



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA  
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Fondamenti di robotica

# Controllo del moto

09.04.2025 | Paolo Rocco

# Contenuti

1. **Impostazione del problema di controllo del moto**
2. **Controllo indipendente dei giunti**
3. **Controllo di corrente**
4. **Controllo di velocità e posizione**

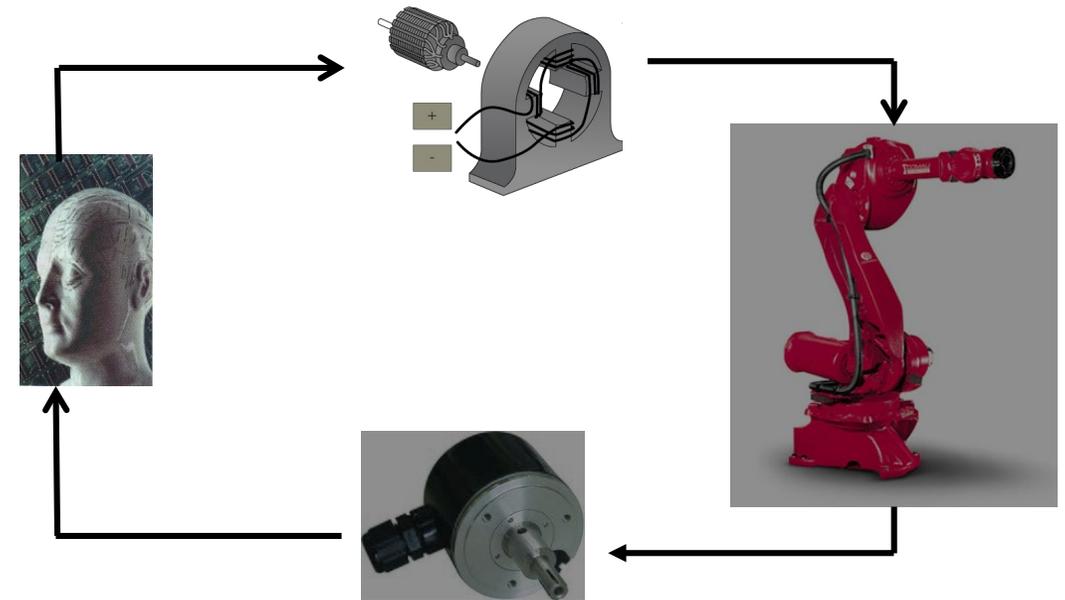
# Impostazione del problema di controllo del moto

01

## Controllo del moto in anello chiuso

Esaurita la trattazione della strumentazione del sistema di controllo, passiamo al **progetto del controllore del moto**.

Tale controllore acquisisce i valori desiderati delle coordinate di giunto, le misure provenienti dai sensori (resolver, encoder...) e produce i comandi agli attuatori (motori a corrente continua, brushless, ecc.), i quali agiscono sul robot tramite gli organi di trasmissione del moto

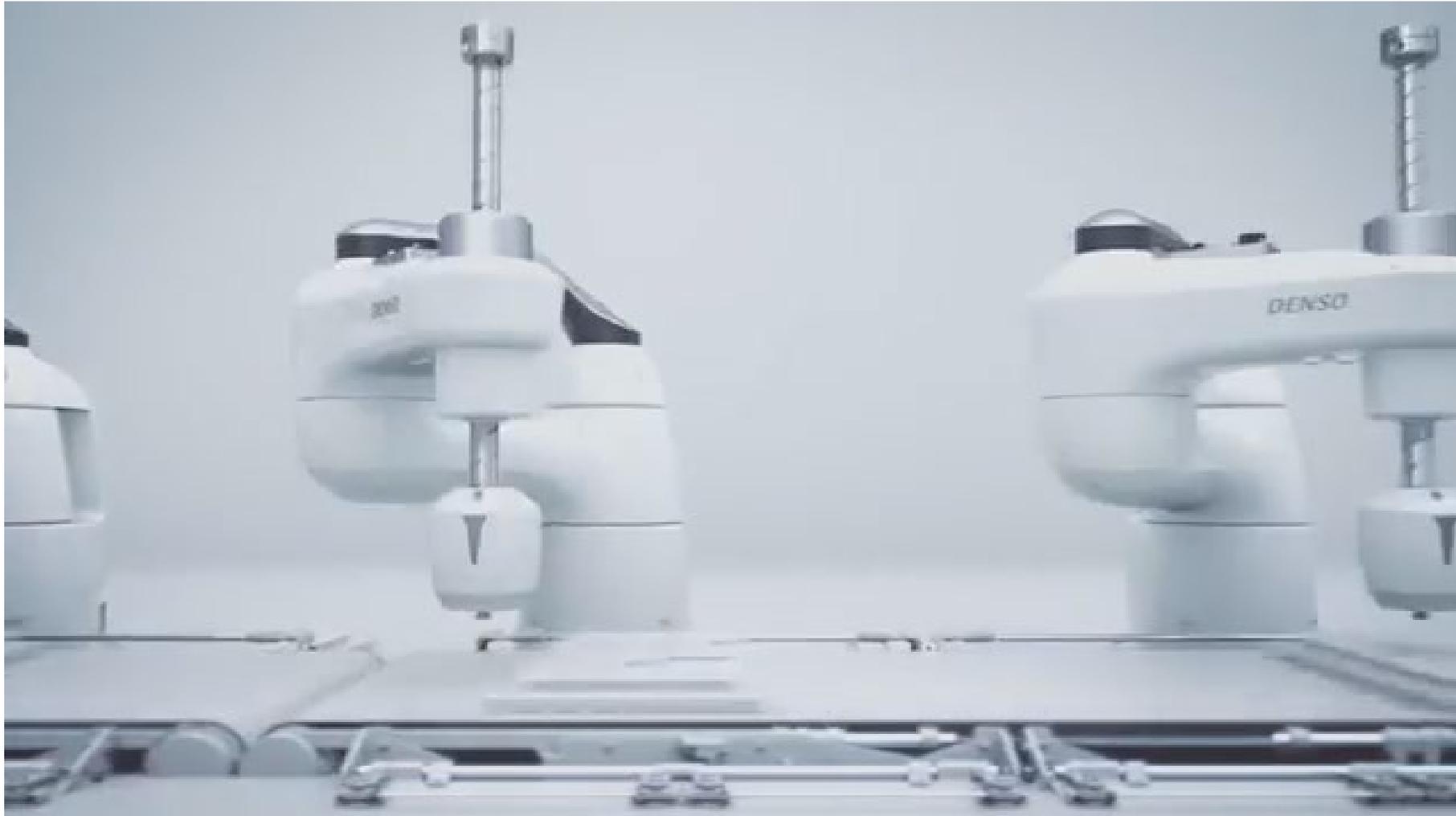


# Valutazione delle prestazioni di controllo

Quali sono i possibili criteri per valutare le prestazioni di un sistema di controllo del movimento?

- **Qualità** del movimento in condizioni nominali
  - precisione/ripetibilità
  - velocità di esecuzione delle attività
  - risparmio energetico
  
- **Robustezza** del movimento in condizioni perturbate
  - adattamento all'ambiente
  - elevata ripetibilità nonostante le incertezze negli errori di modellazione

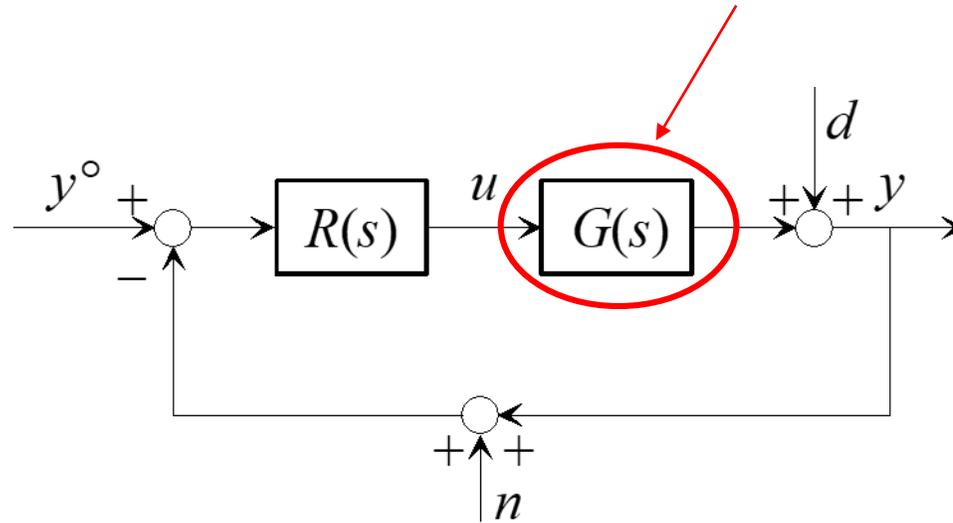
# Controllo del movimento preciso e ad alta velocità



<https://www.youtube.com/watch?v=5ndaQwn15ng>

# Progetto del controllore

Quando si progetta un controllore, si deve disporre del **modello dinamico** del sistema sotto controllo



Noto il modello dinamico, si possono usare i vari metodi dei controlli automatici

Criterio di Nyquist

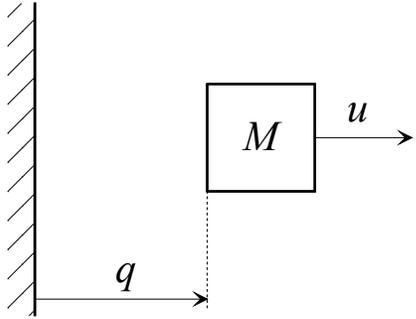
Criterio di Bode

Luogo delle radici

Assegnamento degli autovalori

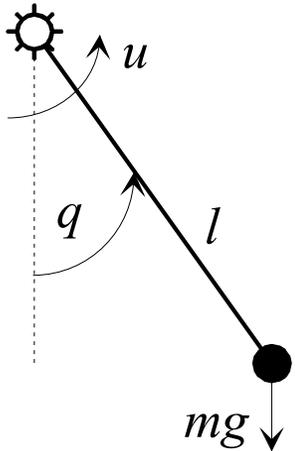
# Progetto del controllore

Come si determina il **modello dinamico di un sistema meccanico**? Partiamo da casi semplici:



Una massa di posizione  $q$  soggetta a una forza  $u$

$$M\ddot{q} = u$$



Un pendolo con massa concentrata all'estremità, di posizione angolare  $q$  e soggetto a una coppia  $u$

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin(q) = u$$

## Il modello dinamico di un robot



Ottenere il modello dinamico del robot è invece molto complesso. L'argomento viene trattato in corsi più avanzati, tuttavia possiamo anticipare che è descritto da equazioni di questo tipo, che generalizzano quelle dei casi semplici:

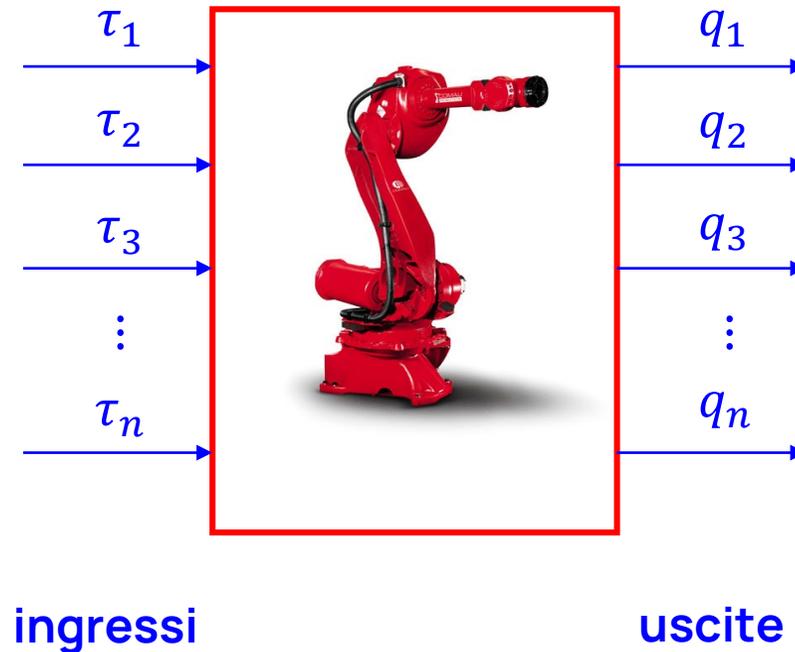
$$\begin{aligned}h_1(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n) &= \tau_1 \\h_2(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n) &= \tau_2 \\&\vdots \\h_n(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n) &= \tau_n\end{aligned}$$

dove  $q_i$  sono le posizioni di giunto,  $\dot{q}_i$  le velocità di giunto,  $\ddot{q}_i$  le accelerazioni di giunto e  $\tau_i$  le coppie applicate su ciascun giunto

In forma compatta vettoriale:  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}$

## Il modello dinamico di un robot

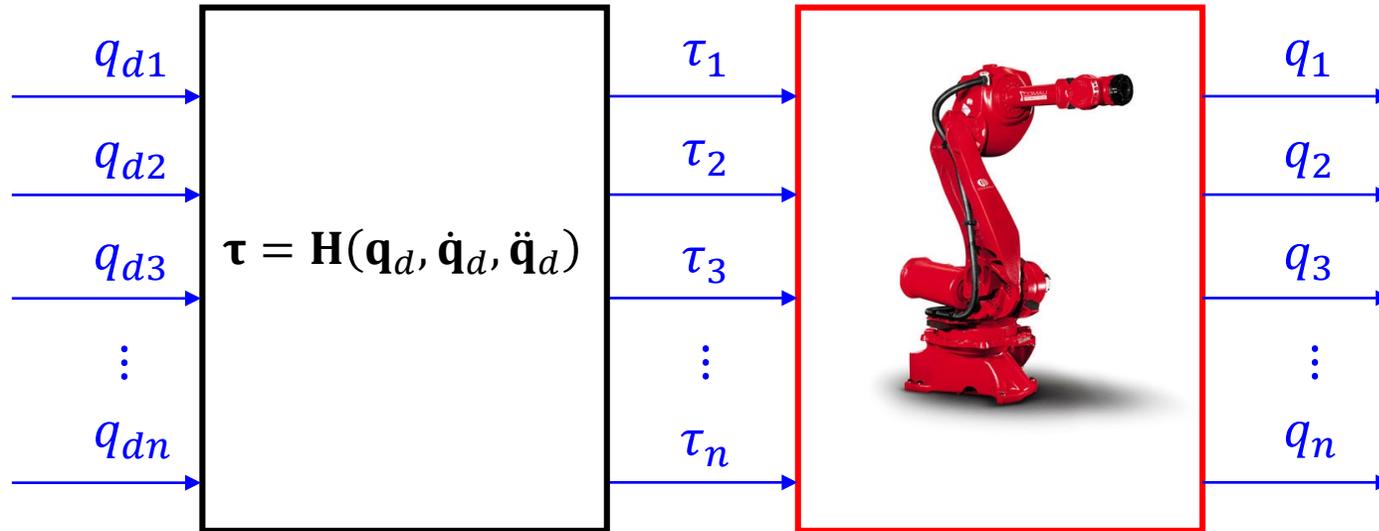
Prendendo le posizioni come variabili di uscita, possiamo rappresentare il modello dinamico con questo blocco:



Date le  $\tau_i$  e le condizioni iniziali sulle  $q_i$  e le  $\dot{q}_i$ , le uscite si ottengono risolvendo il **sistema di equazioni differenziali** che costituisce il sistema dinamico, di ordine  $2n$

# Un controllo in anello aperto

Nota il modello dinamico si potrebbe in linea di principio pensare a un controllore **in anello aperto**:

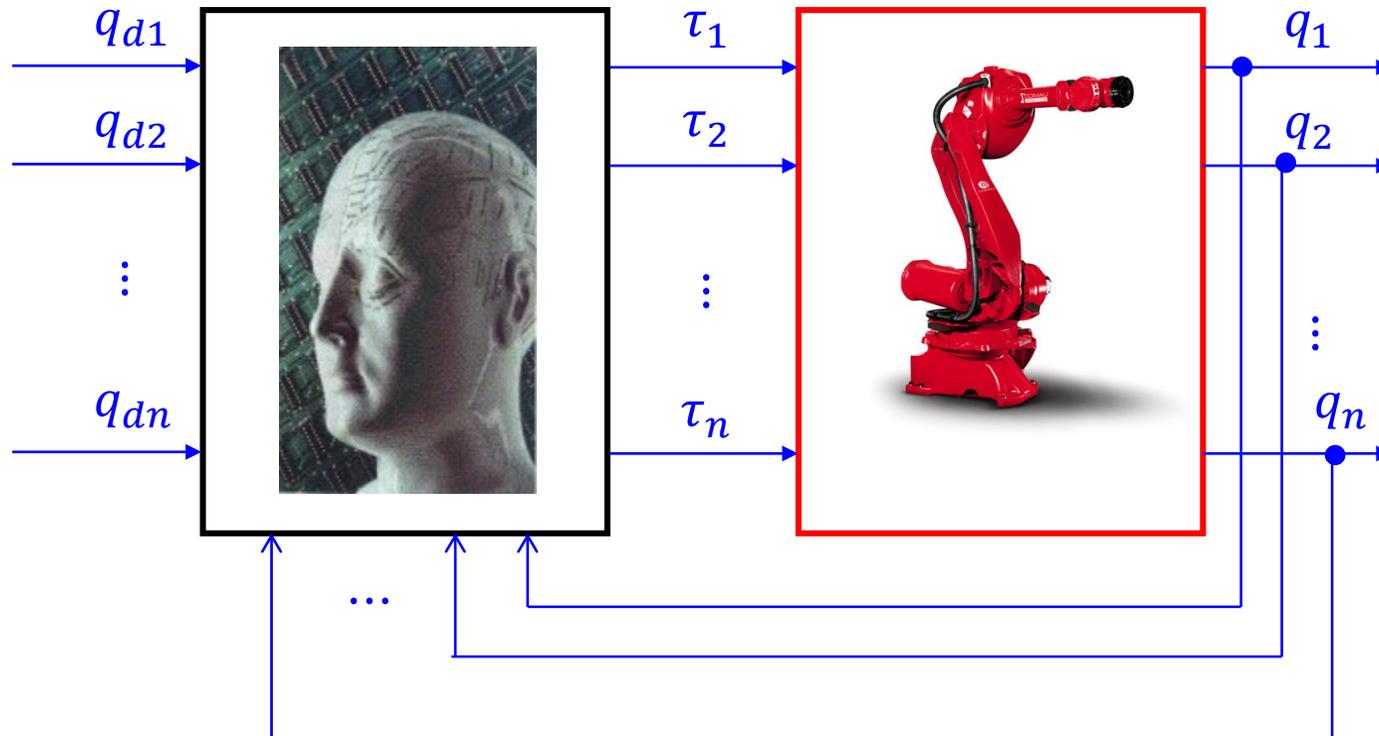


ma:

- Il modello del robot non è noto con sufficiente precisione
- Il carico trasportato dal robot fa variare il modello dinamico
- Ogni incertezza sul modello comporta errori inaccettabili nel posizionamento del robot e anche pericoli

# Controllo in anello chiuso

Occorre allora, come sappiamo, progettare il sistema di controllo in anello chiuso, acquisendo le misure delle posizioni dei giunti, tramite i sensori di posizione:



## Controllo indipendente dei giunti

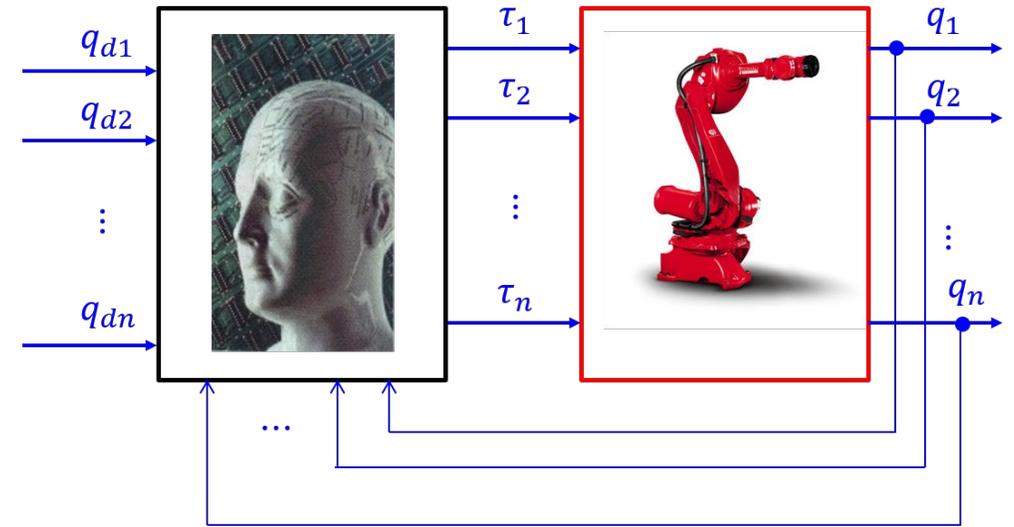
02

# Controllo in anello chiuso centralizzato

Il problema di controllo del moto è **multivariabile**: si hanno  $n$  variabili controllate e  $n$  variabili di controllo.

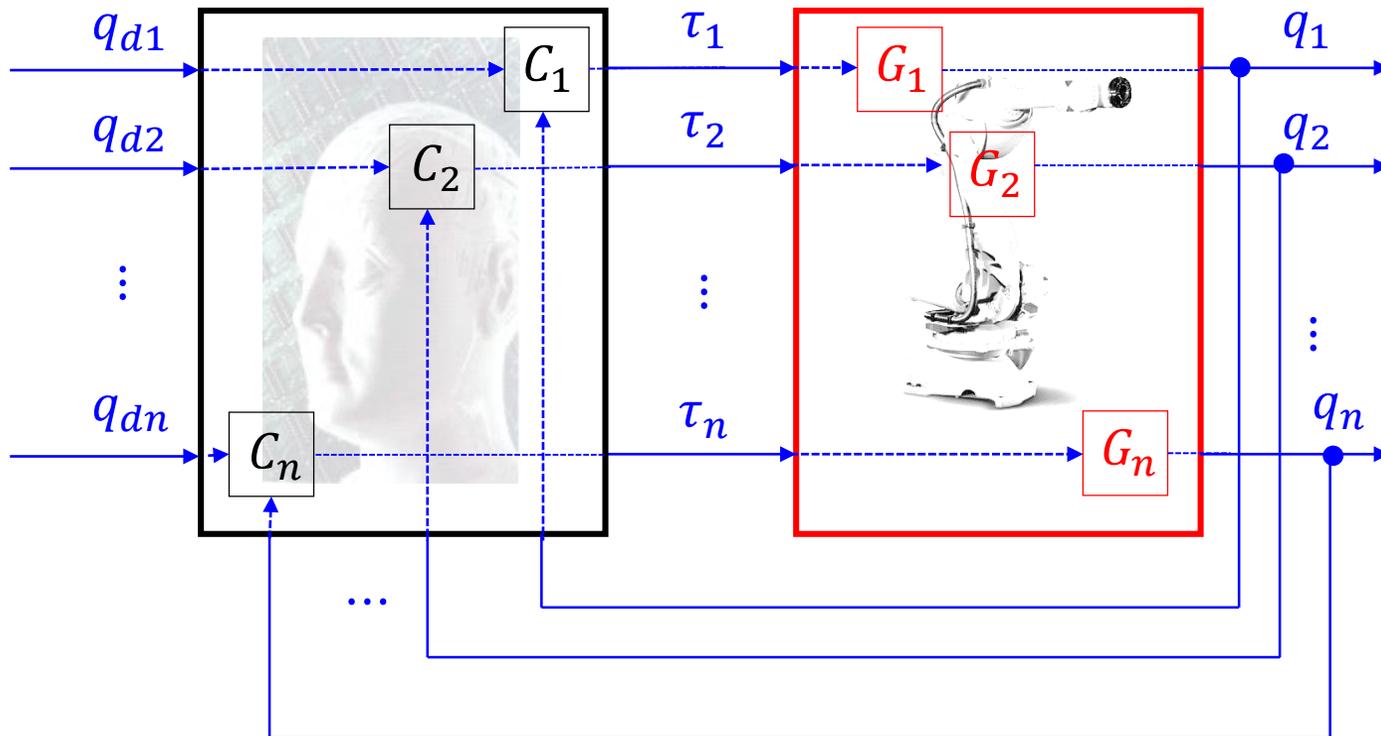
Si potrebbe allora pensare alla progettazione di un **sistema di controllo centralizzato**, in cui ciascuna coppia  $\tau_i$  viene determinata sulla base della conoscenza del modello e dei valori desiderati e delle misure di tutte le posizioni di giunto  $q_i$

Queste soluzioni esistono e sono studiate in corsi più avanzati, ma hanno ridotta applicabilità industriale per via della loro complessità e della necessità di conoscere il modello dinamico.



# Controllo indipendente dei giunti

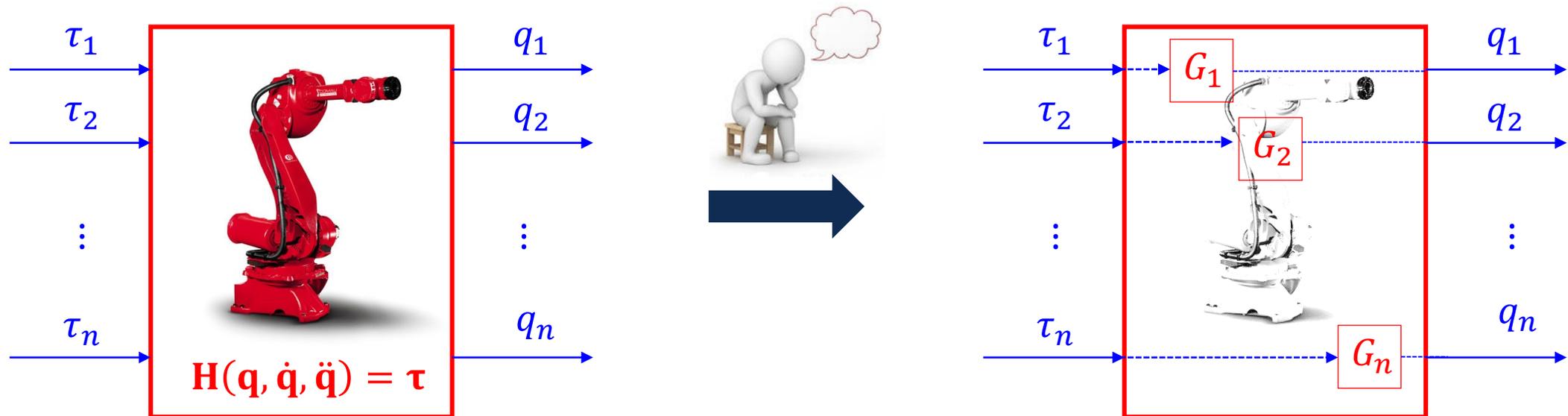
In campo industriale si privilegiano quindi soluzioni di controllo **decentralizzate** (controllo indipendente dei giunti)



- Il problema di controllo è articolato in  $n$  problemi di controllo **monovariabili**
- Il controllore è quindi strutturato in  $n$  controllori, ciascuno dei quali è deputato al controllo di una singola variabile di giunto
- Il controllore fa riferimento a un **modello del sistema completamente disaccoppiato**, in cui ciascuna coppia  $\tau_i$  influenza solo la rispettiva posizione  $q_i$

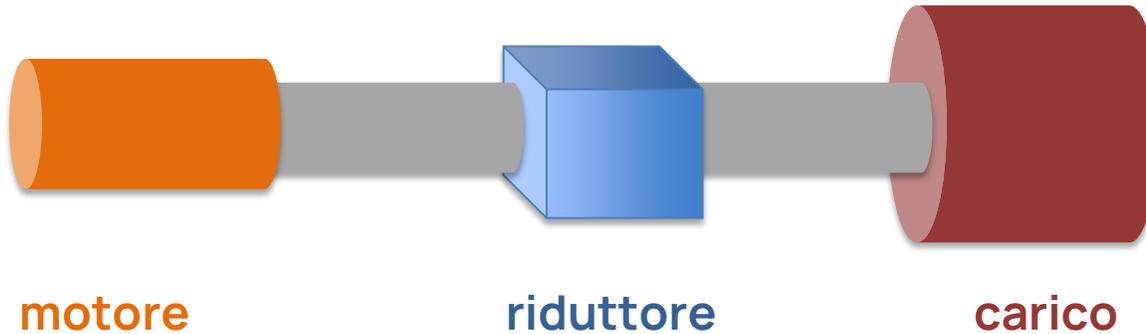
# Dal modello centralizzato al modello decentralizzato

Come passare dal modello completo, non lineare e accoppiato, del robot a quello disaccoppiato necessario per il controllo indipendente dei giunti?



## Modello dei motori

Ricordiamo che su ogni giunto del manipolatore agisce un **motore** con il relativo riduttore.



Un modo semplificato per tenere conto della dinamica di tali motori è considerare solo l'effetto legato alla rotazione del motore attorno al proprio asse.

$$J_{mi}\ddot{q}_{mi} + D_{mi}\dot{q}_{mi} = \tau_{mi} - \tau_{lmi} \quad i = 1, \dots, n$$

dove  $J_{mi}$  e  $D_{mi}$  sono rispettivamente il momento di inerzia e il coefficiente di attrito viscoso del motore,  $\tau_{mi}$  è la coppia motrice, mentre  $\tau_{lmi}$  è la coppia di carico all'asse del motore  $i$

## La coppia di carico al giunto

Come rappresentare  $\tau_{lmi}$ , **coppia di carico** all'asse del motore  $i$  ?

Risulta:

$$\tau_{lmi} = \frac{\tau_i}{n_i}$$

dove  $n_i$  è il rapporto di riduzione, mentre  $\tau_i$  è data dalla  $i$ -sima equazione del modello dinamico:

$$\tau_i = h_i(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n)$$

Possiamo riscrivere  $\tau_i$  come:

$$\tau_i = J_{li}\ddot{q}_i + \tau_{di}$$

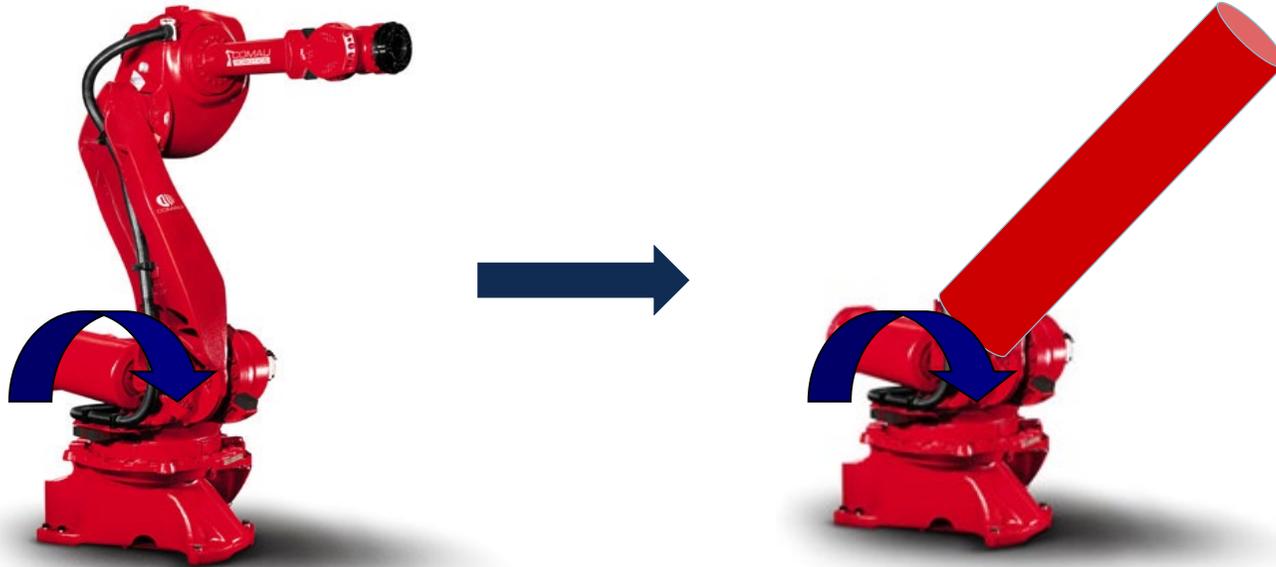
dove  $J_{li}$  è il **momento di inerzia di tutta la parte del robot movimentata dal giunto  $i$**  mentre  $\tau_{di}$  è tutto quanto è compreso nell'espressione di  $h_i$  e non è espresso da  $J_{li}\ddot{q}_i$ .

## Il momento di inerzia equivalente

$$\tau_i = J_{li}\ddot{q}_i + \tau_{di}$$

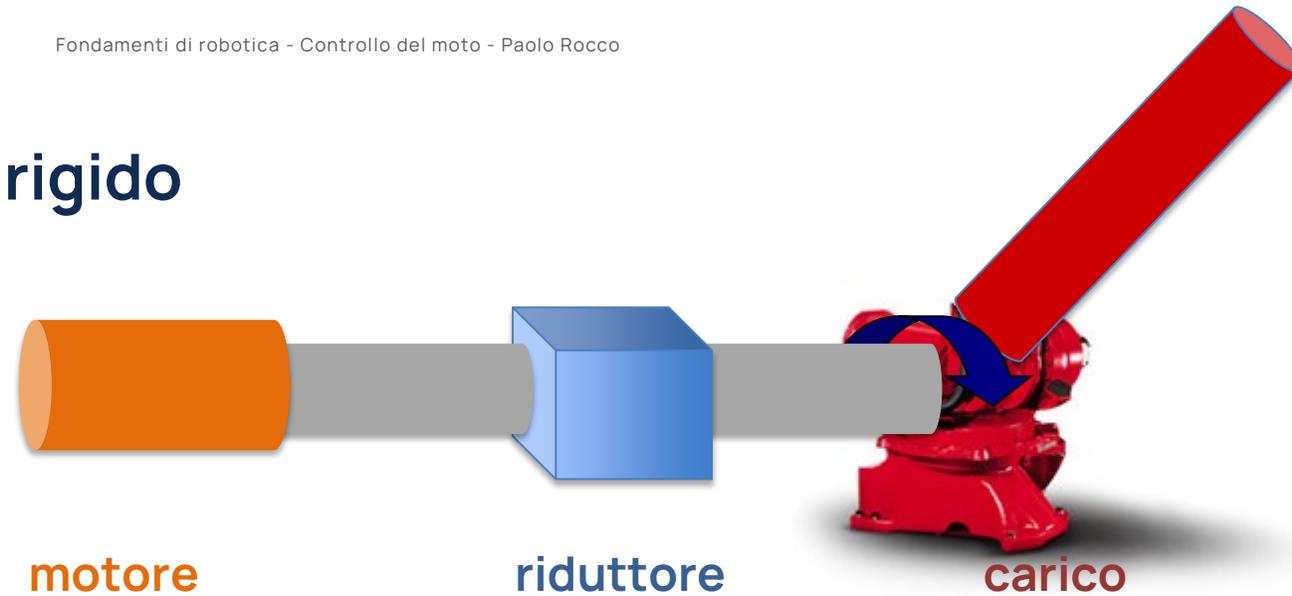
$J_{li}$  è il momento di inerzia di tutta la parte del robot movimentata dal giunto  $i$

Concettualmente è come se rimpiazzassimo la struttura a valle del giunto con un corpo rigido di inerzia  $J_{li}$



Nell'immagine, l'operazione è eseguita sul giunto 2. Si osservi che il momento di inerzia varia al variare della posizione dei giunti dal terzo in poi: si prenderà allora un **valore medio del momento di inerzia**.

## L'accoppiamento rigido



Possiamo quindi riscrivere:

$$J_{mi}\ddot{q}_{mi} + D_{mi}\dot{q}_{mi} = \tau_{mi} - \frac{J_{li}\ddot{q}_i + \tau_{di}}{n_i} \quad i = 1, \dots, n$$

Se l'accoppiamento motore-riduttore-carico è **rigido**, risulta  $q_{mi} = n_i q_i$  e quindi:

$$\left( J_{mi} + \frac{J_{li}}{n_i^2} \right) \ddot{q}_{mi} + D_{mi}\dot{q}_{mi} = \tau_{mi} - \frac{\tau_{di}}{n_i} \quad i = 1, \dots, n$$

Questo è il **modello decentralizzato del robot**

## Il ruolo dei rapporti di riduzione

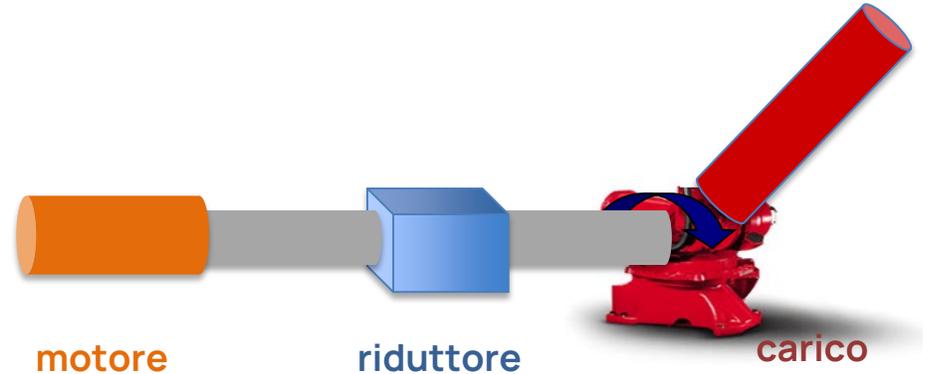
$$\left( J_{mi} + \frac{J_{li}}{n_i^2} \right) \ddot{q}_{mi} + D_{mi} \dot{q}_{mi} = \tau_{mi} - \frac{\tau_{di}}{n_i} \quad i = 1, \dots, n$$

La coppia  $\tau_{di}$  agisce come un disturbo sul modello decentralizzato.

Si osservi che essa è scalata per il rapporto di riduzione  $n_i$

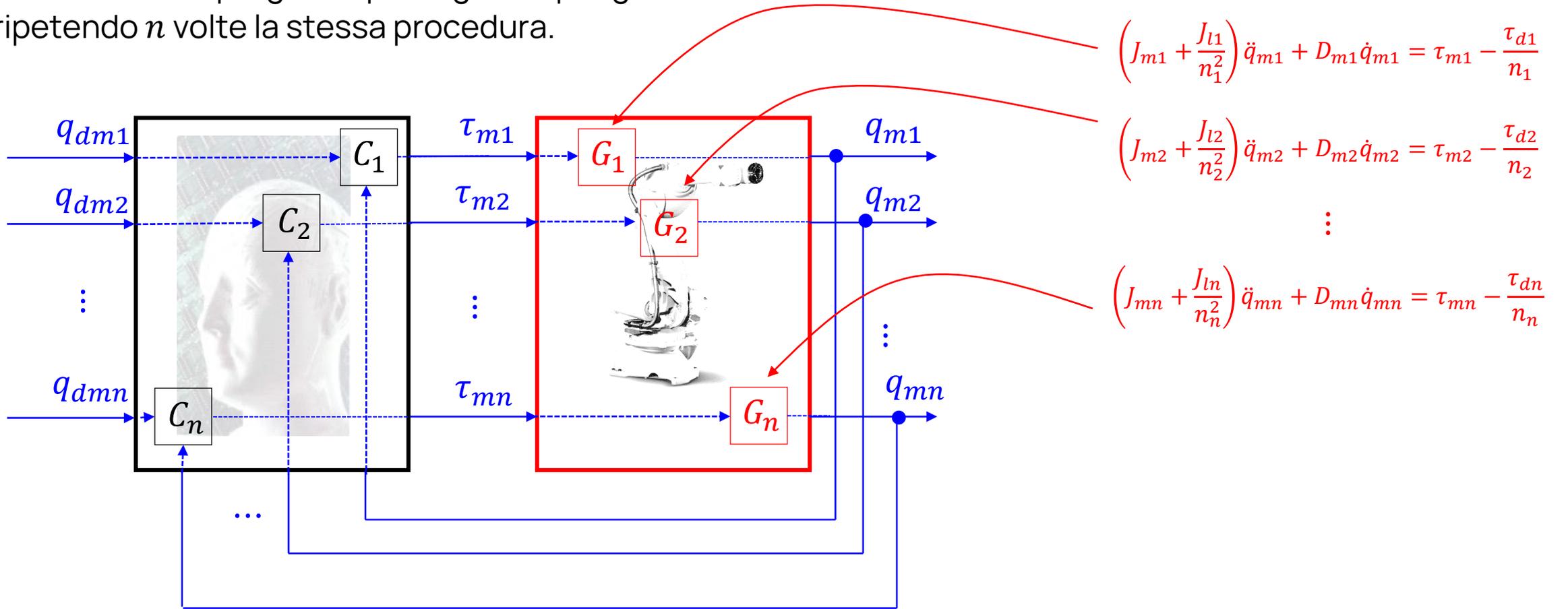
Gli **alti rapporti di riduzione** utilizzati nella robotica industriale hanno quindi un **effetto disaccoppiante** e favoriscono l'adozione del controllo indipendente dei giunti

Senza questo effetto, trascurare la variabilità dell'inerzia del carico e gli effetti di accoppiamento meccanico con gli altri giunti sarebbe poco giustificato



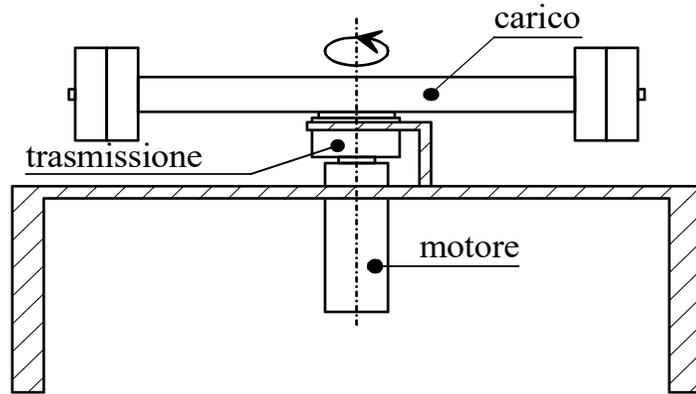
# Progetto del controllore decentralizzato

Il controllore si progetta quindi giunto per giunto ripetendo  $n$  volte la stessa procedura.



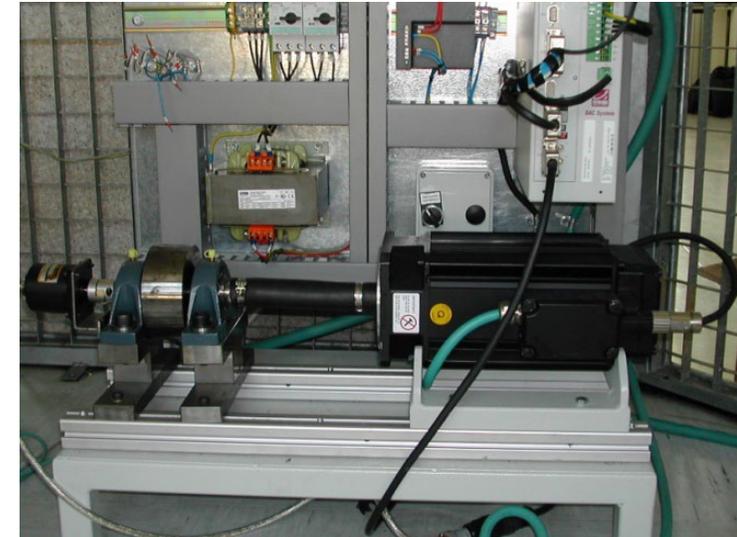
# Il controllo del servomeccanismo

Il problema che deve essere risolto  $n$  volte va anche sotto il nome di problema del controllo del servomeccanismo.



- Il problema è controllare il movimento del carico, operando opportunamente sulla coppia applicata dal motore
- Le applicazioni sono innumerevoli (sistemi drive-by-wire e fly-by-drive, puntamento antenne, periferiche di computer, ecc.) e vanno ben al di là della robotica industriale

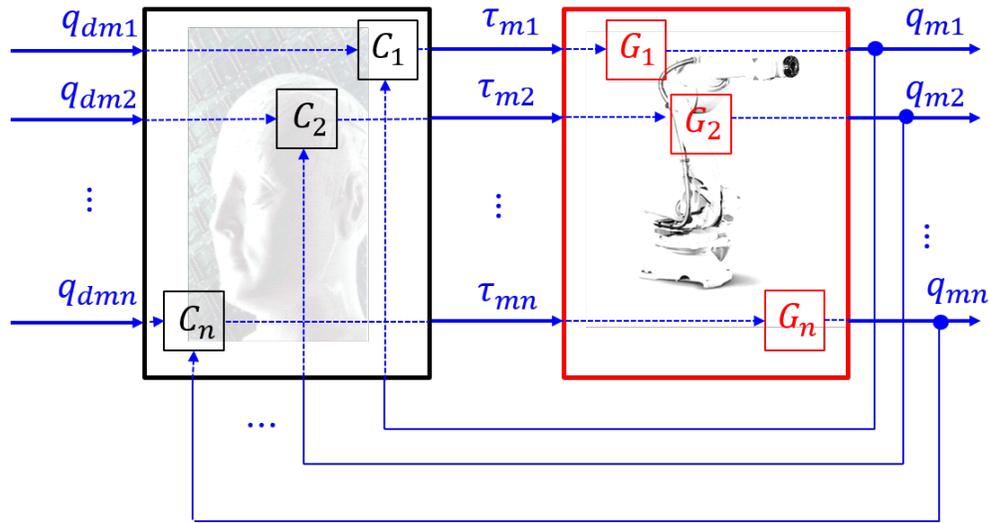
Un **servomeccanismo** è un sistema paradigmatico composto da un motore, un carico meccanico e qualsiasi sistema di trasmissione.



## Controllo di corrente

03

## La coppia motrice



Nella schematizzazione finora considerata, le variabili di controllo sono le coppie motrici  $\tau_{mi}$

Ma come si può imporre una coppia motrice? Qual è l'**effettiva variabile manipolabile** su cui il controllore del moto può agire?

Dobbiamo riprendere il modello del motore elettrico per capire come la coppia viene generata e come essa può essere variata.

Faremo riferimento per semplicità al **motore a corrente continua** ma quanto diremo sarà facilmente trasferibile al motore brushless (effettuando un cambiamento di variabili e prendendo la corrente in quadratura)

## Il motore a corrente continua

- Il motore a corrente continua, caratterizzato meccanicamente da un momento d'inerzia  $J_m$ , eroga una coppia  $\tau_m$  proporzionale alla corrente  $I$  nel circuito d'armatura, conseguente all'imposizione di una tensione  $V$ .
- Su questo circuito, avente resistenza  $R$  ed induttanza  $L$ , agisce anche la forza controelettromotrice  $E$ , proporzionale alla velocità angolare  $\omega_m$  del motore.

Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni:

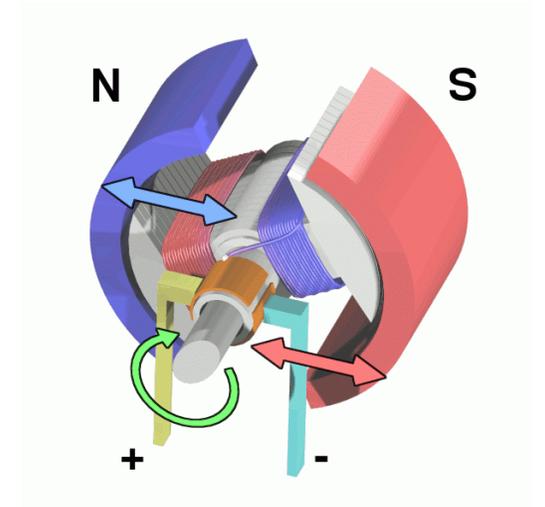
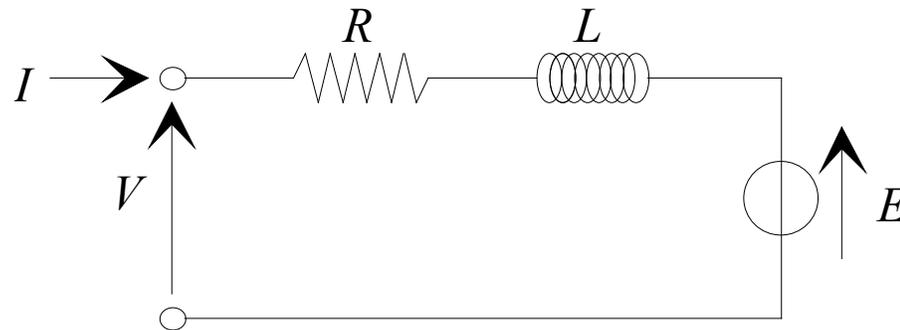
$$V(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + E(t)$$

$$E(t) = K\omega_m(t)$$

$$\tau_m(t) = KI(t)$$

$$\tau_m(t) = J_m\dot{\omega}_m(t)$$

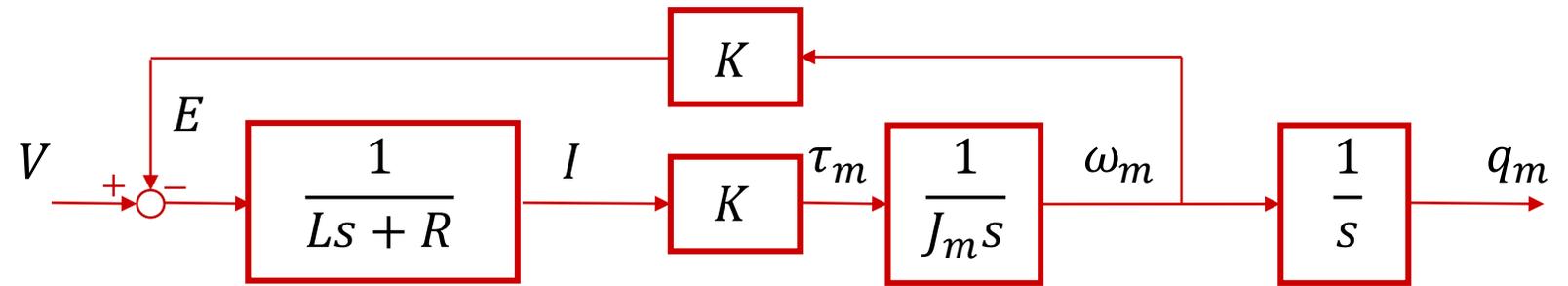
$$\dot{q}_m(t) = \omega_m(t)$$



## Dinamica elettrica e meccanica

Le equazioni del sistema, lineari, sono rappresentabili con uno schema a blocchi:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= RI(t) + L\dot{I}(t) + E(t) \\
 E(t) &= K\omega_m(t) \\
 \tau_m(t) &= KI(t) \\
 \tau_m(t) &= J_m\dot{\omega}_m(t) \\
 \dot{q}_m(t) &= \omega_m(t)
 \end{aligned}$$

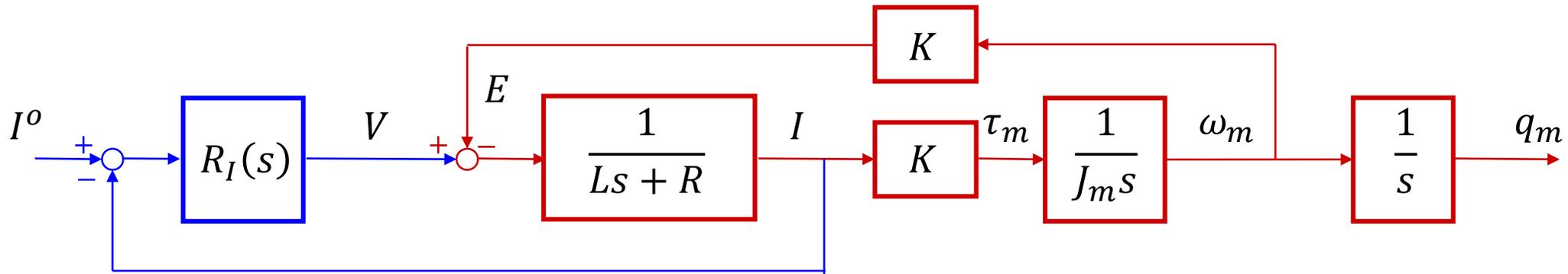


Si osservi che la forza controelettrica accoppia la **dinamica elettrica** con la **dinamica meccanica**.

Usare la tensione  $V$  come variabile di controllo per il controllo del moto renderebbe problematico il progetto

## Controllo di corrente

Disponendo di una misura di corrente, possiamo chiudere un **anello di controllo** sulla corrente:



Il controllore di corrente normalmente è un **regolatore PI**

$$R_I(s) = K_{pI} \left( 1 + \frac{1}{sT_{iI}} \right) = K_{pI} \frac{1 + sT_{iI}}{sT_{iI}} \quad \begin{array}{l} K_{pI} : \text{guadagno proporzionale del regolatore di corrente} \\ T_{iI} : \text{tempo integrale del regolatore di corrente} \end{array}$$

## Controllo di corrente

La funzione di trasferimento d'anello per il controllo di corrente è quindi:

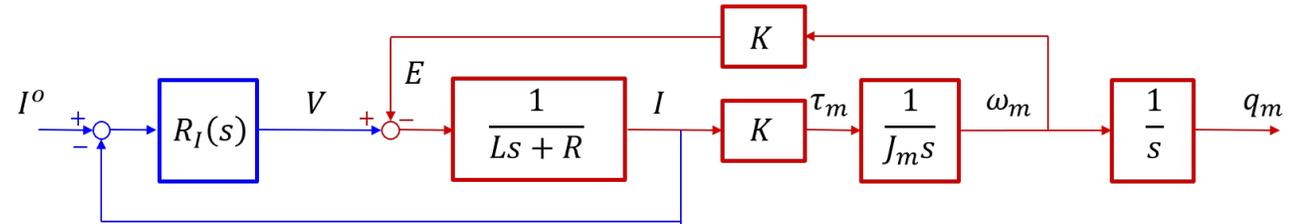
Ponendo:

$$T_{iI} = \frac{L}{R}$$

$$K_{pI} = \omega_{cI} T_{iI} R$$

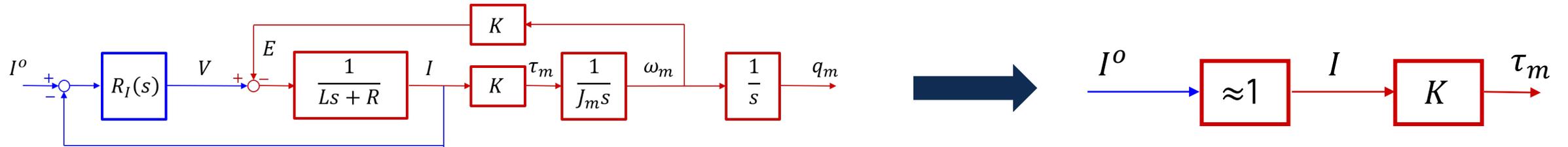
si ottiene:

e quindi il sistema di controllo di corrente ha **banda passante**  $\omega_{cI}$



Si osservi che la forza controelettromotrice  $E$  agisce come un disturbo nell'anello di controllo di corrente

## Controllo di corrente



- Poiché la dinamica legata ai transistori elettrici è molto rapida, si potrà progettare  $R_I(s)$  per ottenere una **banda passante  $\omega_{cI}$  molto ampia**, dell'ordine delle migliaia di rad/s.
- Nel progetto del regolatore di corrente si potrà inoltre assumere la forza controelettrica come un disturbo di bassa frequenza, completamente rigettato
- Una volta chiuso l'anello di controllo della corrente, questo potrà ritenersi **praticamente istantaneo** ai fini del progetto del controllore di posizione/velocità esterno (chiuso su bande più limitate):

$$\tau_m(t) = KI(t) \approx KI^o(t)$$

La coppia motrice  $\tau_m$  è quindi manipolabile agendo sul riferimento di corrente  $I^o$

## Controllo di velocità e posizione

04

## Dinamica di velocità e posizione

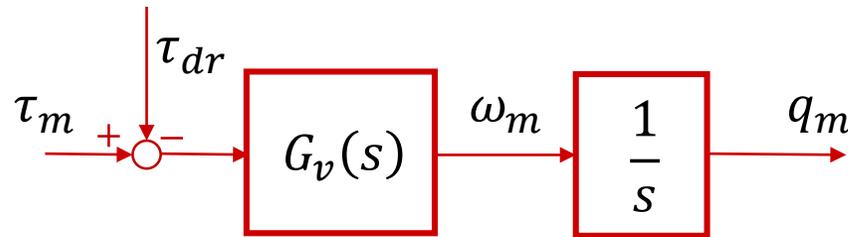
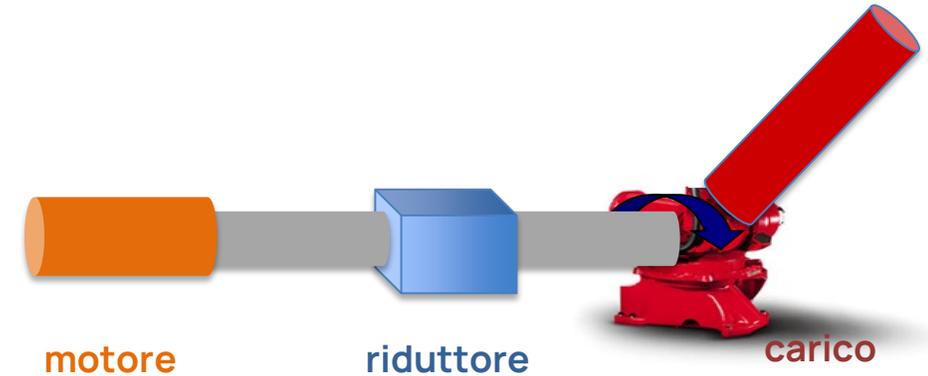
Riprendiamo l'equazione della dinamica del servomeccanismo, dove omettiamo l'indice  $i$  che individua il giunto:

$$(J_m + J_{lr})\ddot{q}_m + D_m\dot{q}_m = \tau_m - \tau_{dr}$$

con:  $J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad \tau_{dr} = \frac{\tau_d}{n}$

Il sistema può essere descritto in termini di funzioni di trasferimento:

con:  $G_v(s) = \frac{1}{D_m + s(J_m + J_{lr})}$

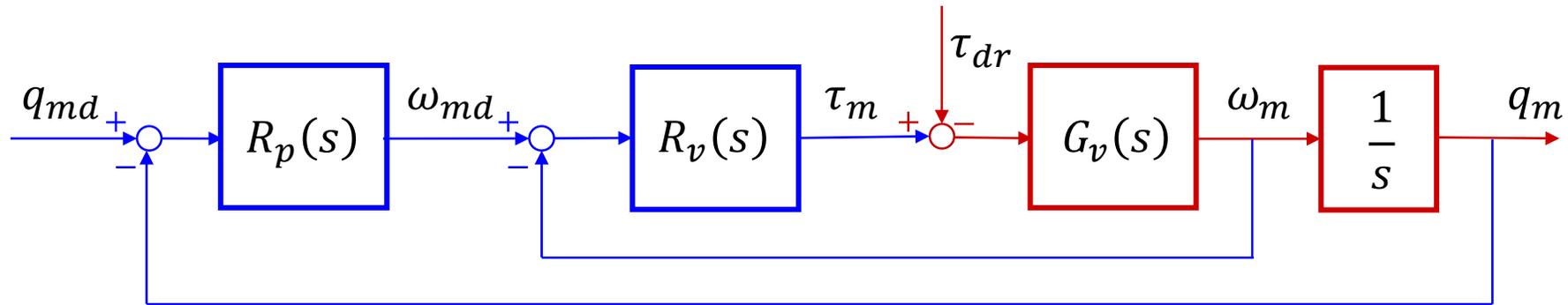


Se il coefficiente di attrito  $D_m$  è trascurabile (caso più sfavorevole, perché l'attrito dà un contributo stabilizzante ma è un parametro incerto), si ha :

$$G_v(s) = \frac{\mu}{s}, \quad \mu = \frac{1}{J_m + J_{lr}}$$

## Controllo P/PI

Il controllore viene strutturato in un anello interno di controllo di velocità e uno esterno di posizione:



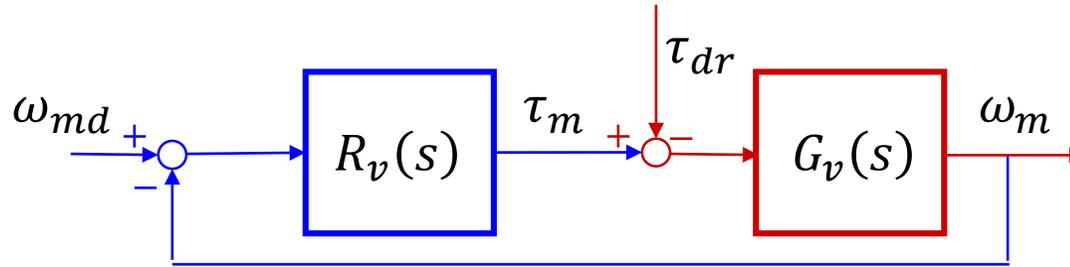
Lo schema prevede di disporre di due misure, di posizione e velocità, indipendenti. In realtà la misura di velocità si può ottenere anch'essa dall'elaborazione del segnale di posizione.

Si tratta di uno schema di **controllo in cascata**:

- si progetta dapprima l'anello interno di velocità su banda ampia, in modo da fornire anche una buona reiezione dei disturbi
- L'anello esterno, di posizione, si progetta su una banda più ristretta
- Si osservi che in effetti ci sono tre anelli nidificati: loop di corrente, velocità e posizione

# Progetto del controllore di velocità

Si adotta un  
**controllore PI**



$$R_v(s) = K_{pv} \left( 1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Funzione d'anello: 
$$L_v(s) = R_v(s)G_v(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

Se  $T_{iv}$  è sufficientemente grande, ossia se lo zero del PI è sufficientemente in bassa frequenza, la pulsazione critica è ben approssimata prendendo l'approssimazione di alta frequenza di  $L_v$  :

$$L_v(s) \approx \frac{\omega_{cv}}{s} = \frac{K_{pv}\mu}{s}$$



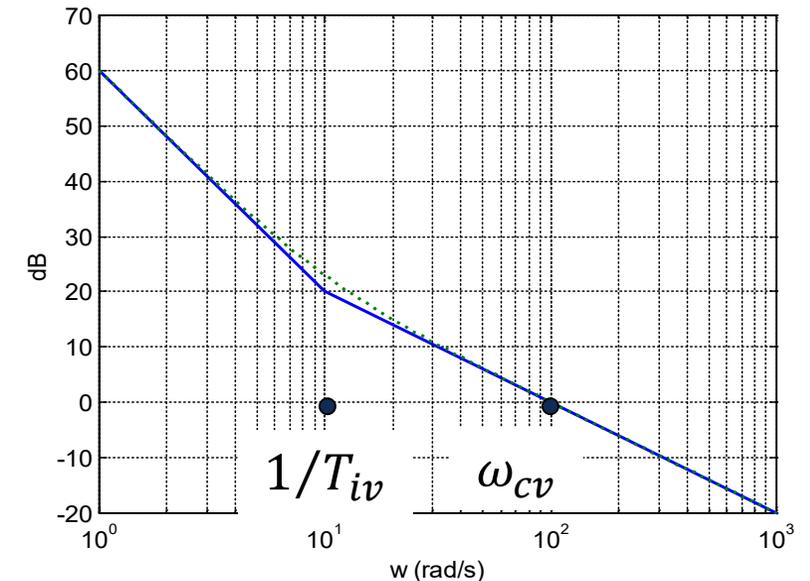
$$\omega_{cv} = K_{pv}\mu$$



$$\frac{1}{T_{iv}} = (0.1 \div 0.3)\omega_{cv}$$

selezione del **guadagno del PI**

posizionamento dello **zero del PI**

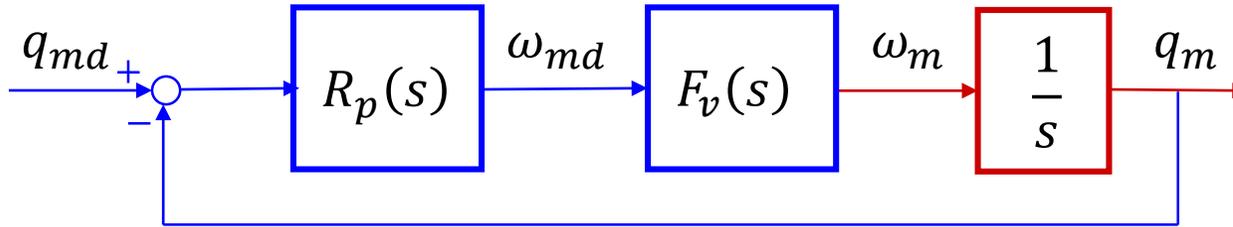


# Progetto del regolatore di posizione

Si adotta un  
**controllore P**



$$R_p(s) = K_{pp}$$



Il regolatore dell'anello di posizione "vede" l'anello chiuso di velocità, di funzione di trasferimento:

$$F_v(s) \approx \frac{1}{1 + s/\omega_{cv}}$$

La funzione d'anello è quindi:

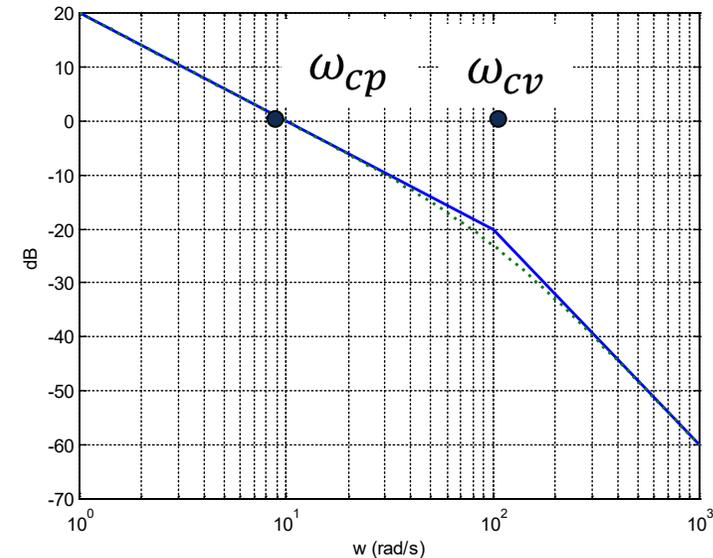
$$L_p(s) = K_{pp} F_v(s) \frac{1}{s} = \frac{K_{pp}}{s(1 + s/\omega_{cv})}$$

E' sufficiente prendere  $K_{pp} \ll \omega_{cv}$  per garantire una banda sull'anello di posizione  $\omega_{cp}$

$$\omega_{cp} = K_{pp}$$



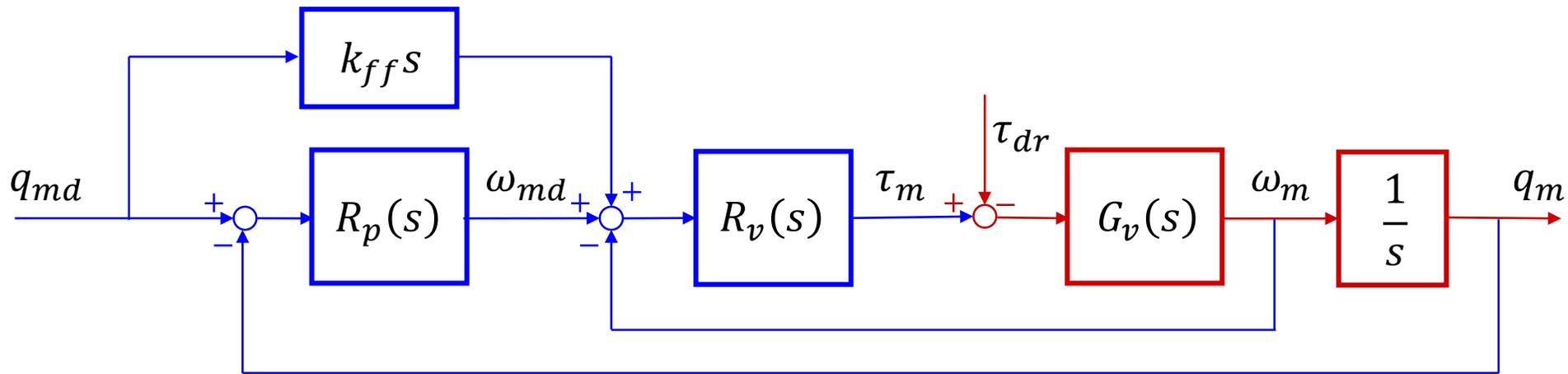
selezione del **guadagno P**



## Anticipo di velocità

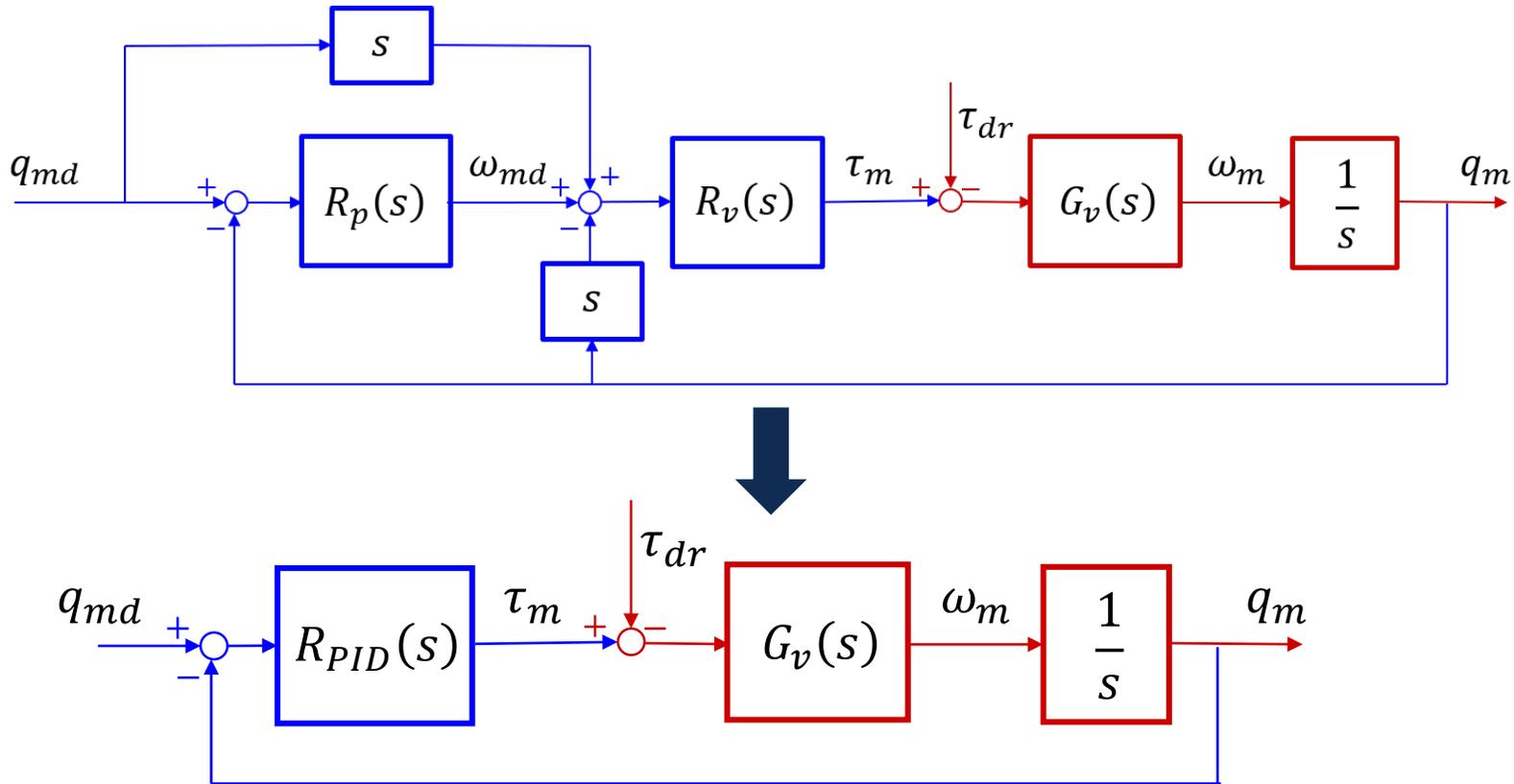
Per rendere la risposta al riferimento di posizione più pronta, è possibile inserire un contributo di feedforward, noto come “**anticipo di velocità**”: si deriva il riferimento e si somma questo contributo nel nodo sommatore dell’anello di velocità.

Spesso il contributo di feedforward viene pesato da un coefficiente  $k_{ff}$  compreso tra 0 e 1:



## Anticipo di velocità e PID

Se si utilizza solo un sensore di posizione e si calcola la velocità differenziando la misura della posizione, si ottiene (con  $k_{ff} = 1$ ) uno schema completamente equivalente a un **controllore PID**:



Formule di passaggio:

$$R_{PID}(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

con:

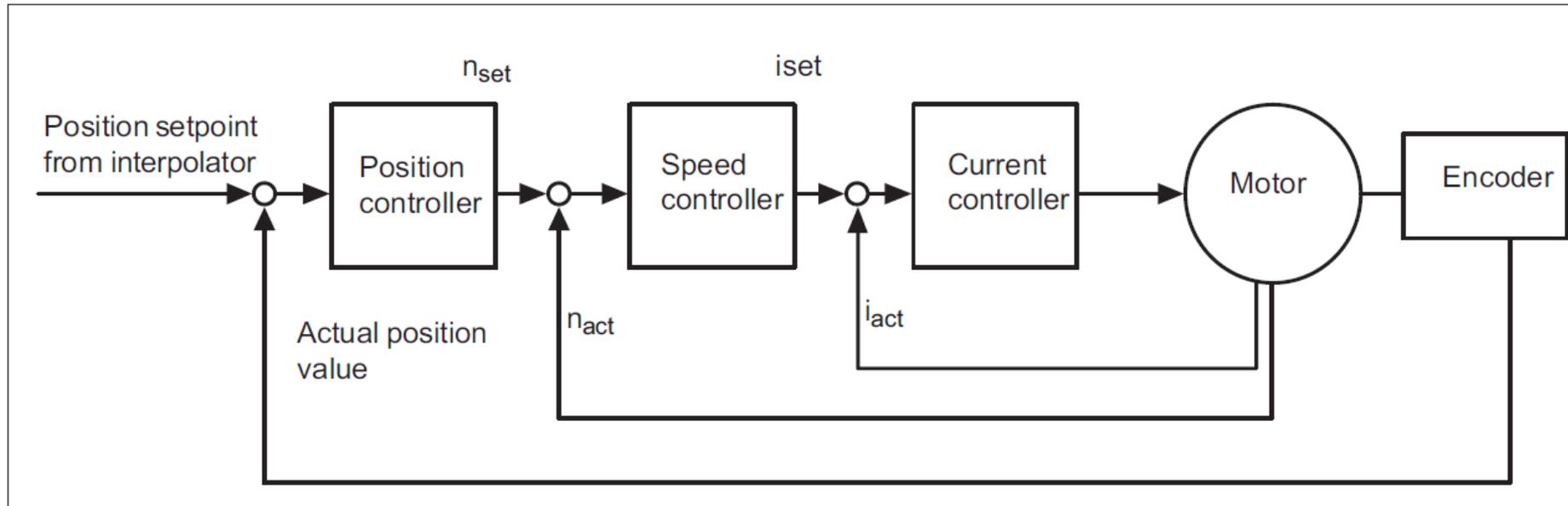
$$K_P = K_{pv} \left( K_{pp} + \frac{1}{T_{iv}} \right)$$

$$T_D = \frac{K_{pv}}{K_p}$$

$$T_I = \frac{K_p T_{iv}}{K_{pp} K_{pv}}$$

# Controllo del giunto nei manuali degli azionamenti

Quanto abbiamo visto si ritrova nei manuali dei prodotti commerciali



SIEMENS

SIMODRIVE 611 digital  
SINUMERIK 840D/810D  
Description of Functions 12.2001 Edition

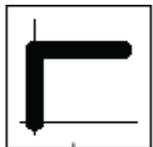
Drive Functions

Manufacturer/Service Documentation

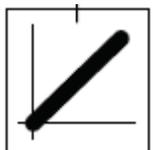
(si notino i tre anelli, di corrente, velocità e posizione, in cascata)

# Controllo del giunto nei manuali degli azionamenti

Simbologia:



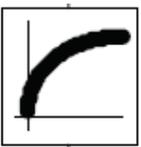
Guadagno proporzionale



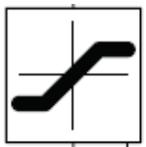
Integratore



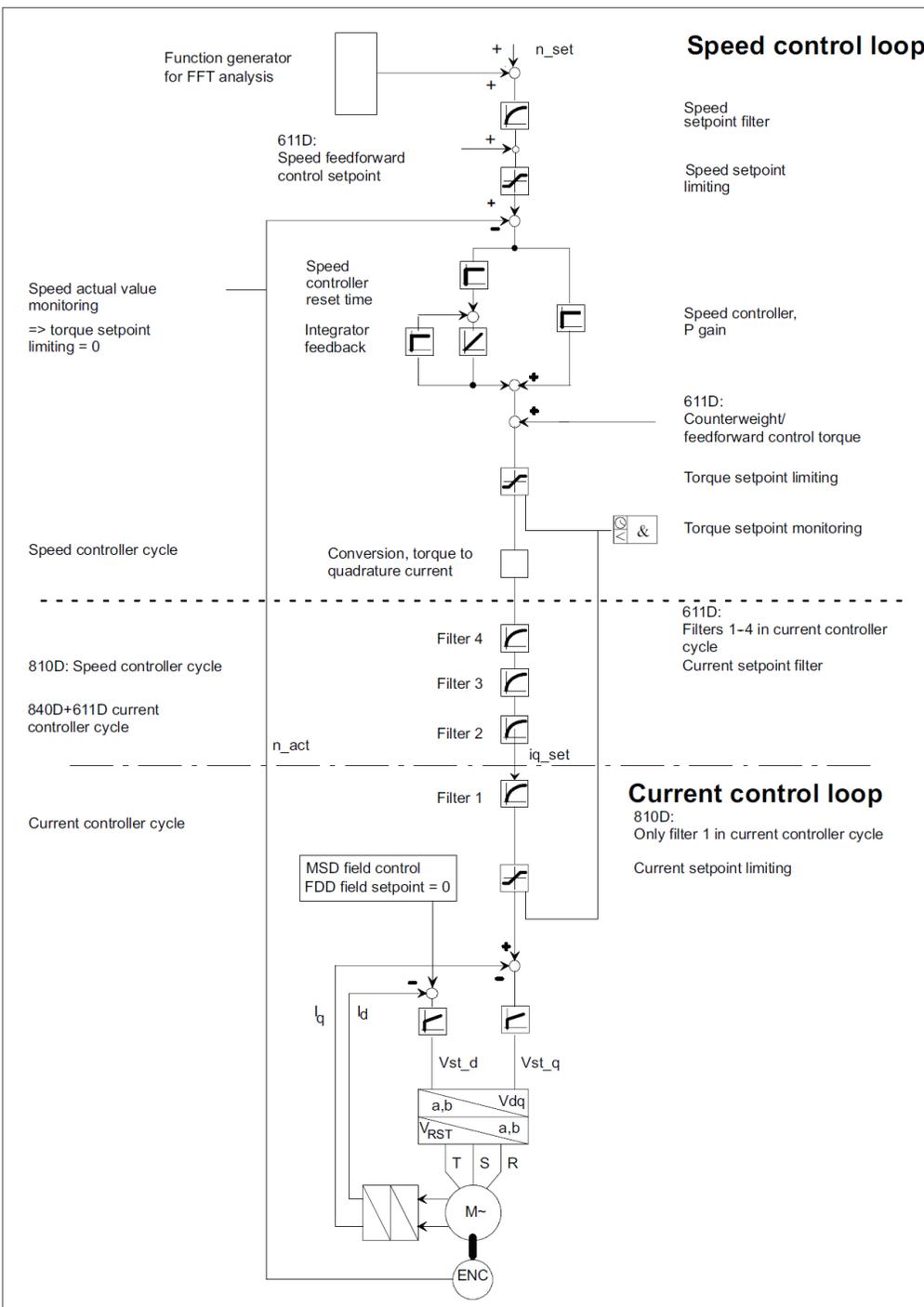
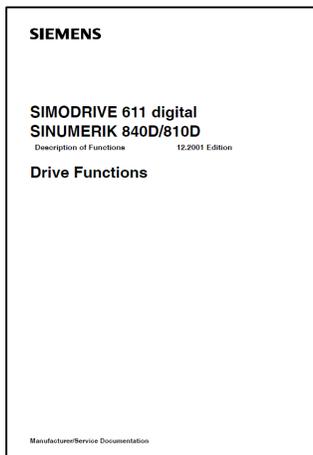
Controllore PI



Generico filtro

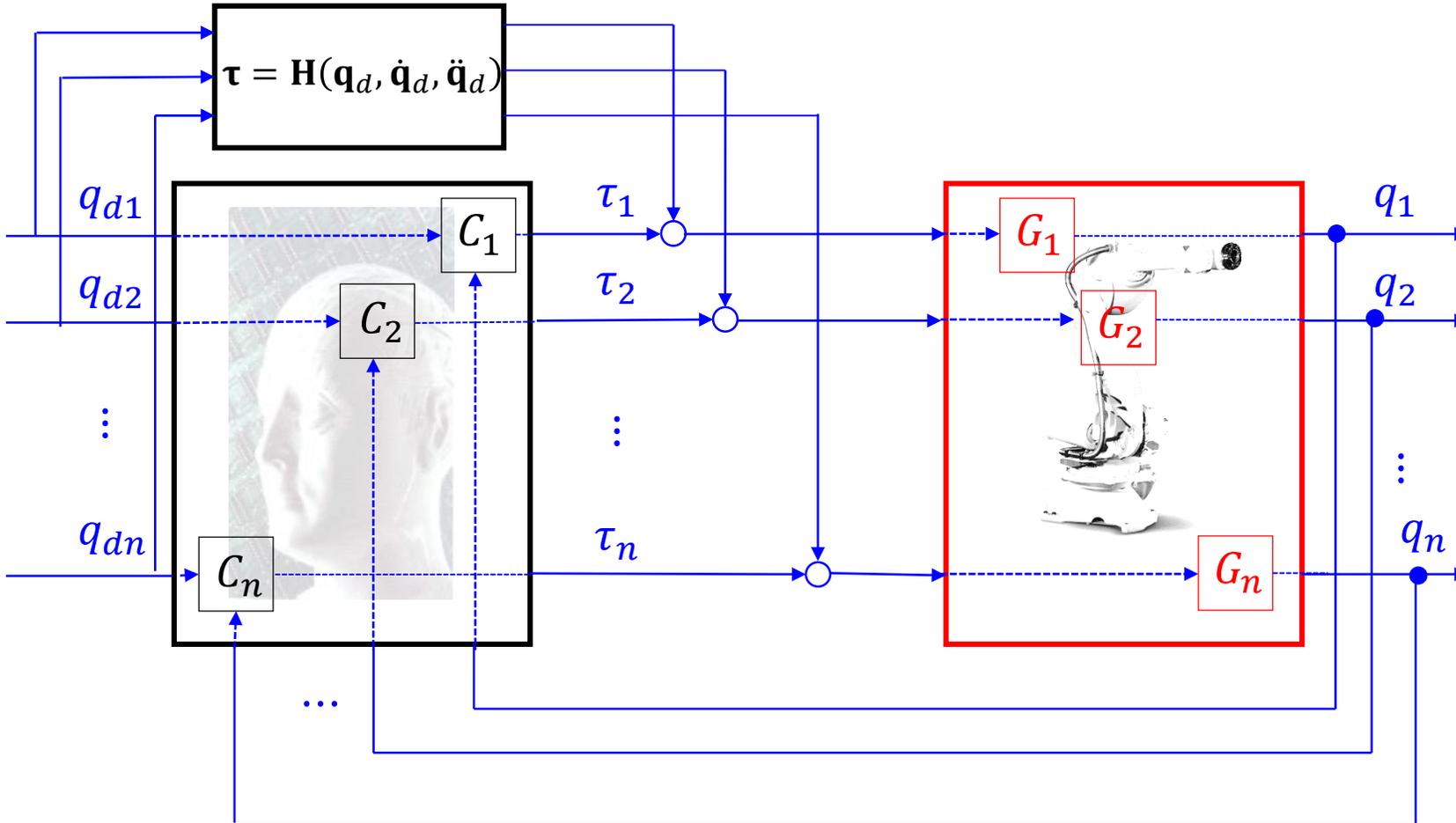


Saturazione



# Utilizzo del modello dinamico in feedforward

In alcuni controllori robotici, il **modello dinamico** viene utilizzato in **anello aperto**, accoppiato a una soluzione in anello chiuso (decentralizzata)



L'utilizzo del modello dinamico può migliorare le prestazioni del sistema di controllo



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA  
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

## Contatti

Paolo Rocco  
[paolo.rocco@polimi.it](mailto:paolo.rocco@polimi.it)