Fondamenti di Robotica

Prof. Rocco

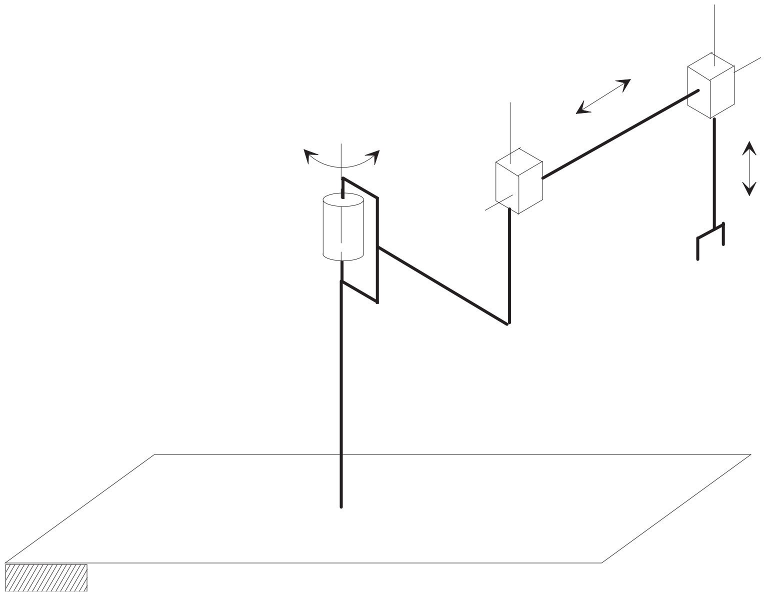
24 Giugno 2021

SOLUZIONE

Fondamenti di Robotica
Prof. Paolo Rocco

ESERCIZIO 1

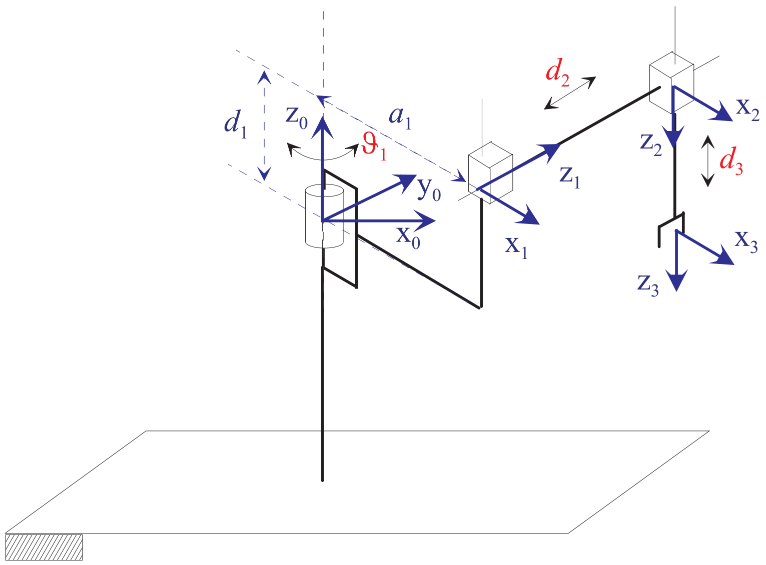
1. Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura:



La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:

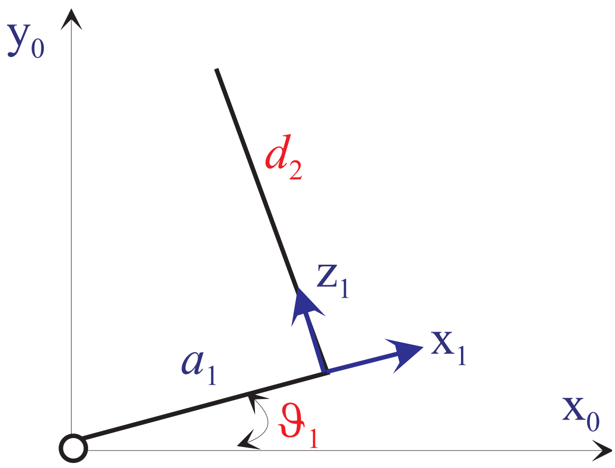
	a	α	d	ϑ
1	a_1	$-\frac{\pi}{2}$	d_1	ϑ_1
2	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_2	0
3	0	0	d_3	0

2. Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione. [1]

Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione con una vista dall'alto. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente figura:

[1] Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$
\begin{aligned}
p_x &= a_1 c_1 - d_2 s_1 \\
p_y &= a_1 s_1 + d_2 c_1
\end{aligned}
$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$
p_z = d_1 - d_3
$$

3. Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$
\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}
$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$
\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

Pertanto:

$$
\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - d_2 c_1 & -s_1 & 0 \\ a_1 c_1 - d_2 s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = -\left(-a_1 s_1 c_1 - d_2 c_1^2 + a_1 s_1 c_1 - d_2 s_1^2\right) = d_2$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $d_2 = 0$.

4. Si consideri il manipolatore nella configurazione $\vartheta_1 = 0$ e si supponga di applicare una forza all'end-effector orientata come l'asse x_0: si calcolino le coppie/forze ai giunti che la equilibrano.

   Quando $\vartheta_1 = 0$ lo Jacobiano risulta:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -d_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   Pertanto una forza diretta come l'asse x_0 è equilibrata dalle coppie:

$$\tau = \begin{bmatrix} -d_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_2 f_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2

1. Si ricavi l'espressione di una traiettoria cubica che porti $q(t)$ dal valore iniziale $q_i = 0$ al valore finale $q_f = 2$, in un intervallo di tempo di $2s$, con velocità iniziale e finale nulle.

   Esprimiamo il polinomio cubico di posizione come:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

   e quello quadratico di velocità come:

$$q(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

   con le condizioni al contorno:

$$\begin{array}{ll} q(0) = 0 & q(2) = 2 \\ \dot{q}(0) = 0 & \dot{q}(2) = 0 \end{array}$$

   Dalle condizioni a $t = 0$ si ottiene $a_0 = a_1 = 0$. Dalle condizioni a $t = 2$ si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{aligned} 4a_2 + 8a_3 &= 2 \\ 4a_2 + 12a_3 &= 0 \end{aligned}$$

   risolto il quale si ha:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3}{2} \\ a_3 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Pertanto l'espressione della posizione è:

$$q(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3$$

2. Per la traiettoria calcolata al punto precedente, si determinino il valore massimo assunto dalla velocità ($\dot{q}_{\max}$) e dall'accelerazione ($\ddot{q}_{\max}$).

   La velocità e l'accelerazione assumono rispettivamente le espressioni:

   $$\dot{q}(t) = 3t - \frac{3}{2}t^2$$

   e

   $$\ddot{q}(t) = 3 - 3t$$

   I rispettivi valori massimi sono:

   $$\begin{aligned} \dot{q}_{\max} &= \dot{q}(1) = 1.5 \\ \ddot{q}_{\max} &= \ddot{q}(0) = 3 \end{aligned}$$

3. Si supponga ora di voler assegnare un profilo di velocità trapezoidale, di uguale durata del precedente, con accelerazione iniziale uguale al valore $\ddot{q}_{\max}$ determinato al punto 2. Si determini il valore massimo assunto dalla velocità [2] e lo si confronti con quello massimo $\dot{q}_{\max}$ determinato al punto 2.

   Poiché $T = 2$ e $h = 2$, mentre il valore iniziale dell'accelerazione è $\ddot{q}_c = \ddot{q}_{\max} = 3$ il legame tra accelerazione e tempo di accelerazione è espresso dall'equazione:

   $$3T_a^2 - 6T_a + 2 = 0$$

   L'unica soluzione ammissibile è $T_a = 0.42$ da cui il valore massimo assunto dalla velocità $\dot{q}_v = \ddot{q}_c T_a = 1.26$. Questo valore è inferiore rispetto al massimo valore assunto dalla velocità nel profilo di posizione cubico (1.5).

4. Adottando ora i valori massimi sia di velocità sia di accelerazione $\dot{q}_{\max}$ e $\ddot{q}_{\max}$ determinati al punto 2, si valuti il minimo tempo per posizionare q da q_i a q_f con un profilo di velocità trapezoidale.

   Poiché:

   $$h > \frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}} = 0.75$$

   si può effettivamente progettare un profilo di velocità trapezoidale e il tempo di posizionamento risulta:

   $$T = \frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} = \frac{2}{1.5} + \frac{1.5}{3} = \frac{11}{6} = 1.83$$

ESERCIZIO 3

[2] Si ricorda che per una traiettoria a profilo di velocità trapezoidale di durata T che copra la distanza h sussiste il seguente legame tra l'accelerazione iniziale $\ddot{q}_c$ e il tempo di accelerazione T_a: $\ddot{q}_c T_a^2 - \ddot{q}_c T T_a + h = 0$

1. Si consideri il progetto di un controllore P/PI per un servomeccanismo rigido. Si scriva l'espressione della funzione di trasferimento d'anello $L_v(s)$ per il controllo di velocità, avendo cura di specificare il significato dei simboli usati.

   La funzione di trasferimento d'anello assume la seguente espressione:

$$L_v(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s}\frac{1+sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

   dove $\mu = \frac{1}{J_m+J_{lr}}$, $J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}$, mentre K_{pv} e T_{iv} sono rispettivamente guadagno proporzionale e tempo integrale del regolatore di velocità.

2. Si assumano ora i seguenti valori dei parametri fisici (in unità SI):

$$\begin{aligned} J_m &= 0.003 \\ D_m &= 0 \\ J_l &= 5 \\ n &= 50 \end{aligned}$$

   Si progetti il regolatore PI di velocità in modo da ottenere una pulsazione critica $\omega_{cv} = 100$ rad/s. Si tracci il diagramma di Bode asintotico del modulo di L_v specificatamente riferito al progetto eseguito.

   Osserviamo anzitutto che $J_{lr} = \frac{J_l}{n^2} = 5/2500 = 0.002$. Facendo riferimento all'approssimazione di alta frequenza di L_v possiamo porre:

$$\omega_{cv} = K_{pv}\mu$$

   da cui:

$$K_{pv} = \frac{\omega_{cv}}{\mu} = (J_m + J_{lr})\omega_{cv} = (0.003 + 0.002) * 100 = 0.5$$

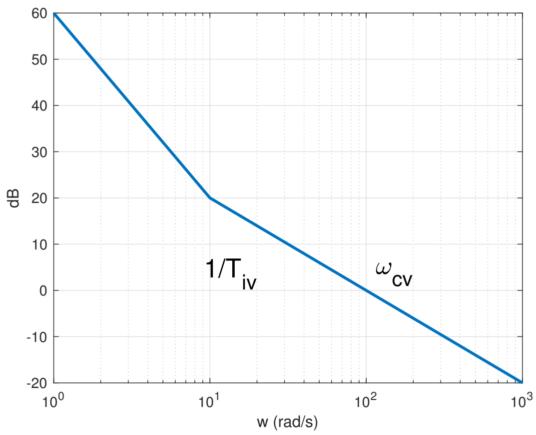
   Lo zero del PI può essere posto una decade prima della pulsazione critica:

$$\frac{1}{T_{iv}} = 0.1\omega_{cv}$$

   da cui:

$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_{cv}} = 0.1$$

   Il diagramma di Bode del modulo asintotico di L_v è riportato di seguito:



3. Si supponga ora che il giunto tra motore e carico presenti dell'elasticità. Si determini il minimo valore della costante elastica per cui il progetto condotto al punto precedente si possa considerare robusto rispetto alla presenza di tale elasticità.

   Affinché il progetto si possa considerare robusto rispetto all'elasticità del giunto, deve essere:

   $$\omega_{cv} < 0.7\omega_z$$

   dove ω_z è la pulsazione di risonanza. Pertanto:

   $$\omega_z > \omega_{cv}/0.7 = 143$$

   Ricordando che:

   $$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}$$

   otteniamo la disuguaglianza:

   $$K_{el} > 143^2 J_{lr} = 40.9 Nm/rad$$

4. Si assuma ora che il giunto sia caratterizzato da elasticità con costante elastica pari al valore limite determinato al punto precedente. Se si aumentasse di molto, per esempio di un ordine di grandezza, il guadagno del controllore di velocità, con quale periodo approssimativamente oscillerebbe il carico?

   Aumentando molto il valore del guadagno del controllore, i poli del sistema in anello chiuso si avvicinano agli zeri poco smorzati, caratterizzati dalla pulsazione di antirisonanza, o pulsazione a rotore bloccato, ω_z. Pertanto il carico oscillerà con periodo:

   $$T = \frac{2\pi}{\omega_z} = 0.044s$$