POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Robotica

a.a. 2022-2023

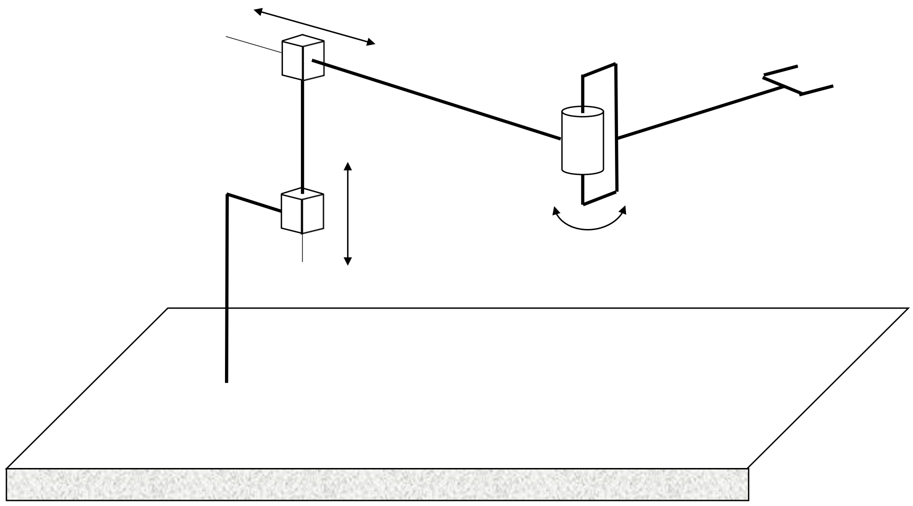
Prof. Rocco

20 Luglio 2023 - Secondo appello

SOLUZIONI

Esercizio 1

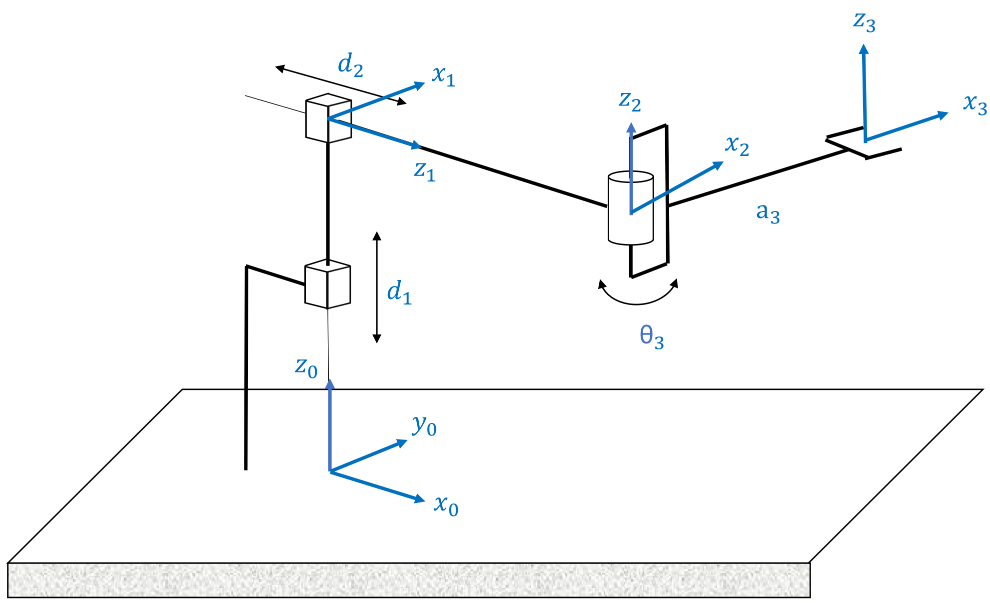
Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Domanda 1.1 Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

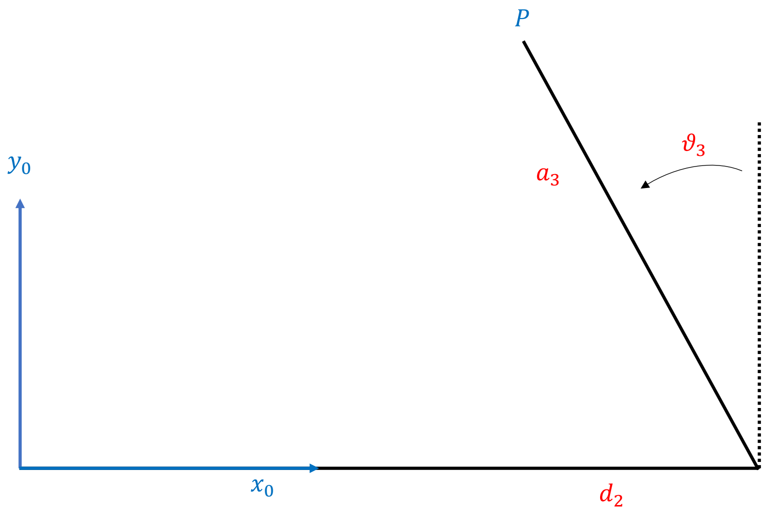
Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura.
La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:



	a	α	d	ϑ
1	0	90°	d_1	90°
2	0	−90°	d_2	0
3	a_3	0	0	ϑ_3

Domanda 1.2 Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione. [1]

Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - y_0$:



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= d_2 - a_3 s_3 \\ p_y &= a_3 c_3 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_z = d_1$$

Domanda 1.3 Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità

[1] Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \end{bmatrix}$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} d_2 - a_3 s_3 - d_2 \\ a_3 c_3 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a_3 c_3 \\ 0 & 0 & -a_3 s_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = -a_3 s_3$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $s_3 = 0$, ovvero $\vartheta_3 = 0$ oppure $\vartheta_3 = \pi$.

Domanda 1.4 Si consideri il manipolatore nella configurazione in cui $\vartheta_3 = 0$ e alla terna utensile viene applicata una forza di -10 N in direzione y_3. Si calcoli il vettore di forze/coppie che il sistema di attuazione deve fornire al fine di bilanciare la forza esterna.

Nel sistema di riferimento $x_0 - y_0 - z_0$ la forza si scrive come $F_x = 10, F_y = 0, F_z = 0$, oppure formalmente

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}_3^0 \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_P^T \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -10a_3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Domanda 2.1 Si consideri una traiettoria a profilo di velocità trapezoidale. Si ricavi l'espressione della velocità $\dot{q}_v$ nel tratto centrale (velocità di crociera) noti il tempo di posizionamento T, il tempo di accelerazione T_a e la distanza da percorrere h.

La distanza percorsa è l'integrale della velocità, ossia l'area del trapezio di velocità. Calcolando tale area si ottiene:

$$h = \frac{(T + T - 2T_a)\dot{q}_v}{2} = (T - T_a)\dot{q}_v$$

da cui:

$$\dot{q}_v = \frac{h}{T - T_a}$$

Domanda 2.2 Si consideri ora la generazione della traiettoria con profilo di velocità trapezoidale per una variabile $q(t)$ con i seguenti dati:

$$\begin{array}{cc} q_i = 0 & q_f = 45^\circ \\ \dot{q}_{\max} = 10^\circ/s & \ddot{q}_{\max} = 10^\circ/s^2 \end{array}$$

Si determinino il minimo tempo di posizionamento T e il relativo tempo di accelerazione T_a

Poiché risulta:

$$\frac{\dot{q}_{\max}^2}{\ddot{q}_{\max}} = \frac{100}{10} = 10 < h = 45$$

Si può determinare un profilo di velocità trapezoidale. Si ottiene quindi come tempo di posizionamento:

$$T = \frac{h}{\dot{q}_{\max}} + \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} = \frac{45}{10} + \frac{10}{10} = 5.5$$

Il tempo di accelerazione vale invece:

$$T_a = \frac{\dot{q}_{\max}}{\ddot{q}_{\max}} = \frac{10}{10} = 1$$

Domanda 2.3 Con riferimento alla pianificazione del punto precedente, si supponga che il tempo di posizionamento sia aumentato del 30%, senza modificare il tempo di accelerazione. Si determini la velocità di crociera che si ottiene a seguito del cambiamento del tempo di posizionamento.

Il nuovo tempo di posizionamento sarà $T_{new} = 1.3 \cdot T = 7.15$. *Utilizzando la formula ricavata al primo punto di questo esercizio si ottiene:*

$$\dot{q}_v = \frac{h}{T_{new} - T_a} = \frac{45}{7.15 - 1} = 7.32$$

che corrisponde al 73.2% *della velocità massima.*

Domanda 2.4 Si supponga ora che la pianificazione del punto precedente sia usata per l'angolo nella rappresentazione asse-angolo adottata nella pianificazione dell'orientamento dell'end effector del robot. Assumendo che l'asse della rappresentazione asse-angolo sia $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, si scriva l'espressione della matrice di rotazione che definisce l'orientamento finale rispetto a quello iniziale.

La pianificazione considerata corrisponde a una rotazione totale di 45° *intorno all'asse* $\mathbf{z}$. *La relativa matrice di rotazione si può scrivere come:*

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3

Domanda 3.1 Si spieghi come è possibile, in un motore brushless sinusoidale, rendere la coppia indipendente dall'angolo di rotazione.

In un motore brushless sinusoidale i profili di forza contro elettromotrice assumono le seguenti espressioni in funzione dell'angolo elettrico α:

$$\begin{aligned} K_a(\alpha) &= pKsin(\alpha) \\ K_b(\alpha) &= pKsin\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) \\ K_c(\alpha) &= pKsin\left(\alpha - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

Se si pilotano, per mezzo dell'inverter, correnti nelle tre fasi aventi le seguenti dipendenze dall'angolo elettrico:

$$\begin{aligned} I_a(\alpha) &= Isin(\alpha) \\ I_b(\alpha) &= Isin\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) \\ I_c(\alpha) &= Isin\left(\alpha - \frac{4}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

la coppia motrice, ricavata per uguaglianza tra la potenza elettrica e quella meccanica, risulta:

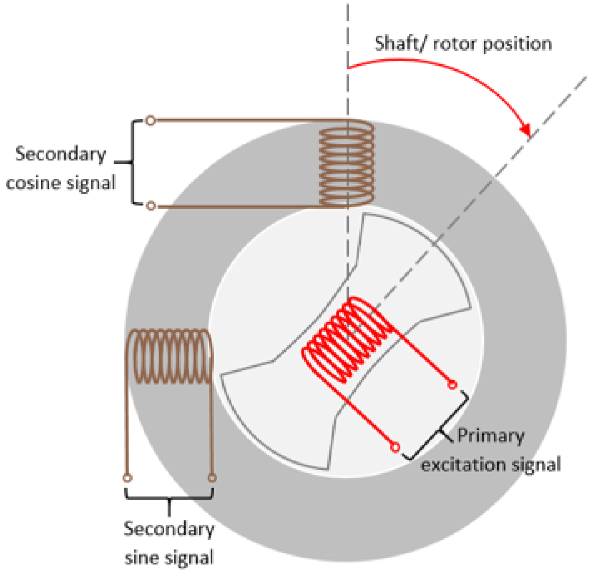
$$\begin{aligned} \tau_m &= K_a(\alpha) I_a(\alpha) + K_b(\alpha) I_b(\alpha) + K_c(\alpha) I_c(\alpha) \\ &= pKI\left(sin^2(\alpha) + sin^2\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) + sin^2\left(\alpha - \frac{4}{3}\pi\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}pKI = K_t I \end{aligned}$$

ovvero la coppia è indipendente dall'angolo.

Domanda 3.2 Per il funzionamento di un motore brushless è necessaria la misura della posizione relativa tra rotore e statore. Facendo riferimento alla seguente figura, si spieghi sinteticamente (senza ricorrere a formule) il principio di funzionamento di un resolver

Sul rotore del resolver è disposto l'avvolgimento di eccitazione, sullo statore sono disposti due avvolgimenti (pick-up) in quadratura spaziale. Il circuito di rotore è eccitato con una tensione alternata di alta frequenza, mentre i due circuiti di statore raccolgono, mediante mutua induzione, tensioni che sono proporzionali rispettivamente al seno e al coseno dell'angolo di rotazione. Elaborando tali misure è possibile ricavare l'informazione relativa all'angolo.

Domanda 3.3 Si consideri ora un encoder assoluto. Sulla base del principio di funzionamento, si ricavi la formula che esprime la risoluzione dello strumento. Si determini quindi il numero minimo di tracce per avere una risoluzione inferiore al decimo di grado.



Il resolver è costituito da corone concentriche: la prima suddivide l'angolo giro in due angoli piatti, la seconda ciascun angolo piatto in due angoli di 90 gradi e così via. Con N tracce si avranno quindi 2^N suddivisioni dell'angolo giro e quindi la risoluzione è pari a $\frac{360°}{2^N}$.
Procedendo per tentativi si ottiene che per $N = 10$ la risoluzione è $\frac{360°}{1024} = 0.35°$, per $N = 10$ la risoluzione è $\frac{360°}{2048} = 0.17°$, per $N = 12$ la risoluzione è $\frac{360°}{4096} = 0.088°$. Occorrono quindi almeno 12 tracce per ottenere una risoluzione di un decimo di grado.

Domanda 3.4 Dalle misure di un encoder si può ricavare anche una misura indiretta delle velocità. Si illustrino i metodi a tempo fisso e a spazio fisso utilizzati a tal scopo.

Nel metodo a tempo fisso si campiona l'uscita dell'encoder a passo temporale fissato T_s:

$$\omega(k) = \frac{\theta(k) - \theta(k-1)}{T_s}$$

Nel metodo a spazio fisso si misura il tempo necessario per cambiare l'uscita dell'encoder di un bit (variazione $\Delta\theta$):

$$\omega(k) = \frac{\Delta\theta}{t_k - t_{k-1}}$$