

POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI ROBOTICA

A.A. 2023-2024

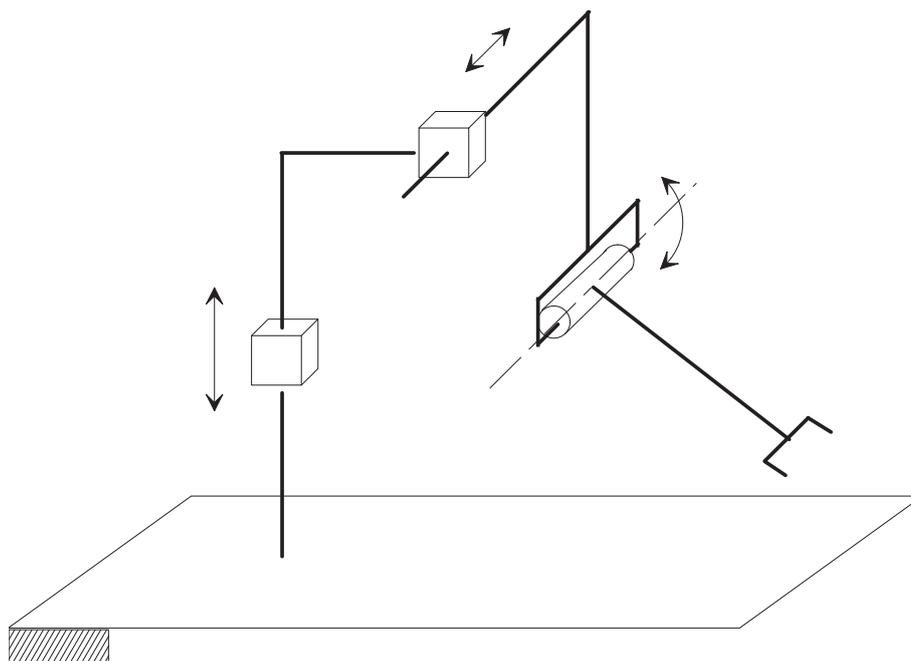
PROF. ROCCO

17 LUGLIO 2024 - SECONDO APPELLO

SOLUZIONI

Esercizio 1

Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Domanda 1.1 Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	a	α	d	ϑ
1				
2				
3				

Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura.

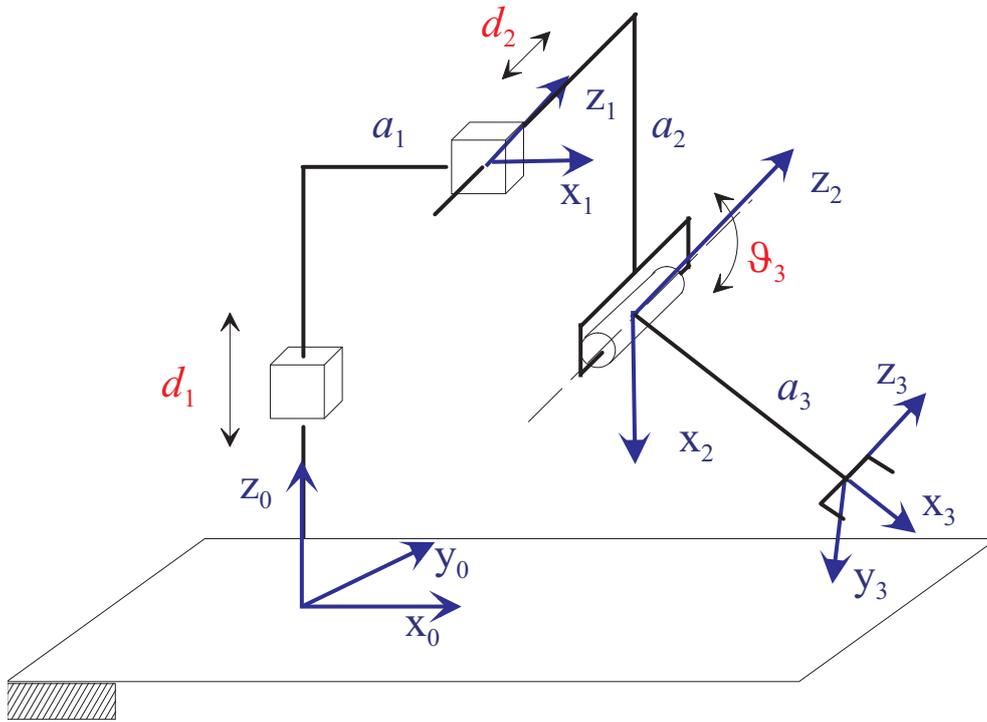
La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:

	a	α	d	ϑ
1	a_1	$-\frac{\pi}{2}$	d_1	0
2	a_2	0	d_2	$\frac{\pi}{2}$
3	a_3	0	0	ϑ_3

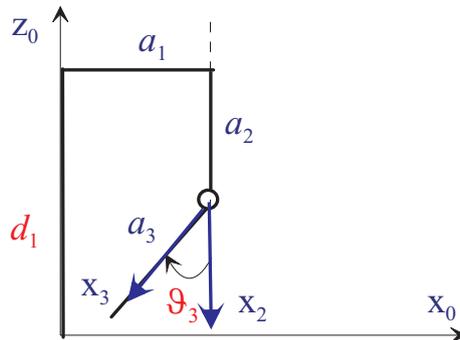
Domanda 1.2 Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione. ¹

¹Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano $x_0 - z_0$:



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= a_1 - a_3 s_3 \\ p_z &= d_1 - a_2 - a_3 c_3 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_y = d_2$$

Domanda 1.3 Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità²

²Si ricorda che il prodotto vettoriale tra i vettori $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ è $c = a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = [\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2)]$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -a_3 s_3 \\ 0 \\ -a_3 c_3 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 c_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 s_3 \end{bmatrix}$$

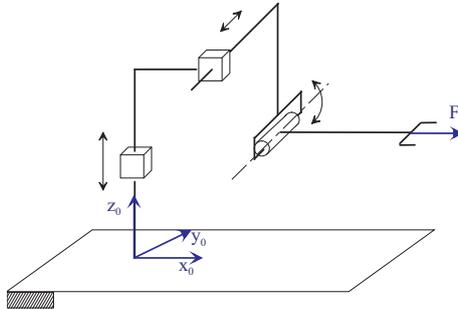
Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = a_3 c_3$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$ oppure $\vartheta_3 = -\frac{\pi}{2}$.

Domanda 1.4 Si rappresenti il manipolatore in una delle configurazioni singolari prima determinate e si mostri analiticamente che in tale configurazione una forza all'end effector opportunamente diretta è equilibrata da coppie/forze ai giunti nulle.

Quando $\vartheta_3 = -\frac{\pi}{2}$ il manipolatore è in configurazione singolare:

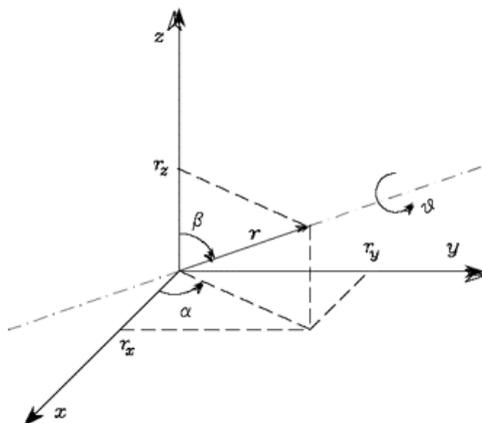


Considerando una forza diretta lungo l'asse x_0 , le coppie/forze ai giunti risultanti sono:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}_P^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

Domanda 2.1 Facendo riferimento alla seguente figura, si illustri la rappresentazione asse-angolo dell'orientamento. In particolare, si spieghi da quanti parametri è composta tale rappresentazione e che relazione eventualmente sussiste tra tali parametri.



Date due terne, la rotazione di una rispetto all'altra si può interpretare come una rotazione di un angolo ϑ intorno a un asse \mathbf{r} . L'angolo ϑ e le componenti del versore \mathbf{r} costituiscono i 4 parametri della rappresentazione asse-angolo. Il vincolo che sussiste tra tali parametri è il seguente:

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$$

Domanda 2.2 Si supponga ora di volere pianificare la traiettoria di orientamento dell'end-effector di un robot. Le matrici di rotazione che esprimono rispettivamente l'orientamento iniziale e l'orientamento finale rispetto alla terna mondo sono:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Si determini l'asse intorno a cui deve essere effettuata la rotazione e l'angolo per cui occorre ruotare.

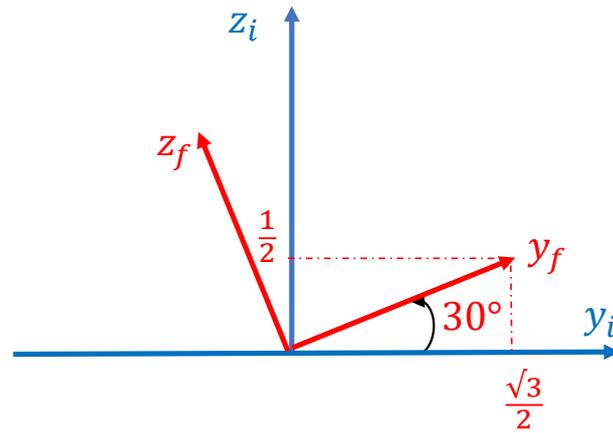
Chiaramente, essendo l'orientamento iniziale coincidente con quello della terna mondo, la matrice \mathbf{R}_f esprime già la rotazione totale da compiere. Questa consiste in una rotazione elementare intorno all'asse \mathbf{x} di un angolo pari a 30° , come si evince dalla figura:

Domanda 2.3 Si definisca il quaternion unitario e si esprima la rotazione della terna finale rispetto a quella iniziale di questo esercizio con un quaternion unitario. In generale, la relazione tra il quaternion e la matrice di rotazione associata è costituita da formule trigonometriche o algebriche?

Data la rappresentazione asse-angolo, il quaternion unitario si definisce come:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\mathbf{q}_v = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \mathbf{r}$$



Nel caso del presente esercizio:

$$q_0 = \cos(15^\circ) = 0.97$$

$$\mathbf{q}_v = \sin(15^\circ) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La relazione tra il quaternion e la matrice di rotazione associata è costituita da formule algebriche.

Domanda 2.4 Sempre con riferimento ai dati di questo esercizio, si pianifichi l'evoluzione dell'angolo con una legge oraria cubica rispetto al tempo, con tempo di posizionamento pari a $T = 1\text{s}$. Si assumano nulle la velocità iniziale e quella finale e si esprima l'angolo in gradi.³

La legge oraria cubica per la posizione e per la velocità angolare si può scrivere come:

$$\vartheta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot{\vartheta}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

Le condizioni al contorno da imporre sono:

$$\begin{aligned} \vartheta(0) &= 0 \\ \vartheta(1) &= 30 \\ \dot{\vartheta}(0) &= 0 \\ \dot{\vartheta}(1) &= 0 \end{aligned}$$

Dalle condizioni a $t = 0$ si deduce facilmente che $a_0 = a_1 = 0$. Si ottiene poi il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 &= 30 \\ 2a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

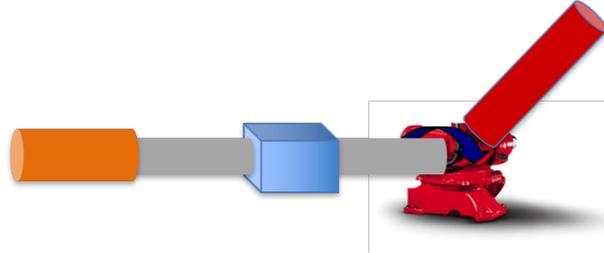
che risolto dà $a_2 = 90$, $a_3 = -60$. Pertanto la legge oraria da imporre all'angolo è:

$$\vartheta(t) = 90t^2 - 60t^3$$

³Nel caso non si sia riusciti a risolvere il punto 2 dell'esercizio, si risolva il presente punto assumendo come valore finale dell'angolo 40° .

Esercizio 3

Domanda 3.1 Come è noto, nel progetto di un sistema di controllo del moto indipendente ai giunti in un robot, si adotta una rappresentazione disaccoppiata del modello matematico del robot. Facendo riferimento alla seguente figura, e assumendo connessione rigida tra motore e carico, si scrivano le equazioni di tale modello matematico, spiegando il significato dei termini adottati. In particolare si illustri il significato, in questo caso, del momento di inerzia lato carico.



La relazione dinamica per il generico giunto i è la seguente:

$$\left(J_{mi} + \frac{J_{li}}{n_i^2} \right) \ddot{q}_{mi} + D_{mi} \dot{q}_{mi} = \tau_{mi} - \frac{\tau_{di}}{n_i}$$

dove J_{mi} e J_{li} sono rispettivamente i momenti di inerzia di motore e carico, D_{mi} è il coefficiente di attrito viscoso lato motore, n_i è il rapporto di trasmissione, \dot{q}_{mi} e \ddot{q}_{mi} sono rispettivamente velocità e accelerazione del motore, τ_{mi} e τ_{di} sono rispettivamente la coppia motrice e una coppia di disturbo che racchiude tutti gli elementi non modellati dall'approssimazione.

Il momento di inerzia lato carico J_{li} è una stima dell'inerzia all'asse del giunto della porzione del manipolatore a valle del giunto stesso.

Domanda 3.2 Facendo ora riferimento a un generico giunto, si assumano i seguenti valori dei parametri fisici (in unità SI):

$$\begin{aligned} J_m &= 0.002 \\ D_m &= 0 \\ J_l &= 50 \\ n &= 100 \end{aligned}$$

Si progetti il regolatore PI di velocità in modo da ottenere una pulsazione critica $\omega_{cv} = 200$ rad/s. Si tracci il diagramma di Bode asintotico del modulo di L_v , specificatamente riferito al progetto eseguito.

Osserviamo anzitutto che $J_{lr} = \frac{J_l}{n^2} = 50/10000 = 0.005$. Facendo riferimento all'approssimazione di alta frequenza di L_v possiamo porre:

$$\omega_{cv} = K_{pv} \mu$$

da cui:

$$K_{pv} = \frac{\omega_{cv}}{\mu} = (J_m + J_{lr}) \omega_{cv} = (0.002 + 0.005) * 200 = 1.4$$

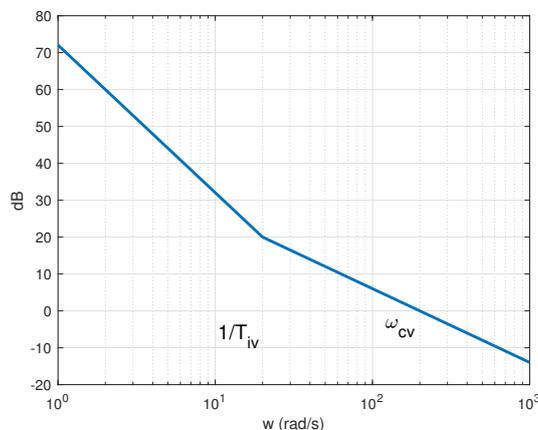
Lo zero del PI può essere posto una decade prima della pulsazione critica:

$$\frac{1}{T_{iv}} = 0.1 \omega_{cv}$$

da cui:

$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_{cv}} = 0.05$$

Il diagramma di Bode del modulo asintotico di L_v è riportato di seguito:



Domanda 3.3 Si supponga ora che il giunto tra motore e carico presenti dell'elasticità. Si determini il minimo valore della costante elastica per cui il progetto condotto al punto precedente si possa considerare robusto rispetto alla presenza di tale elasticità.

Affinché il progetto si possa considerare robusto rispetto all'elasticità del giunto, deve essere:

$$\omega_{cv} < 0.7\omega_z$$

dove ω_z è la pulsazione di risonanza. Pertanto:

$$\omega_z > \omega_{cv}/0.7 = 285.7$$

Ricordando che:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}$$

otteniamo la disuguaglianza:

$$K_{el} > 285.7^2 J_{lr} = 408.1 Nm/rad$$

Domanda 3.4 Si spieghi che cosa si intende per sistema non co-locato e se il controllo di un sistema non co-locato presenta maggiori o minori criticità rispetto a quello di un sistema co-locato.

Un sistema non co-locato è un sistema meccanico, affetto da elasticità, in cui il punto in cui avviene l'attuazione del moto e il punto in cui si misurano le variabili caratteristiche del moto si trovano da parti opposte rispetto all'elasticità. Il sistema non co-locato è più complesso da controllare di quello co-locato e il sistema in anello chiuso può presentare oscillazioni o addirittura essere instabile.