



POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2025-2026

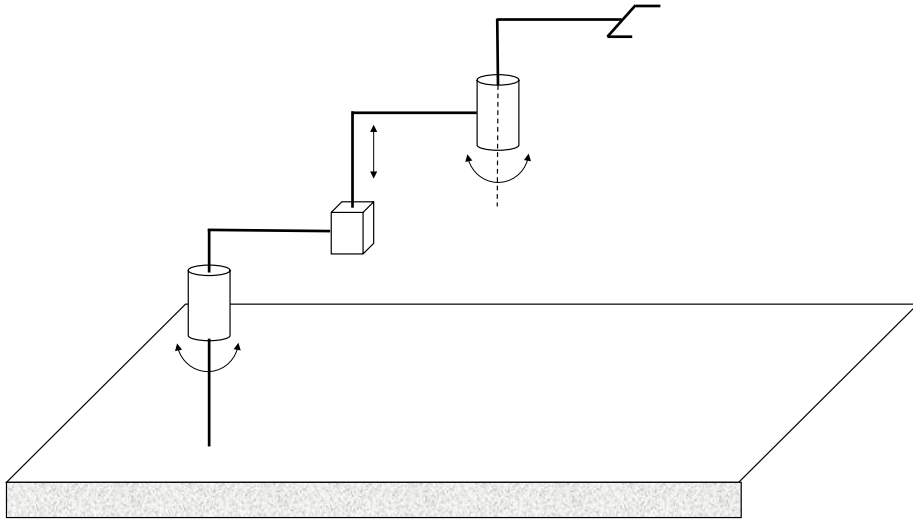
PROF. ROCCO

22 GIUGNO 2026 - PRIMO APPELLO

SOLUZIONI

Esercizio 1

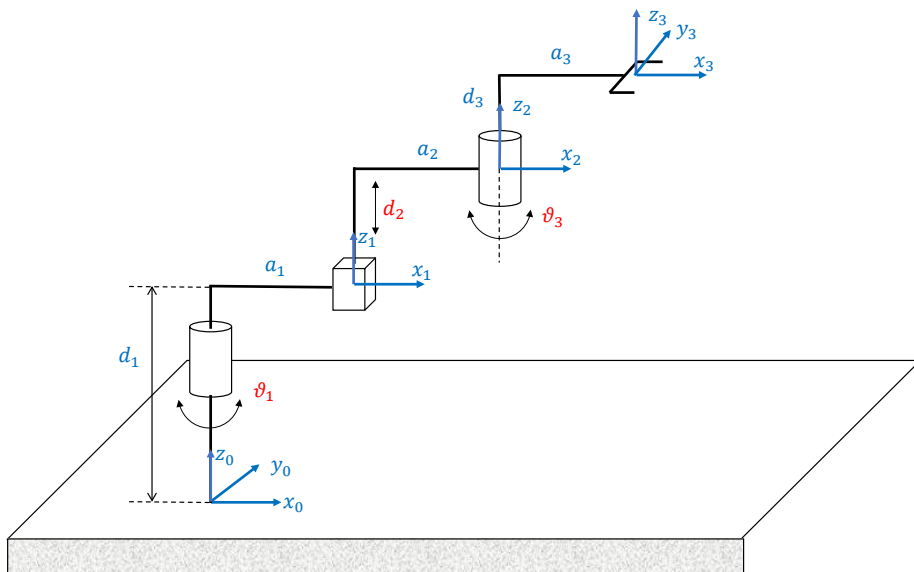
Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Domanda 1.1 Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

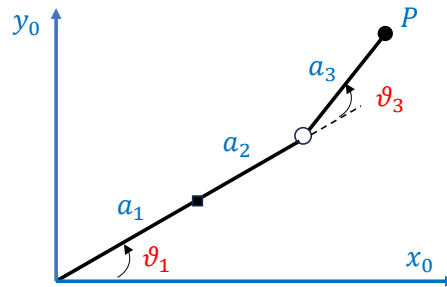
Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura.
La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:



	a	α	d	ϑ
1	a_1	0	d_1	ϑ_1
2	a_2	0	d_2	0
3	a_3	0	d_3	ϑ_3

Domanda 1.2 Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione¹.

Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - y_0$:



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= (a_1 + a_2)c_1 + a_3c_{13} \\ p_y &= (a_1 + a_2)s_1 + a_3s_{13} \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_z = d_1 + d_2 + d_3$$

Domanda 1.3 Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = [\mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2)]$$

dove \mathbf{p} ha l'espressione data dalla cinematica diretta, mentre:

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2)c_1 \\ (a_1 + a_2)s_1 \\ d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

¹Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo dello Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo dei prodotti vettoriali e ponendo $a_{12} = a_1 + a_2$:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -a_{12}s_1 - a_3s_{13} & 0 & -a_3s_{13} \\ a_{12}c_1 + a_3c_{13} & 0 & a_3c_{13} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = a_{12}a_3s_{13}c_1 - a_{12}a_3c_{13}s_1 = a_{12}a_3s_3$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $s_3 = 0$, ossia $\vartheta_3 = 0$ oppure $\vartheta_3 = \pi$.

Domanda 1.4 Si consideri il manipolatore nella configurazione in cui $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$. Si scriva l'espressione della matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla terna 0. Si spieghi se per calcolare la matrice di trasformazione omogenea della terna 0 rispetto alla terna 3 è sufficiente considerare la trasposta della matrice appena calcolata.

La matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla 0 si scrive come:

$$\mathbf{A}_3^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3^0 & \mathbf{p}_3^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Nella configurazione indicata, x_3 è diretto e orientato come y_0 , y_3 come $-x_0$:

$$\mathbf{A}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & a_1 + a_2 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le matrici di trasformazione omogenea non sono matrici ortogonali, quindi l'inversa non coincide con la trasposta. Per la precisione, si ottiene:

$$\mathbf{A}_0^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^3 & -\mathbf{R}_0^3\mathbf{p}_3^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Domanda 2.1 Si determini la relazione che sussiste per un generico manipolatore tra le coppie $\boldsymbol{\tau}$ applicate ai giunti e la forza \mathbf{f} e il momento $\boldsymbol{\mu}$ applicati all'end effector.

Detto \mathbf{q} il vettore delle variabili di giunto, \mathbf{p} il vettore posizione dell'end effector, $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare dell'end effector, il lavoro elementare compiuto dalle coppie ai giunti è dato da:

$$dW_\tau = \boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q}$$

mentre il lavoro virtuale compiuto da forze e momenti all'end effector è:

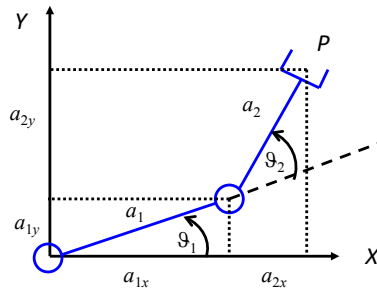
$$dW_f = \mathbf{f}^T d\mathbf{p} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} dt = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} d\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\omega} dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}^T \mathbf{J} d\mathbf{q}$$

dove \mathbf{J} è lo Jacobiano geometrico.

Uguagliando le due espressioni per il lavoro, si ottiene:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}$$

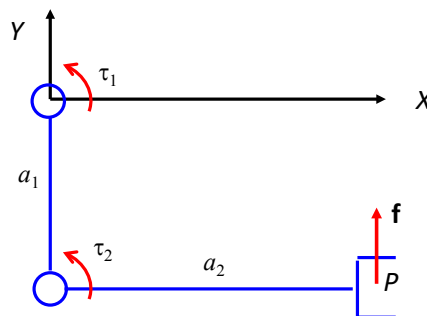
Domanda 2.2 Ricordando che per un manipolatore a due gradi di libertà:



lo Jacobiano geometrico assume la seguente espressione:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

si determinino le coppie τ_1 e τ_2 che equilibrano la forza \mathbf{f} nella configurazione riportata in figura:



Nella configurazione rappresentata, $\vartheta_1 = -\pi/2$, $\vartheta_2 = \pi/2$. Pertanto lo Jacobiano geometrico assume la seguente espressione:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(-\pi/2) - a_2 \sin(0) & -a_2 \sin(0) \\ a_1 \cos(-\pi/2) + a_2 \cos(0) & a_2 \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

Poiché la forza applicata è $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_y \end{bmatrix}$, risulta:

$$\tau = \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} 0 \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 f_y \\ a_2 f_y \end{bmatrix}$$

Domanda 2.3 Si dia la definizione di misura di manipolabilità e si spieghi se, per un manipolatore a due gradi di libertà, la configurazione riportata nella figura del punto precedente massimizza tale misura.

La misura di manipolabilità esprime il volume dell'ellissoide di manipolabilità ed è data da:

$$\alpha(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)} = |\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}))|$$

Per il manipolatore del presente esercizio risulta:

$$\alpha(\mathbf{q}) = a_1 a_2 |\sin(\vartheta_2)|$$

La configurazione in cui la misura di manipolabilità è massimizzata è quella in cui $\vartheta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$, ossia quando i due link sono ortogonali, come nella configurazione del punto precedente.

Domanda 2.4 Si diano la definizione e l'espressione dell'ellissoide di manipolabilità in forza. Quando il manipolatore a due gradi di libertà del presente esercizio è quasi tutto steso, che forma assumono rispettivamente l'ellissoide di manipolabilità in velocità e in forza?

L'ellissoide di manipolabilità in forza esprime tutte le forze che possono essere esercitate all'end effector in corrispondenza a coppie a norma unitaria ai giunti. Consideriamo quindi tutte le coppie a giunti a norma unitaria $\tau^T \tau = 1$. Detto $\gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mu \end{bmatrix}$ si ha:

$$[\mathbf{J}^T \gamma]^T [\mathbf{J}^T \gamma] = \gamma^T [\mathbf{J}\mathbf{J}^T] \gamma = 1$$

che è l'espressione dell'ellissoide di manipolabilità in forza.

Quando il manipolatore a due gradi di libertà del presente esercizio è quasi tutto steso, esso è in grado di esercitare forze preferibilmente lungo la retta sui cui giacciono i due link e velocità lungo la retta ortogonale. Pertanto l'ellissoide di manipolabilità in forza diventa un'ellissi schiacciata lungo tale retta, quello in velocità un'ellissi schiacciata in direzione ortogonale.

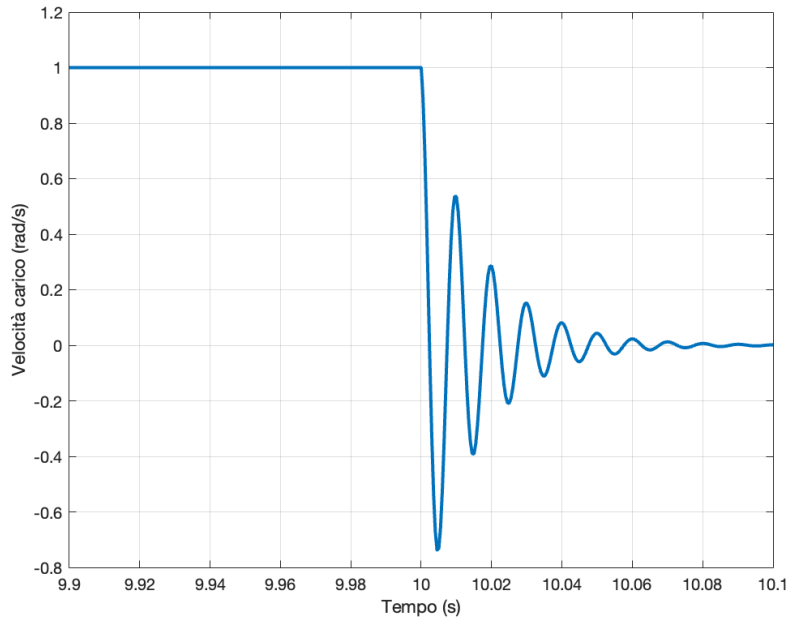
Esercizio 3

Domanda 3.1 Si descriva la tipica struttura di controllo del moto di un servomeccanismo. Con riferimento alla struttura di controllo descritta, ipotizzando un azionamento di tipo brushless, si spieghi in quali anelli di controllo viene utilizzata la misura di posizione.

La tipica struttura di controllo di un servomeccanismo prevede tre anelli di regolazione in cascata. Un primo anello interno di corrente agisce sulla tensione di alimentazione, un secondo anello di velocità agisce sul setpoint di corrente. Infine l'anello più esterno di posizione agisce sul setpoint di velocità ed è solitamente coadiuvato da un'azione di feedforward di velocità.

La misura di posizione viene utilizzata in tutti gli anelli di controllo descritti in precedenza. In particolare, nell'anello di corrente si utilizza per la misura angolo elettrico, nell'anello velocità per la stima della velocità a partire dalla posizione ed infine nell'anello di posizione come misura da retroazionare.

Domanda 3.2 Si assumano ora i seguenti parametri $J_m = 0.004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_l = 36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Si assuma che venga effettuato il seguente esperimento: mentre il motore ruota alla velocità di 90 rad/s , all'istante $t = 10 \text{ s}$ i suoi freni elettromeccanici vengono attivati. L'andamento della velocità del carico è riportata nel seguente grafico.



Si stimi la rigidità della trasmissione K_{el} .

L'arresto del motore rende il carico libero di oscillare. Il periodo di oscillazione si stima facilmente dal grafico come $T = 0.01 \text{ s}$. La frequenza a rotore bloccato è quindi: $\omega_z = \frac{2\pi}{T} = 200\pi \text{ rad/s}$. Si osservi inoltre che prima del blocco freni il carico ruota a 1 rad/s . Siccome il motore ruota n volte più velocemente del carico, risulta $n = 90$. Infine, essendo

$$\omega_z = \sqrt{\frac{n^2 K_{el}}{J_l}}$$

risulta $K_{el} = \omega_z^2 J_l / n^2 = 1754 \text{ Nm/rad}$.

Domanda 3.3 Si spieghi se nel servomeccanismo del presente esercizio è rispettato il criterio di inertia matching.

Il criterio di inertia matching prevede che $\rho \approx 1$. Nel caso in esame

$$\rho = \frac{J_l}{n^2 J_m} = 1.11$$

Si conclude pertanto che il criterio si possa considerare approssimativamente verificato.

Domanda 3.4 Si proponga una taratura opportuna del regolatore di velocità per il servomeccanismo del presente esercizio.

Si ha:

$$\mu = \frac{1}{J_m + J_l/n^2} = 118.42$$

Possiamo tarare il regolatore PI di velocità prendendo un guadagno proporzionale pari a:

$$K_{pv} = 0.7 \frac{\omega_z}{\mu} = 3.71$$

e un tempo integrale

$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_z} = 0.016$$