

POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2024-2025

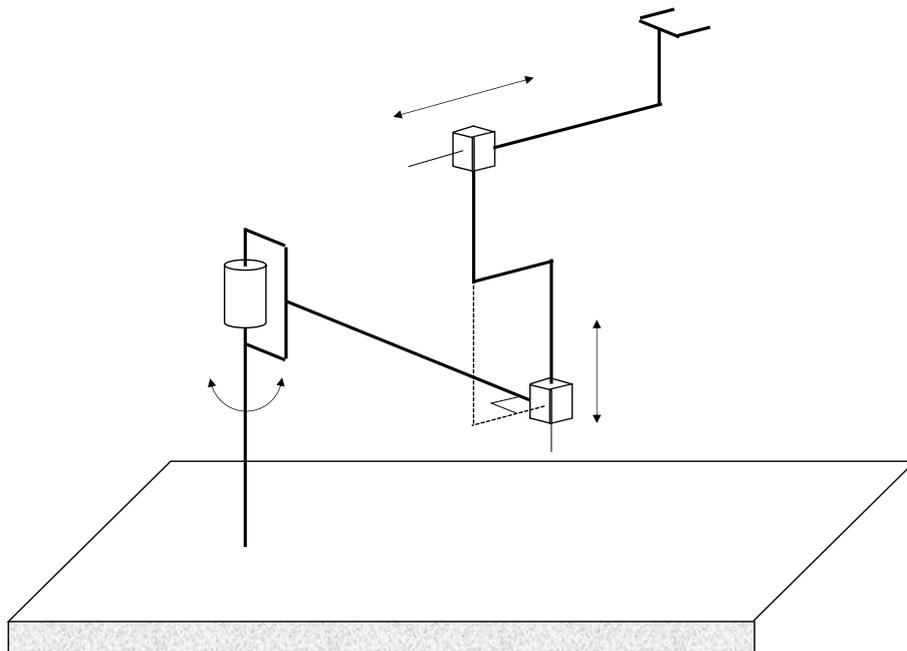
PROF. ROCCO

17 LUGLIO 2025 - SECONDO APPELLO

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Domanda 1.1 Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

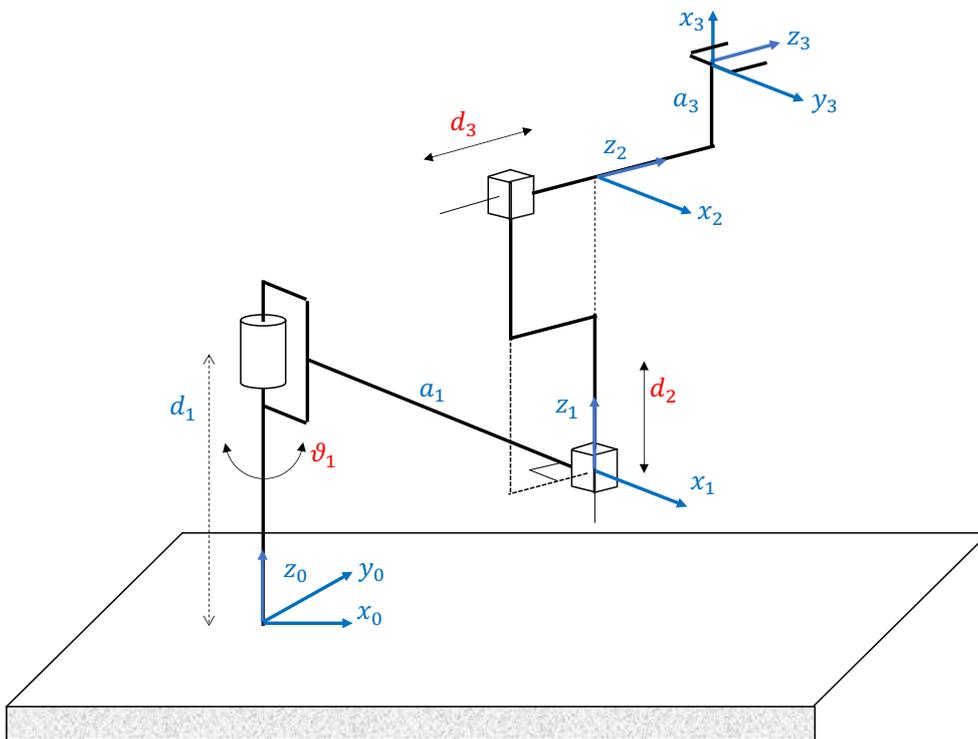
Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura.
La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:

	a	α	d	ϑ
1	a_1	0	d_1	ϑ_1
2	0	$-\frac{\pi}{2}$	d_2	0
3	a_3	0	d_3	$-\frac{\pi}{2}$

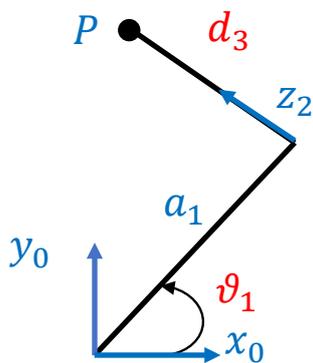
Domanda 1.2 Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione.¹

¹Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i c\alpha_i & s\vartheta_i s\alpha_i & a_i c\vartheta_i \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i c\alpha_i & -c\vartheta_i s\alpha_i & a_i s\vartheta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - z_0$:



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned}
 p_x &= a_1 c_1 - d_3 s_1 \\
 p_y &= a_1 s_1 + d_3 c_1
 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_z = d_1 + d_2 + a_3$$

Domanda 1.3 Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - d_3 c_1 & 0 & -s_1 \\ a_1 c_1 - d_3 s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = -(-d_3 c_1^2 - d_3 s_1^2) = d_3$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $d_3 = 0$.

Domanda 1.4 Si consideri il manipolatore nella configurazione in cui $\vartheta_1 = 0$. Si scriva l'espressione della matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla terna 0. Si scrivano quindi le coordinate in terna 0 di un punto che ha coordinate $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in terna 3.

La matrice di trasformazione omogenea della terna 3 rispetto alla 0 si scrive come:

$$\mathbf{A}_3^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3^0 & \mathbf{p}_3^0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

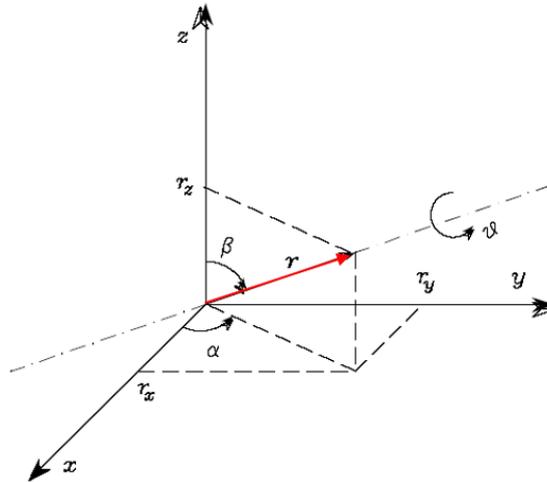
$$\mathbf{A}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 + d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le coordinate del punto in terna 0 si possono facilmente ottenere da quelle del punto in terna 3 premoltiplicandole per la matrice di trasformazione omogenea:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_3^0 \begin{bmatrix} \mathbf{p}^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 & d_1 + d_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + a_1 \\ 1 + d_3 \\ d_1 + d_2 + a_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Domanda 2.1 Facendo riferimento alla seguente figura, si spieghi come si può ottenere la matrice di rotazione in termini della rappresentazione asse-angolo dell'orientamento come prodotto di matrici di rotazione elementari intorno ad assi coordinati.



Come è noto, date due terne, la rotazione di una rispetto all'altra si può interpretare come una rotazione di un angolo ϑ intorno a un asse \mathbf{r} . L'angolo ϑ e le componenti del vettore \mathbf{r} costituiscono la rappresentazione asse-angolo.

La corrispondente matrice di rotazione si può ottenere eseguendo una rotazione di un angolo $-\alpha$ intorno all'asse z , una di un angolo $-\beta$ intorno all'asse y , una di un angolo ϑ intorno all'asse z e infine compensando le prime due rotazioni. Poiché le rotazioni sono in terna fissa, le relative matrici si moltiplicano da destra verso sinistra, per cui:

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\vartheta) \mathbf{R}_y(-\beta) \mathbf{R}_z(-\alpha)$$

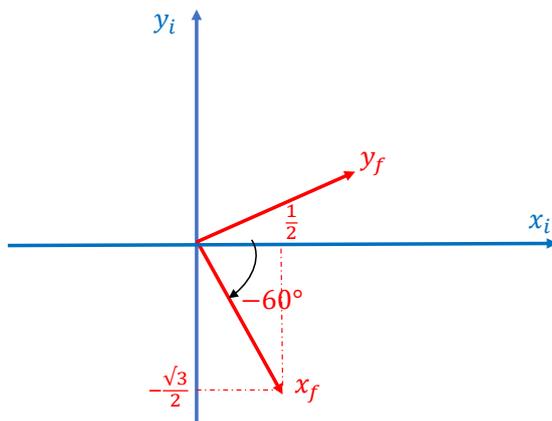
Domanda 2.2 Si supponga ora di volere pianificare la traiettoria di orientamento dell'end-effector di un robot. Le matrici di rotazione che esprimono rispettivamente l'orientamento iniziale e l'orientamento finale rispetto alla terna mondo sono:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini l'asse intorno a cui deve essere effettuata la rotazione e l'angolo per cui occorre ruotare.

Chiaramente, essendo l'orientamento iniziale coincidente con quello della terna mondo, la matrice \mathbf{R}_f esprime già la rotazione totale da compiere. Questa consiste in una rotazione elementare intorno all'asse \mathbf{z} di un angolo pari a -60° , come si evince dalla figura:

Domanda 2.3 Si definisca il quaternion unitario e si esprima la rotazione della terna finale rispetto a quella iniziale di questo esercizio con un quaternion unitario.



Data la rappresentazione asse-angolo, il quaternione unitario si definisce come:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\mathbf{q}_v = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \mathbf{r}$$

Nel caso del presente esercizio:

$$q_0 = \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{q}_v = \sin(-30^\circ) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Domanda 2.4 Sempre con riferimento ai dati di questo esercizio, si pianifichi l'evoluzione dell'angolo con una legge oraria a profilo di velocità trapezoidale, con tempo di posizionamento pari a $T = 2s$. Assumendo un tempo di accelerazione $T_a = 0.4s$, si determini la velocità di crociera e l'accelerazione iniziale del profilo.²

Detto $h = -60$ il percorso da compiere, la velocità di crociera si calcola con la formula:

$$\dot{q}_v = \frac{h}{T - T_a} = \frac{-60}{2 - 0.4} = -37.5$$

Ne consegue il seguente valore di accelerazione iniziale:

$$\ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_v}{T_a} = \frac{-37.5}{0.4} = -93.75$$

²Nel caso non si sia riusciti a risolvere il punto 2 dell'esercizio, si risolva il presente punto assumendo come valore finale dell'angolo 40° .

Esercizio 3

Domanda 3.1 Si consideri il progetto di un controllore P/PI per un servomeccanismo rigido. Si scriva l'espressione della funzione di trasferimento d'anello $L_v(s)$ per il controllo di velocità, avendo cura di specificare il significato dei simboli usati. Che ipotesi modellistica conduce a questa espressione?

La funzione di trasferimento d'anello assume la seguente espressione:

$$L_v(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

dove $\mu = \frac{1}{J_m + J_{lr}}$, $J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}$, mentre K_{pv} e T_{iv} sono rispettivamente guadagno proporzionale e tempo integrale del regolatore di velocità. Questa espressione è coerente con l'assunzione che il coefficiente di attrito viscoso D_m sul motore sia trascurabile.

Domanda 3.2 Si assumano ora i seguenti valori dei parametri fisici (in unità SI):

$$\begin{aligned} J_m &= 0.003 \\ n &= 50 \end{aligned}$$

e si assuma che il servomeccanismo sia progettato secondo il criterio di "inertia matching". Si progetti il regolatore PI di velocità in modo da ottenere una pulsazione critica $\omega_{cv} = 100$ rad/s. Si tracci il diagramma di Bode asintotico del modulo di L_v specificatamente riferito al progetto eseguito.

Osserviamo anzitutto che, in base al criterio di "inertia matching" $J_{lr} = J_m = 0.003$. Facendo riferimento all'approssimazione di alta frequenza di L_v possiamo porre:

$$\omega_{cv} = K_{pv}\mu$$

da cui:

$$K_{pv} = \frac{\omega_{cv}}{\mu} = (J_m + J_{lr})\omega_{cv} = (0.003 + 0.003) * 100 = 0.6$$

Lo zero del PI può essere posto una decade prima della pulsazione critica:

$$\frac{1}{T_{iv}} = 0.1\omega_{cv}$$

da cui:

$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_{cv}} = 0.1$$

Il diagramma di Bode del modulo asintotico di L_v è riportato di seguito:

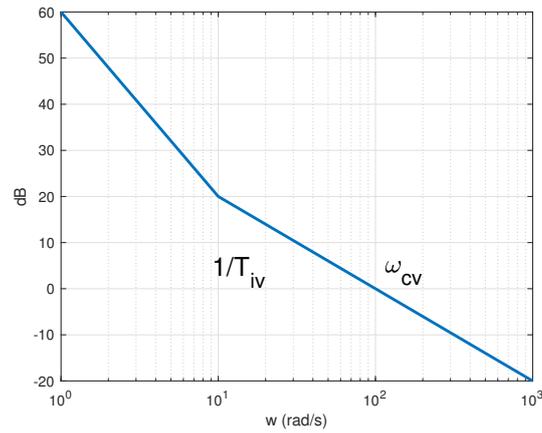
Domanda 3.3 Si supponga ora che il giunto tra motore e carico presenti dell'elasticità. Si determini il minimo valore della costante elastica per cui il progetto condotto al punto precedente si possa considerare robusto rispetto alla presenza di tale elasticità.

Affinché il progetto si possa considerare robusto rispetto all'elasticità del giunto, deve essere:

$$\omega_{cv} < 0.7\omega_z$$

dove ω_z è la pulsazione di risonanza. Pertanto:

$$\omega_z > \omega_{cv}/0.7 = 143$$



Ricordando che:

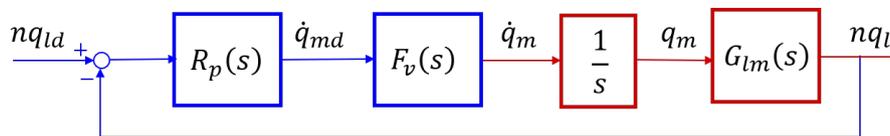
$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}$$

otteniamo la disuguaglianza:

$$K_{el} > 143^2 J_{lr} = 61.35 \text{ Nm/rad}$$

Domanda 3.4 Si assuma ora che il controllo di posizione sul giunto affetto da elasticità sia chiuso lato carico, mentre quello di velocità sia chiuso lato motore. Si disegni lo schema a blocchi del sistema di controllo di posizione, se ne scriva la funzione di trasferimento d'anello e si spieghi quali problematiche questa soluzione può arrecare dal punto di vista del progetto del sistema di controllo.

Lo schema a blocchi è riportato di seguito:



La funzione di trasferimento d'anello è la seguente:

$$L_p(s) = K_{pp} F_v(s) G_{lm}(s) \frac{1}{s}$$

Il sistema in questo caso risulta non co-locato e ciò può portare a oscillazioni in anello chiuso o addirittura instabilità.