Fondamenti di Robotica

Prof. Rocco

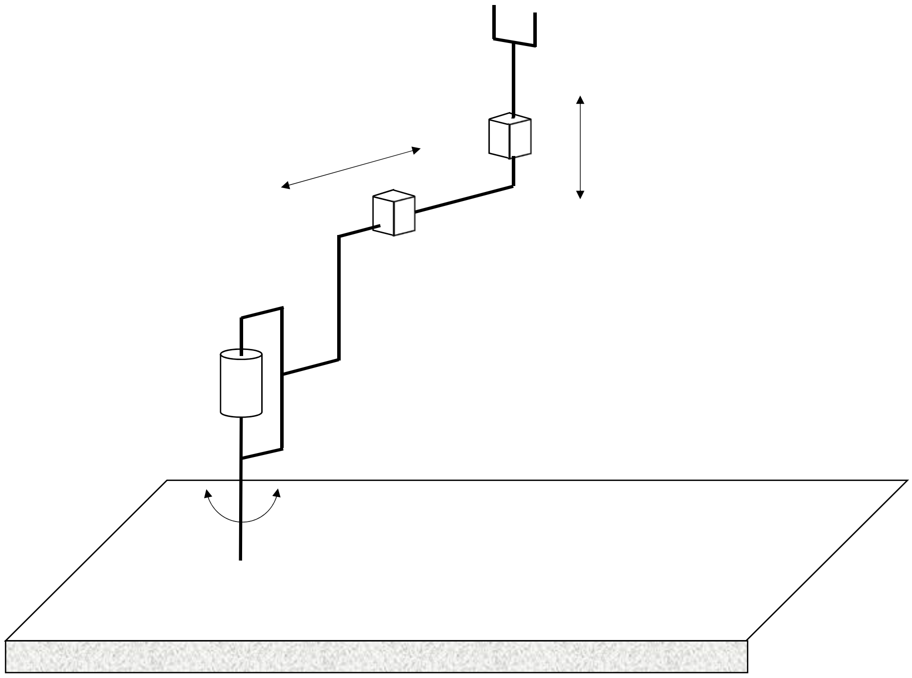
21 Luglio 2022

SOLUZIONE

Fondamenti di Robotica
Prof. Paolo Rocco

ESERCIZIO 1

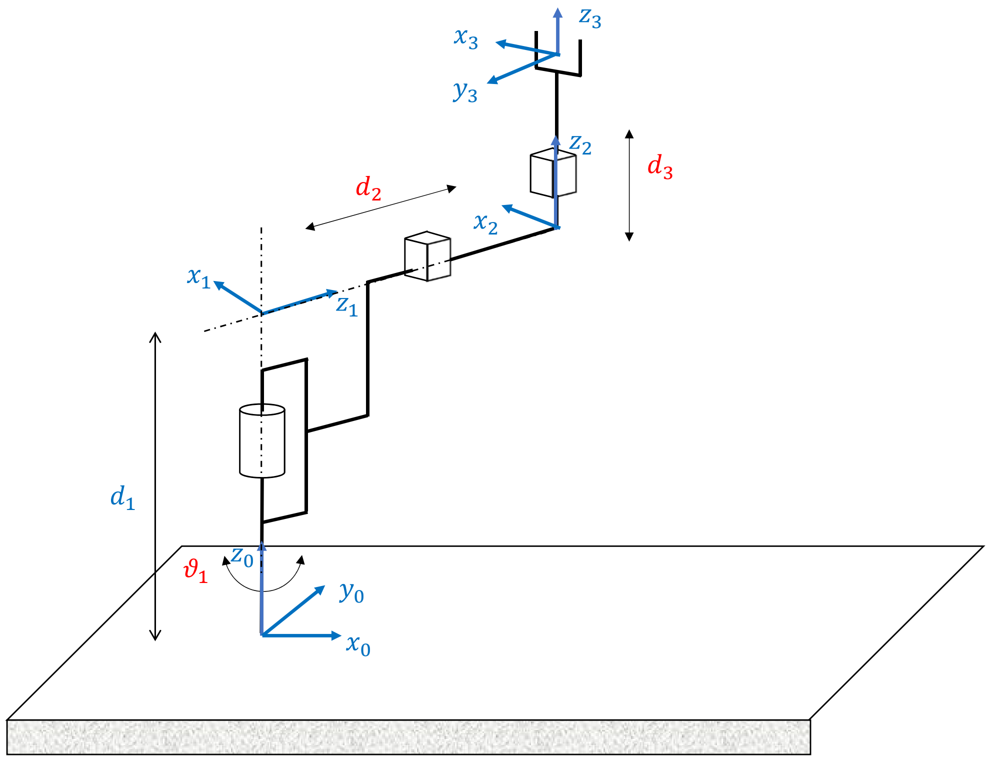
1. Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura:



La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:

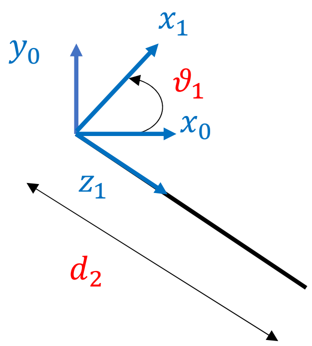
	a	α	d	ϑ
1	0	$\frac{\pi}{2}$	d_1	ϑ_1
2	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_2	0
3	0	0	d_3	0

2. Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione. [1]

Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - y_0$:

[1] Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$
\begin{aligned}
p_x &= d_2 s_1 \\
p_y &= -d_2 c_1
\end{aligned}
$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$
p_z = d_1 + d_3
$$

3. Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità.

   Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$
\mathbf{J}_P = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{array} \right]
$$

   Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$
\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} d_2 s_1 \\ -d_2 c_1 \\ \star \end{bmatrix}
$$

   Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} d_2 c_1 & -s_1 & 0 \\ d_2 s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det\left(\mathbf{J}_P\right) = d_2\left(c_1^2 + s_1^2\right) = d_2 = 0$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $d_2 = 0$.

4. Si scrivano le equazioni della cinematica inversa per il manipolatore dato, specificando quante soluzioni esistono per una data posizione dell'end effector.

   Quadrando e sommando le espressioni di p_x e p_y si ottiene un'equazione nella sola d_2:

   $$d_2^2 = p_x^2 + p_y^2$$

   da cui le due soluzioni per d_2:

   $$d_2 = \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

   Nota d_2 si può calcolare ϑ_1 come:

   $$\vartheta_1 = \arctan 2\left(\frac{p_x}{d_2}, -\frac{p_y}{d_2}\right)$$

   Infine:

   $$d_3 = p_z - d_1$$

   Pertanto vi sono due soluzioni della cinematica inversa, una con d_2 positivo, l'altra con d_2 negativo.

ESERCIZIO 2

1. Si spieghi che cosa si intende per rappresentazione asse-angolo dell'orientamento.

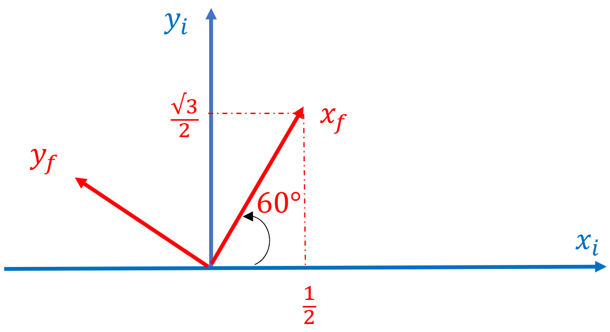
   Date due terne, la rotazione di una rispetto all'altra si può interpretare come una rotazione di un angolo ϑ intorno a un asse $\mathbf{r}$. L'angolo ϑ e le componenti del versore $\mathbf{r}$ costituiscono la rappresentazione asse-angolo.

2. Si supponga ora di volere pianificare la traiettoria di orientamento dell'end-effector di un robot. Le matrici di rotazione che esprimono rispettivamente l'orientamento iniziale e l'orientamento finale rispetto alla terna mondo sono:

   $$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \qquad \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini l'asse intorno a cui deve essere effettuata la rotazione e l'angolo per cui occorre ruotare.

Chiaramente, essendo l'orientamento iniziale coincidente con quello della terna mondo, la matrice $\mathbf{R}_f$ esprime già la rotazione totale da compiere. Questa consiste in una rotazione elementare intorno all'asse $\mathbf{z}$ di un angolo pari a $60°$, come si evince dalla figura:



3. Si definisca il quaternione unitario e si esprima la rotazione della terna finale rispetto a quella iniziale di questo esercizio con un quaternione unitario.

   Data la rappresentazione asse-angolo, il quaternione unitario si definisce come:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \mathbf{q}_v &= \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\mathbf{r} \end{aligned}$$

   Nel caso del presente esercizio:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathbf{q}_v &= \sin(30°)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Sempre con riferimento ai dati di questo esercizio, si pianifichi l'evoluzione dell'angolo con una legge oraria cubica rispetto al tempo, con tempo di posizionamento pari a $T = 1s$. Si assumano nulle la velocità iniziale e quella finale e si esprima l'angolo in gradi.[2]

   La legge oraria cubica per la posizione e per la velocità angolare si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ \dot{\vartheta}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \end{aligned}$$

[2] Nel caso non si sia riusciti a risolvere il punto 2 dell'esercizio, si risolva il presente punto assumendo come valore finale dell'angolo $40°$.

Le condizioni al contorno da imporre sono:

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= 0\\ \vartheta(1) &= 60\\ \dot{\vartheta}(0) &= 0\\ \dot{\vartheta}(1) &= 0\end{aligned}$$

Dalle condizioni a $t = 0$ si deduce facilmente che $a_0 = a_1 = 0$. Si ottiene poi il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}a_2 + a_3 &= 60\\ 2a_2 + 3a_3 &= 0\end{aligned}$$

che risolto dà $a_2 = 180$, $a_3 = -120$. Pertanto la legge oraria da imporre all'angolo è:

$$\vartheta(t) = 180t^2 - 120t^3$$

ESERCIZIO 3
Si consideri un sistema di controllo P/PI per un servomeccanismo elastico. Si assumano i seguenti valori dei parametri fisici:

$$\begin{aligned}J_m &= 0.01Kgm^2\\ D_m &= 0\\ \rho &= 3\end{aligned}$$

1. Nel corso di un esperimento eseguito lasciando il sistema, privo di controllore, libero di vibrare, si sono riscontrate sul carico oscillazioni poco smorzate di periodo pari a 0.0314 s. Si determini il periodo delle oscillazioni che si otterrebbero in un nuovo esperimento in cui si vincolasse meccanicamente il motore.

   Il primo esperimento consiste nella identificazione sperimentale della pulsazione naturale del sistema. Risulta:
   $$\omega_p = \frac{2\pi}{T} = 200$$
   Ne consegue che la pulsazione di antirisonanza, o a rotore bloccato, è:
   $$\omega_z = \frac{\omega_p}{\sqrt{1+\rho}} = 100$$
   Pertanto, a rotore bloccato, il periodo delle oscillazioni sarebbe:
   $$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_z} = 0.0628s$$

2. Si determini un valore della costante elastica K_{el} della trasmissione compatibile con i dati del problema.

   Il momento di inerzia lato carico riportato all'asse motore è:

$$J_{lr} = \rho J_m = 0.03$$

   Dalla relazione:

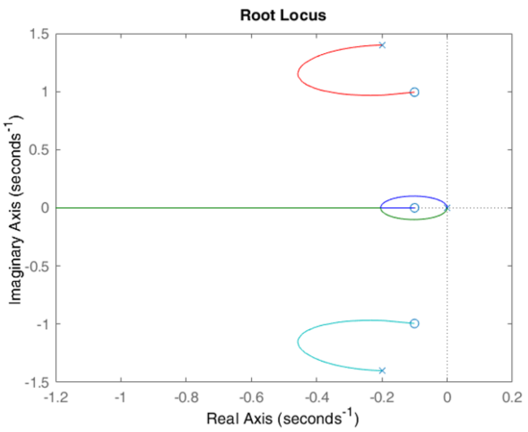
$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}$$

   si ricava:

$$K_{el} = J_{lr}\omega_z^2 = 0.03 \cdot 100^2 = 300$$

3. Si tracci il luogo delle radici del sistema di controllo di velocità chiuso con un regolatore PI lato motore e si spieghi che criterio di progetto suggerisce tale luogo delle radici.

   Il luogo delle radici è il seguente:



   Per massimizzare lo smorzamento dei poli in anello chiuso è opportuno collocarli nel punto di contatto dei rami con la tangente spiccata dall'origine del piano complesso. Empiricamente questo corrisponde ad adottare una pulsazione critica dell'anello pari a circa il 70% della pulsazione di antirisonanza ω_z.

4. Seguendo il criterio prima enunciato, si determinino il guadagno proporzionale e il tempo integrale di un regolatore PI di velocità opportunamente tarato.

   Imponiamo che la pulsazione critica nominale sia pari al 70% di ω_z:

$$K_{pv}\mu = 0.7\omega_z$$

   dove:

$$\mu = \frac{1}{J_m + J_{lr}}$$

Pertanto:

$$K_{pv} = 0.7\frac{\omega_z}{\mu} = 0.7\left(J_m + J_{lr}\right)\omega_z = 2.8$$

Lo zero del PI può essere posto una decade prima di ω_z, da cui:

$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_z} = 0.1$$