

# Fondamenti di Robotica

PROF. ROCCO

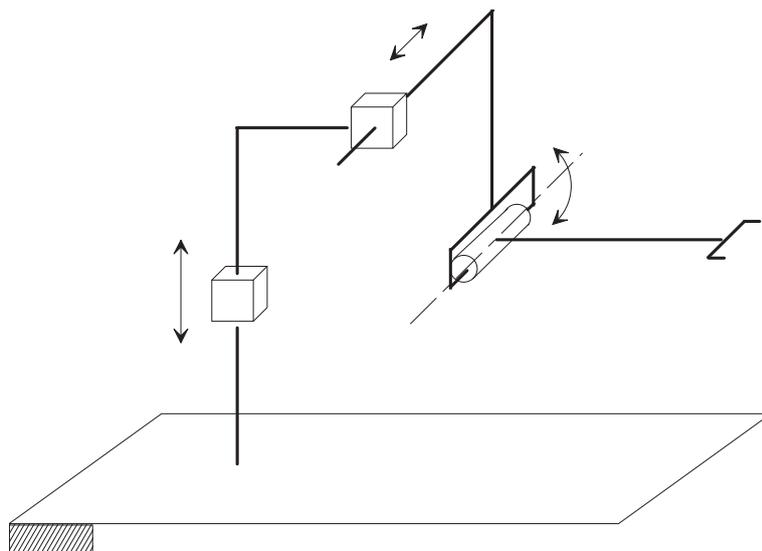
15 LUGLIO 2021

**SOLUZIONE**

FONDAMENTI DI ROBOTICA  
PROF. PAOLO ROCCO

**ESERCIZIO 1**

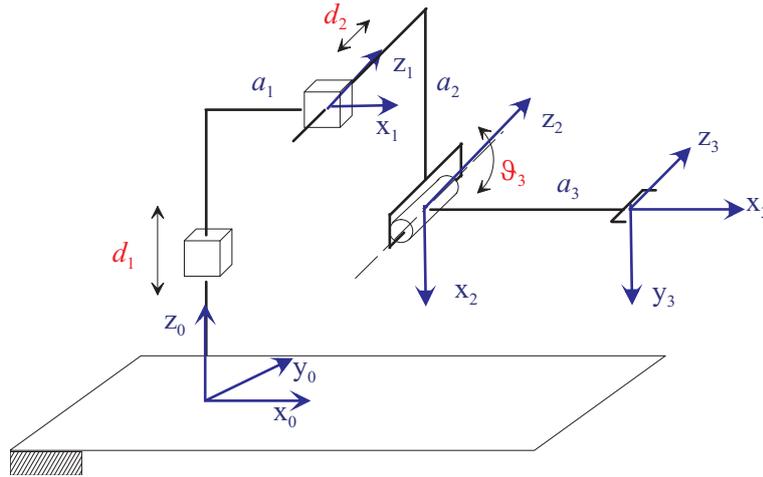
1. Si consideri il manipolatore disegnato in figura:



Si riportino, sulla figura stessa, le terne secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg e si compili la relativa tabella dei parametri:

	$a$	$\alpha$	$d$	$\vartheta$
1				
2				
3				

Una scelta ammissibile di terne di Denavit-Hartenberg è riportata in figura:



La tabella dei parametri di Denavit-Hartenberg è la seguente:

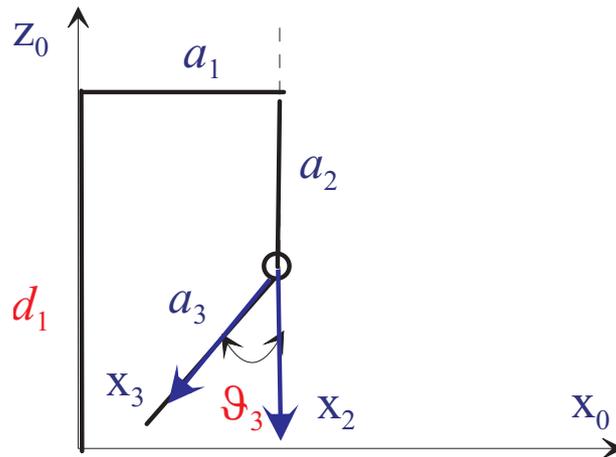
	$a$	$\alpha$	$d$	$\vartheta$
1	$a_1$	$-\frac{\pi}{2}$	$d_1$	0
2	$a_2$	0	$d_2$	$\frac{\pi}{2}$
3	$a_3$	0	0	$\vartheta_3$

2. Per il manipolatore dato, si scrivano le equazioni della cinematica diretta relativamente alla sola posizione.<sup>1</sup>

Per calcolare la cinematica diretta è possibile ricavare le 3 matrici parziali di trasformazione omogenea tra terne consecutive e moltiplicarle tra loro, oppure procedere per ispezione. Seguendo quest'ultima strada, si può fare riferimento alla seguente rappresentazione nel piano  $x_0 - z_0$ :

<sup>1</sup>Si ricorda, nel caso la si ritenga utile per la soluzione dell'esercizio, l'espressione della matrice di trasformazione omogenea tra due terne consecutive:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Con semplici considerazioni trigonometriche si trova che:

$$\begin{aligned} p_x &= a_1 - a_3 s_3 \\ p_z &= d_1 - a_2 - a_3 c_3 \end{aligned}$$

Dal disegno iniziale del robot si riconosce invece che:

$$p_y = d_2$$

3. Per il manipolatore dato, si determini lo Jacobiano geometrico (relativo alle sole velocità lineari), evidenziando i punti di singolarità<sup>2</sup>

Lo Jacobiano di posizione può essere scritto come:

$$\mathbf{J}_P = [ \mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) ]$$

Per il calcolo di questo Jacobiano, si osservi che:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -a_3 s_3 \\ 0 \\ -a_3 c_3 \end{bmatrix}$$

Pertanto, eseguendo il calcolo del prodotto vettoriale:

---

<sup>2</sup>Si ricorda che il prodotto vettoriale tra i vettori  $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$  e  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  è  $c = a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 c_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 s_3 \end{bmatrix}$$

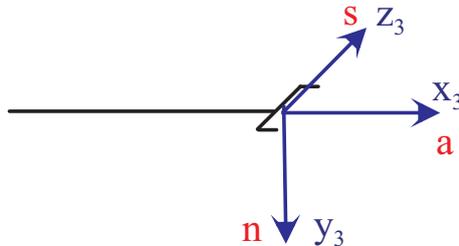
Le singolarità si trovano annullando il determinante dello Jacobiano:

$$\det(\mathbf{J}_P) = a_3 c_3$$

Pertanto il manipolatore è in configurazione singolare quando  $\vartheta_3 = \frac{\pi}{2}$  oppure  $\vartheta_3 = -\frac{\pi}{2}$ .

4. Si spieghi se la terna 3 come determinata al punto 1 è interpretabile come terna  $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}$  e in caso contrario si determini la matrice di rotazione dalla terna 3 a una possibile terna  $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}$ .

La terna 3 non è interpretabile come terna  $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}$  perché il versore  $\mathbf{z}_3$  non è diretto come il versore di approach e il versore  $\mathbf{y}_3$  come il versore di sliding. Facendo riferimento alla seguente figura, una matrice di rotazione può essere:



$$\mathbf{R}_e^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

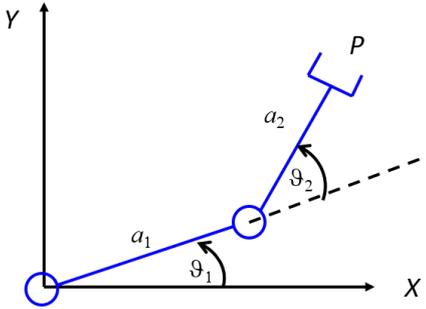
## ESERCIZIO 2

1. Si dia l'espressione dell'ellissoide di manipolabilità in velocità per un manipolatore robotico e se ne illustri brevemente il significato.

L'ellissoide di manipolabilità in velocità esprime tutte le velocità nello spazio operativo generate da velocità nello spazio dei giunti a norma unitaria. La sua espressione è:

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)^{-1} \mathbf{v} = 1$$

2. Si dia la definizione di misura di manipolabilità, si spieghi che espressione assume per il manipolatore planare a due gradi di libertà riportato in figura e si disegni il manipolatore stesso nella configurazione che massimizza la misura di manipolabilità.



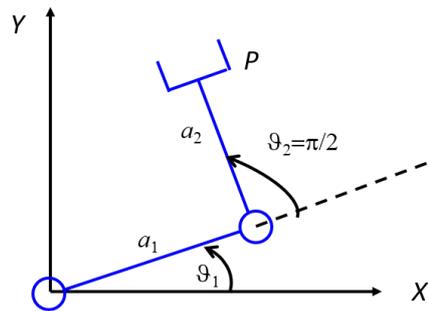
La misura di manipolabilità esprime il volume dell'ellissoide ed è data da:

$$\alpha(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})^T)} = |\det(\mathbf{J}(\mathbf{q}))|$$

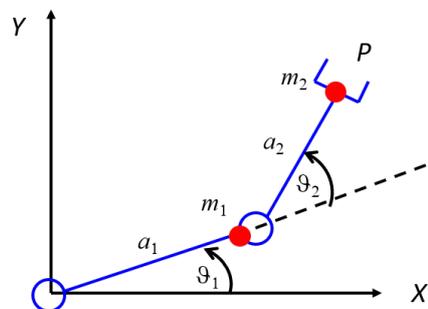
Per il manipolatore in figura risulta:

$$\alpha(\mathbf{q}) = a_1 a_2 |\sin(\vartheta_2)|$$

La configurazione in cui la misura di manipolabilità è massimizzata è quella in cui i due link sono ortogonali:

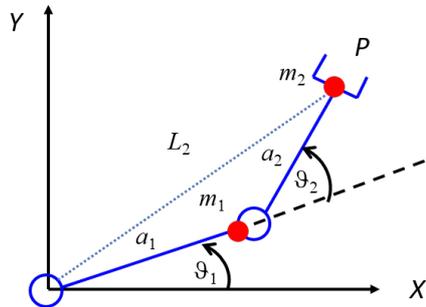


3. Si supponga ora di voler progettare il sistema di controllo per il manipolatore a due gradi di libertà rappresentato in figura. Si suppongano le aste di lunghezza  $a_1 = a_2 = 1m$  e che le masse dei link siano concentrate alle estremità delle aste, con valori  $m_1 = m_2 = 20kg$ . Si determinino, per ciascun giunto, valori dei momenti di inerzia lato carico utilizzabili per il progetto dei controllori di velocità.



Detta  $L_2$  la distanza dall'origine all'end effector, il momento di inerzia lato carico sul giunto 1 è:

$$J_{l1} = m_1 a_1^2 + m_2 L_2^2$$



Con semplici considerazioni trigonometriche risulta:

$$L_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\vartheta_2)$$

Il valore medio di questa quantità si ha per  $\cos(\vartheta_2) = 0$ :

$$L_2^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Pertanto il momento di inerzia lato carico al primo giunto vale:

$$J_{l1} = m_1 a_1^2 + m_2 (a_1^2 + a_2^2) = 60 \text{kgm}^2$$

Il momento di inerzia lato carico al secondo giunto vale:

$$J_{l2} = m_2 a_2^2 = 20 \text{kgm}^2$$

4. Adottando ora motori con momenti di inerzia  $J_{m1} = J_{m2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{kgm}^2$  e rapporti di trasmissione  $n_1 = n_2 = 100$  si determini, per ciascun giunto (supposto rigido) il valore del guadagno proporzionale del controllore di velocità per ottenere una pulsazione critica  $\omega_{cv} = 200 \text{rad/s}$  su entrambi i giunti.

I momenti di inerzia lato carico ridotti all'asse motore valgono:

$$J_{lr1} = \frac{J_{l1}}{n_1^2} = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$J_{lr2} = \frac{J_{l2}}{n_2^2} = 2 \cdot 10^{-3}$$

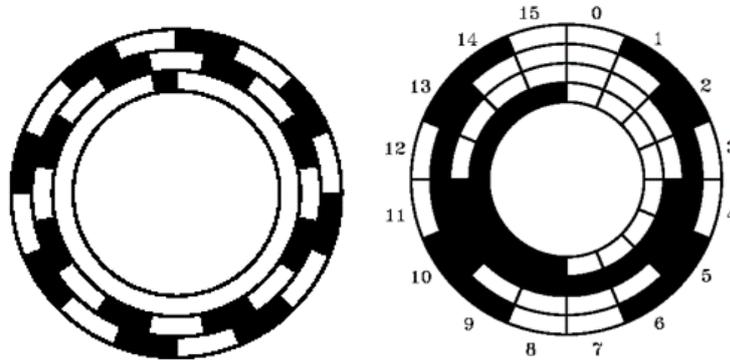
I guadagni proporzionali dei regolatori di velocità si possono quindi calcolare come:

$$K_{pv1} = (J_{m1} + J_{lr1}) \omega_{cv} = 1.6$$

$$K_{pv2} = (J_{m2} + J_{lr2}) \omega_{cv} = 0.8$$

### ESERCIZIO 3

1. Nelle seguenti figure sono rappresentati un encoder incrementale e un encoder assoluto. Si determinino le risoluzioni di entrambi i dispositivi.



L'encoder incrementale ha un numero  $N = 8$  di passi, ossia di coppie opaco/trasparente. Poiché per ciascun passo si possono esprimere 4 diverse posizioni, la risoluzione è pari a  $\frac{360^\circ}{8 \cdot 4} = \frac{360^\circ}{32} = 11.25^\circ$ . L'encoder assoluto ha un numero  $N = 4$  di corone circolari. Poiché ciascuna corona esprime un bit del numero codificato, la risoluzione è pari a  $\frac{360^\circ}{2^4} = \frac{360^\circ}{16} = 22.5^\circ$ .

2. Si spieghi in che cosa consiste la codifica Gray, se essa viene utilizzata in un encoder incrementale o assoluto, e per quale motivo viene utilizzata.

Con il codice Gray la codifica in bit di due numeri consecutivi differisce sempre solo per un solo bit. È utile negli encoder assoluti per evitare ambiguità di lettura nel passaggio da un valore al successivo.

3. Si spieghi perché in un motore brushless la misura della posizione è necessaria per la corretta erogazione di coppia del motore.

In un motore brushless le correnti di statore vengono fatte variare in dipendenza dall'angolo di rotore, al fine di ottenere una coppia indipendente dall'angolo stesso. Pertanto l'angolo deve essere misurato.

4. Si spieghi che cosa si intende per ripple di coppia in un motore brushless

Il ripple di coppia è una imperfezione nella produzione di coppia, che risulta dipendente anche dall'angolo.