

POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2025-2026

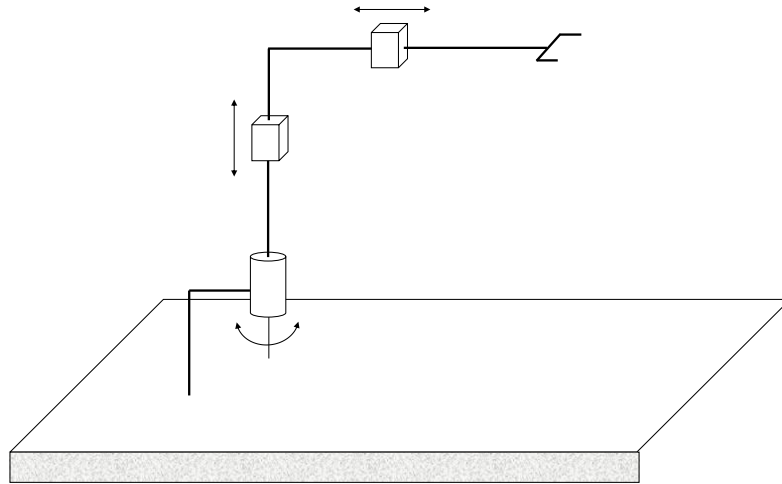
PROF. ROCCO

17 LUGLIO 2026 - SECONDO APPELLO

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il manipolatore disegnato in figura:

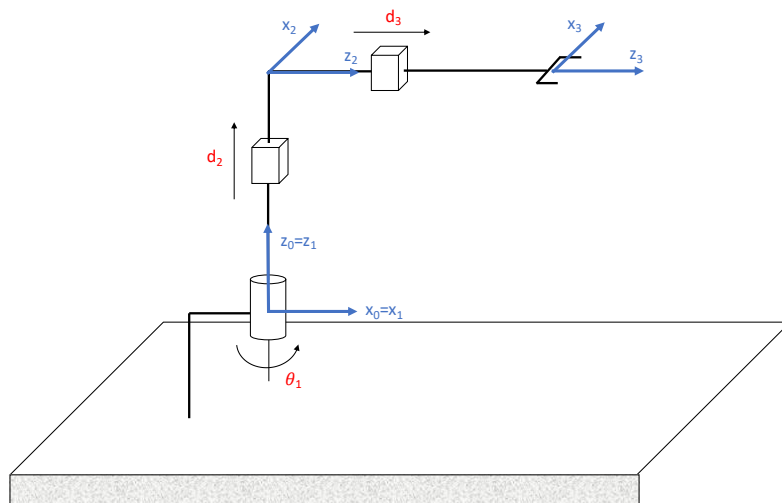


Domanda 1.1 Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura.

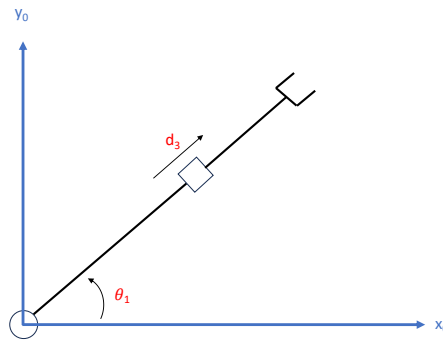
La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:



	a	α	d	ϑ
1	0	θ	0	ϑ_1
2	0	90°	d_2	90°
3	0	θ	d_3	0

Domanda 1.2 Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione¹.

Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - y_0$:



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= d_3 c_1 \\ p_y &= d_3 s_1 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_z = d_2$$

Domanda 1.3 Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità

¹Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{p}$ ha l'espressione data dalla cinematica diretta, mentre:

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo dei prodotti vettoriali:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -d_3 s_1 & 0 & c_1 \\ d_3 c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda le singolarità, abbiamo

$$\det(\mathbf{J}_P) = d_3 c_1^2 + d_3 s_1^2 = d_3$$

Le configurazioni di singolarità sono pertanto caratterizzate da $d_3 = 0$.

Domanda 1.4 Volendo caratterizzare la cinematica del robot in funzione di una terna base genericamente posizionata sul pavimento alla base del robot, e con stesso orientamento della terna 0, scrivere l'espressione della matrice di trasformazione omogenea $\mathbf{T}_0^b$.

La matrice di trasformazione omogenea è caratterizzata da una semplice traslazione e si scrive pertanto come:

$$\mathbf{T}_0^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove x, y, z sono le coordinate dell'origine della terna 0 espresse nella terna base.

Esercizio 2

Domanda 2.1 Si consideri la seguente istruzione nel linguaggio di programmazione RAPID di ABB:

MoveL tPresa, v100, z50, tVentosa

Si spieghi qual è l'interpretazione di questa istruzione, specificando con precisione il significato di tutti i simboli utilizzati. In particolare, si spieghi se **tPresa** è un *robtarget* o un *jointtarget*, illustrando il significato di queste espressioni.

L'istruzione specifica un movimento lineare verso la posa tPresa, con velocità all'end effector di 100 mm/s. tPresa è da considerarsi un punto di via, cui il TCP deve avvicinarsi fino a una distanza di 50 mm, ed è espressa rispetto alla terna tVentosa. tPresa è un robtarget, ossia una posa del robot espressa in termini di posizione e orientamento e di una stringa di configurazione (per indicare quale soluzione della cinematica inversa è di interesse). Viceversa un jointtarget indica un insieme di posizioni dei giunti del robot espressi in gradi.

Domanda 2.2 Si supponga ora di dover pianificare il moto dell'end effector di un robot lungo un percorso lineare che parte da $\mathbf{p}_i = [1 \quad \sqrt{2} \quad 1]^T$ e termina nell'origine del sistema di riferimento. Si scriva l'espressione del segmento, parametrizzato nell'ascissa curvilinea.

La distanza tra il punto finale e il punto iniziale si calcola come:

$$\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 2$$

Detta $s(t)$ l'ascissa curvilinea, la pianificazione del moto dell'end effector sarà data da:

$$p(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s(t)}{h} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{s(t)}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Domanda 2.3 Assumendo un tempo di posizionamento $T = 1s$, si progetti una traiettoria che copra il cammino geometrico prima determinato, usando un profilo di velocità trapezoidale con tempo di accelerazione $T_a = 0.2s$. Si determinino in particolare l'accelerazione iniziale e la velocità di crociera dell'end effector.

Possiamo calcolare la velocità di crociera come:

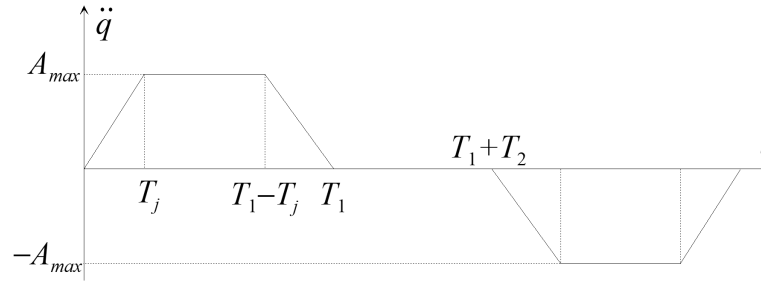
$$\dot{q}_v = \frac{h}{T - T_a} = \frac{2}{2 - 0.2} = 2.5$$

L'accelerazione iniziale è quindi:

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_v}{T_a} = \frac{2.5}{0.2} = 12.5$$

Domanda 2.4 Nelle traiettorie a profilo di velocità trapezoidale l'accelerazione presenta delle discontinuità. Si spieghi perché questo può costituire un problema nella pianificazione di una traiettoria e si disegni un profilo di accelerazione che possa ovviare a questo inconveniente, pur mantenendo un tratto centrale della traiettoria a velocità costante.

La discontinuità nel profilo di accelerazione, pur essendo concettualmente ammissibile, può essere sconsigliabile in quanto può generare sollecitazioni al sistema meccanico tali da indurre eccitazione delle risonanze strutturali del robot e conseguenti vibrazioni. Un modo per ovviare consiste nell'attribuire il profilo trapezoidale all'accelerazione invece che alla velocità. Il profilo quindi può essere come quello rappresentato in figura:



Esercizio 3

Domanda 3.1 Si riportino le equazioni del modello della dinamica elettrica di un motore elettrico a corrente continua e si spieghi come si imposta il relativo problema di sintesi del controllo di corrente/coppia.

Il modello di riferimento richiesto è il seguente

$$L \frac{di(t)}{dt} = V(t) - Ri(t) - E(t)$$

$$E(t) = k_e \omega_m(t)$$

dove $i(t)$ è la corrente rotorica, $V(t)$ la relativa tensione di alimentazione, R, L rispettivamente la resistenza e l'induttanza statoriche, $E(t), k_e$ la forza controelettromotrice e la relativa costante, $\omega_m(t)$ la velocità del rotore.

Essendo la coppia erogata $\tau_m(t) = k_t i(t)$, la regolazione di coppia avviene implicitamente mediante regolazione di corrente. In particolare un regolatore proporzionale-integrale, viene sintonizzato sulla base della dinamica del circuito equivalente RL mentre la forza controelettromotrice $E(t)$ viene considerata un disturbo a bassa frequenza da compensare opportunamente nella banda dell'azione di controllo.

Domanda 3.2 Scrivere le relazioni che legano la coppia motrice alla corrente e la forza controelettromotrice alla velocità del motore. Esplicitare quale sia la relazione tra le due costanti che compaiono in tali relazioni.

Come già riportato al punto precedente $E(t) = k_e \omega_m(t)$ e $\tau_m(t) = k_t i(t)$. Assumendo una trasformazione quasi integrale di potenza elettrica in potenza meccanica, possiamo scrivere

$$P_E(t) = E(t) i(t) = k_e \omega_m(t) i(t) \approx P_m(t) = \tau_m(t) \omega_m(t) = k_t i(t) \omega_m(t)$$

e pertanto

$$k_e \approx k_t$$

Domanda 3.3 Si assuma che l'inerzia del rotore sia pari a $J_m = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e che quella del carico risulti invece $J_l = 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e si dimensioni il rapporto di riduzione con il criterio dell'*inertia matching*. Si supponga quindi di voler tarare il regolatore proporzionale-integrale di velocità con una pulsazione critica di $\omega_{cv} = 140 \text{ rad/s}$. Si determini il minimo valore della costante elastica K_{el} affinché tale taratura si possa considerare robusta rispetto alla presenza di elasticità nel giunto.

Un criterio per rapportare la pulsazione critica dell'anello di velocità alla pulsazione di antirisonanza è $\omega_{cv} < 0.7 \omega_z$. Ne consegue che possiamo imporre:

$$\omega_z > \frac{\omega_{cv}}{0.7} = \frac{140}{0.7} = 200$$

In virtù del criterio dell'inertia matching $J_{lr} = J_m$, ricordando che $\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}$ otteniamo la disuguaglianza:

$$K_{el} > J_{lr} \omega_z^2 = 10^{-3} \cdot 200^2 = 40$$

Domanda 3.4 Prendendo ora il valore limite di K_{el} determinato al punto precedente, si supponga di moltiplicare di un fattore 5 il valore della pulsazione critica ω_{cv} . Si stimi il periodo delle oscillazioni del carico in questa situazione.

Con un valore molto elevato della pulsazione critica, i poli del sistema in anello chiuso tendono a sovrapporsi agli zeri del sistema, a pulsazione ω_z . Ne consegue il periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_z} = \frac{2\pi}{200} = 0.0314s$$