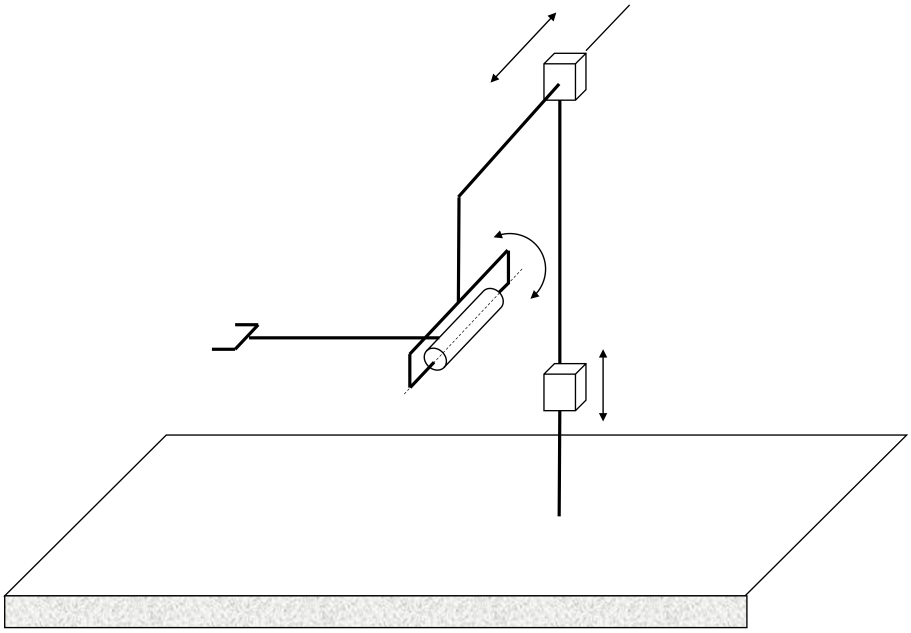
24 Giugno 2022

SOLUZIONE

Fondamenti di Robotica
Prof. Paolo Rocco

ESERCIZIO 1

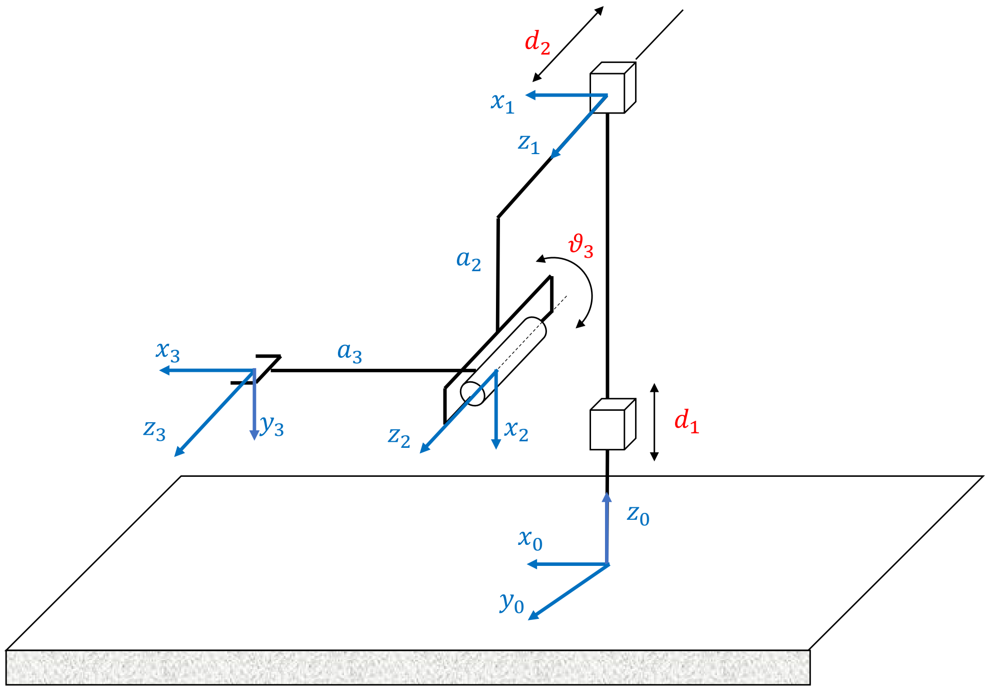
1. Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura:



La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:

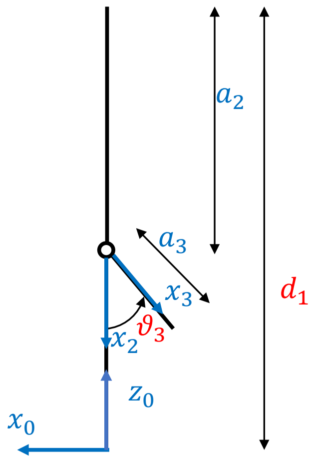
	a	α	d	ϑ
1	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_1	0
2	a_2	0	d_2	$\frac{\pi}{2}$
3	a_3	0	0	ϑ_3

2. Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione. [1]

Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - z_0$:

[1] Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= -a_3 s_3 \\ p_z &= d_1 - a_2 - a_3 c_3 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_y = d_2$$

3. Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità[2]

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \end{array} \right]$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -a_3 s_3 \\ 0 \\ -a_3 c_3 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

[2] Si ricorda che il prodotto vettoriale tra i vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ è $c = a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3c_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a_3s_3 \end{bmatrix}$$

Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = a_3c_3 = 0$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$ oppure $\vartheta_3 = -\frac{\pi}{2}$.

4. Si consideri il manipolatore nella configurazione in cui è disegnato. Si scriva l'espressione della matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla terna 0.

   La matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla 0 si scrive come:

$$\mathbf{A}_3^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3^0 & \mathbf{p}_3^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

   Pertanto:

$$\mathbf{A}_3^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 - a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2

1. Si consideri la generazione della traiettoria di posizione nello spazio Cartesiano. Si prenda come punto iniziale: $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e come punto finale $\mathbf{p}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$. Si scriva l'espressione di un segmento che connetta i punti iniziale e finale, parametrizzato con l'ascissa curvilinea.

   L'espressione del segmento, parametrizzata nell'ascissa curvilinea s, è:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

   Poiché:

$$\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+4+3} = 4$$

   l'espressione del percorso è:

$$\mathbf{p}(s) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{s}{4}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

2. Assumendo un tempo di percorrenza $T = 2s$, si progetti una traiettoria che copra il cammino geometrico prima determinato, usando un profilo di velocità trapezoidale con tempo di accelerazione $T_a = 0.4s$. Si determinino in particolare l'accelerazione iniziale e la velocità di crociera dell'end effector.

   La distanza da percorrere è $h = 4$. Poiché il tempo di accelerazione è $T_a = 0.4s$, risulta una velocità di crociera di (ponendo $q = s$ per utilizzare l'abituale simbologia):

$$\dot{q}_v = \frac{h}{T - T_a} = \frac{4}{2 - 0.4} = 2.5$$

   e un'accelerazione iniziale data da:

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_v}{T_a} = \frac{2.5}{0.4} = 6.25$$

3. Si supponga ora che il massimo valore raggiungibile dall'accelerazione dell'end effector sia quello calcolato al punto precedente, ma che la massima velocità sia limitata a $\frac{4}{5}$ di quella precedentemente calcolata. Si determini il minimo tempo di posizionamento nel caso si vogliano raggiungere sia la massima accelerazione, sia la massima velocità, e lo si confronti con il tempo di posizionamento imposto al punto precedente.

   Risulta $\ddot{q}_{\max} = \ddot{q}_c = 6.25$ e $\dot{q}_{\max} = \frac{4}{5}\dot{q}_v = 2$. Poiché la seguente disuguaglianza è soddisfatta:

$$h = 4 > \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}} = \frac{4}{6.25}$$

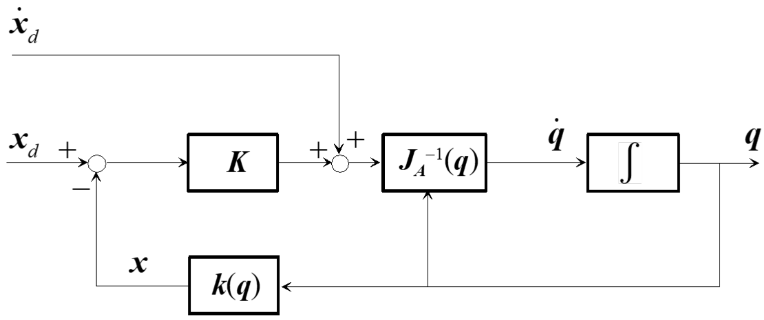
   sono raggiunte sia la velocità massima, sia l'accelerazione massima. Il tempo di posizionamento vale:

$$T_{\min} = \frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} = \frac{4}{2} + \frac{2}{6.25} = 2.32$$

   Il tempo di posizionamento è superiore al precedente, coerentemente con il fatto che la massima velocità raggiunta è inferiore.

4. Si disegni lo schema a blocchi di uno schema di inversione cinematica a inversa dello Jacobiano e si spieghi che risultato tale schema consente di ottenere.

   Lo schema a blocchi è rappresentato in figura:



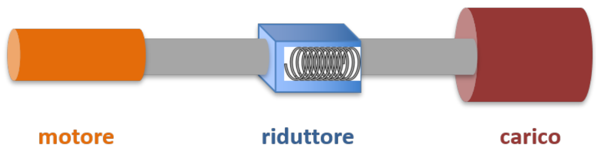
Detto $\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}$ l'errore nell'inversione della cinematica, lo schema consente di ottenere:

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

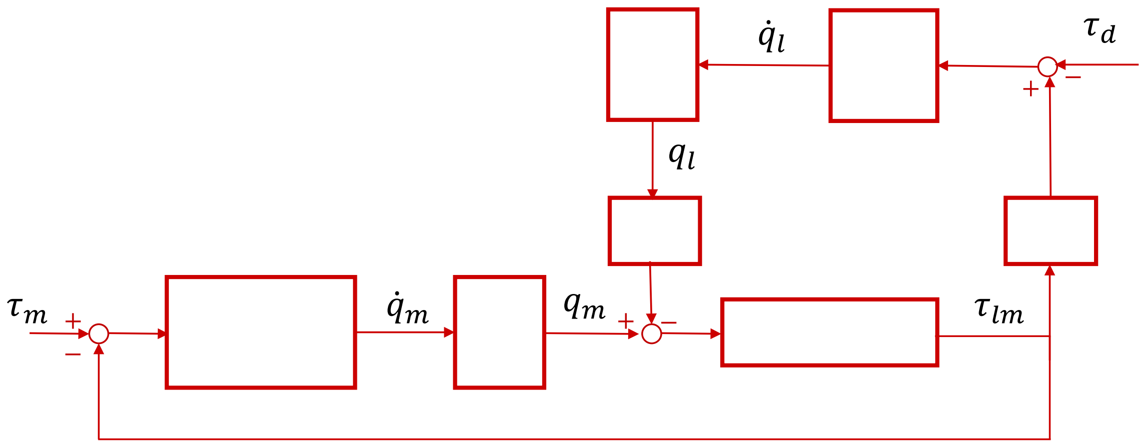
Pertanto se $\mathbf{K}$ è una matrice definita positiva, l'errore tende esponenzialmente a zero qualunque sia il suo valore iniziale.

ESERCIZIO 3

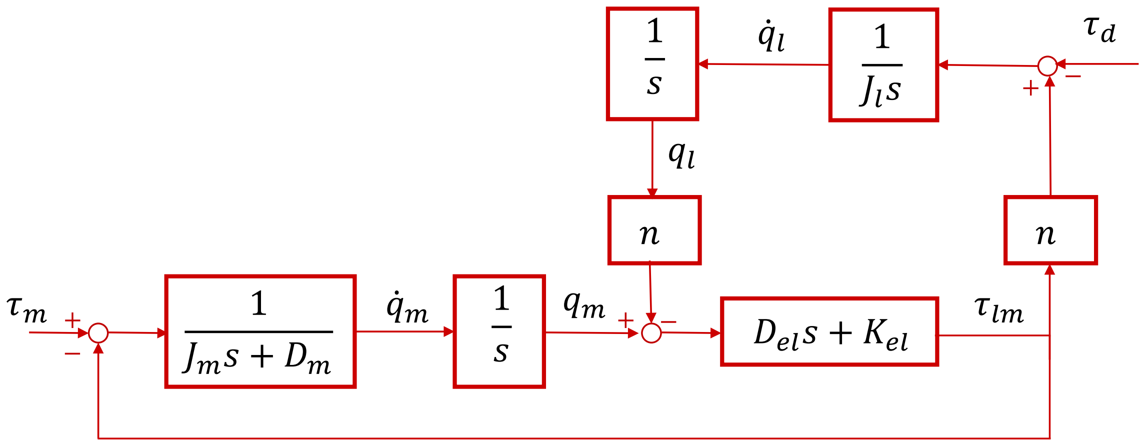
Si consideri un servomeccanismo elastico:



1. Definendo τ_m la coppia motrice, τ_{lm} la coppia trasmessa tra motore e carico, τ_d una coppia di disturbo lato carico, q_m e $\dot{q}_m$ posizione e velocità lato motore, q_l e $\dot{q}_l$ posizione e velocità lato carico, e facendo riferimento alla seguente figura, si completi lo schema a blocchi corrispondente al modello dinamico del servomeccanismo:

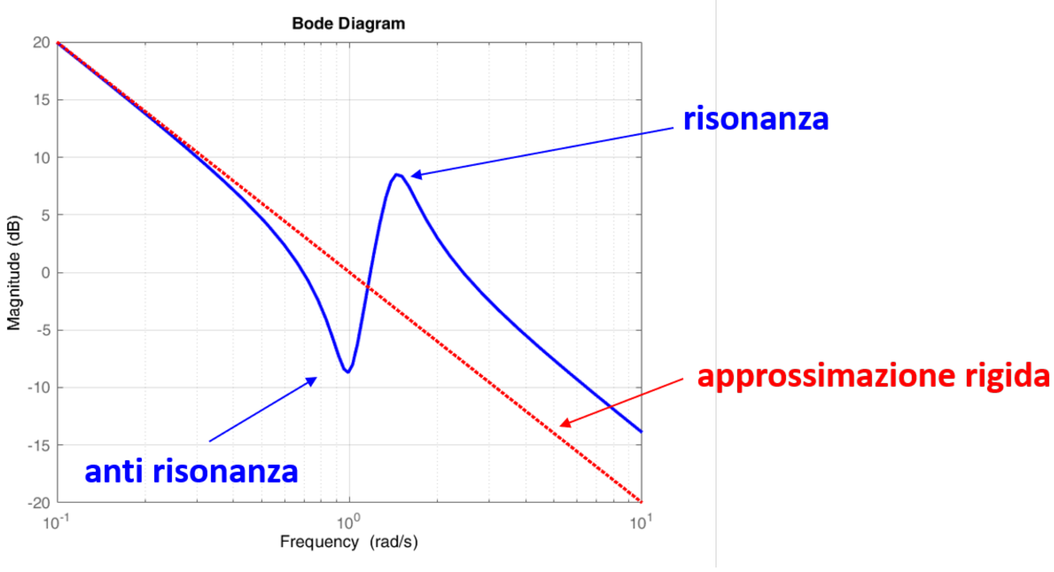


Lo schema a blocchi completo è il seguente:



2. Si tracci l'andamento qualitativo del diagramma di Bode del modulo della risposta in frequenza da coppia motrice a velocità motore (in assenza della coppia di disturbo τ_d) e si confronti tale diagramma con quello dell'approssimazione rigida della stessa risposta in frequenza.

   L'andamento qualitativo della risposta in frequenza, comprensivo dell'approssimazione rigida di bassa frequenza e nell'ipotesi $D_m \approx 0$, è il seguente:



3. Assumendo ora che il servomeccanismo elastico sia un giunto di un manipolatore robotico, si spieghi che significato assume l'inerzia lato carico J_l. Si determini quindi il valore di tale inerzia quando il rapporto di trasmissione vale $n = 50$ e la costante elastica vale $K_{el} = 50$, in modo da avere la pulsazione a rotore bloccato pari a 100 rad/s.

Nel caso di giunto di un robot, il momento di inerzia lato carico assume il significato di momento di inerzia dell'intera struttura a valle del giunto in questione, collocata in una determinata configurazione.

La pulsazione a rotore bloccato corrisponde alla pulsazione di antirisonanza:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}$$

dove $J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}$ è il momento di inerzia del carico riportato all'asse motore. Pertanto risulta:

$$J_{lr} = \frac{K_{el}}{\omega_z^2} = \frac{50}{10000} = 0.005$$

Di conseguenza:

$$J_l = n^2 J_{lr} = 2500 \cdot 0.005 = 12.5$$

4. Per il servomeccanismo caratterizzato dai parametri del punto precedente, assumendo soddisfatta la condizione di "inertia matching", si progetti un opportuno controllore PI di velocità.

In base alla condizione di inertia matching risulta $J_m = J_{lr} = 0.005$. È opportuno fissare la pulsazione critica dell'anello di velocità al 70% della pulsazione di antirisonanza, ossia $\omega_{cv} = 0.7\omega_z = 70$. Pertanto il guadagno del controllore è:

$$K_{pv} = \frac{\omega_{cv}}{\mu} = \omega_{cv}\left(J_m + J_{lr}\right) = 70 \cdot (0.005 + 0.005) = 0.7$$

Il tempo integrale può essere scelto come:

$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_z} = 0.1$$