



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Fondamenti di robotica

Controllo del giunto flessibile

30.04.2026 | Paolo Rocco

Contenuti

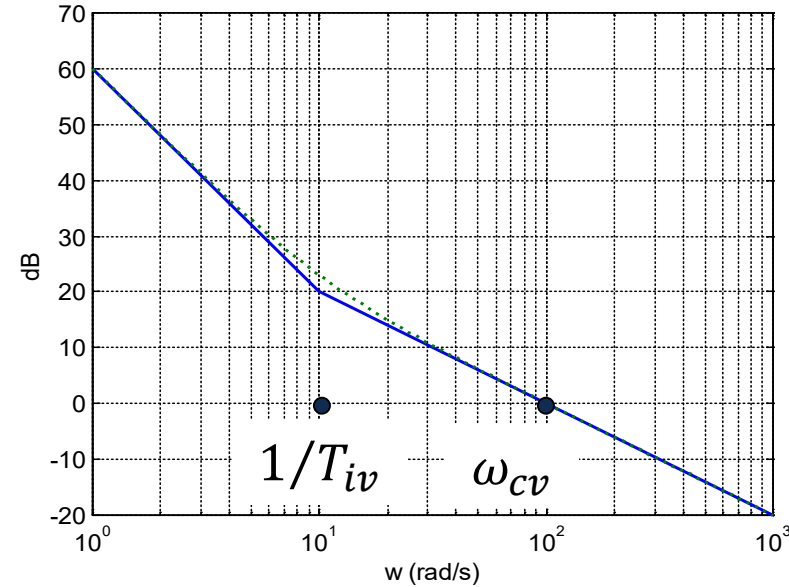
1. **Modello del giunto flessibile**
2. **Controllo P/PI del giunto flessibile**
3. **Limitazione delle oscillazioni**

Modello del giunto flessibile

01

Limitazioni del modello rigido

- Riprendendo il progetto del controllore di velocità del giunto eseguito con il modello di accoppiamento rigido, **non emerge nessuna significativa limitazione alla banda passante**
- Apparentemente si può aumentare la pulsazione critica ω_{cv} , aumentando il guadagno del regolatore, indefinitamente e senza limitazioni, ottenendo prestazioni sempre migliori
- Ma le cose stanno realmente così?



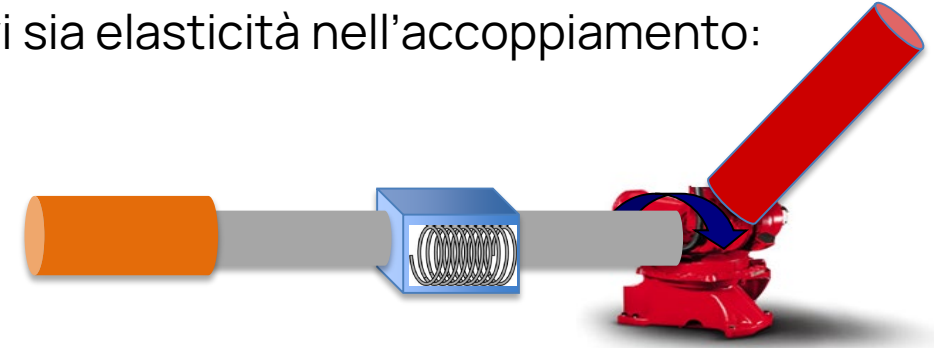
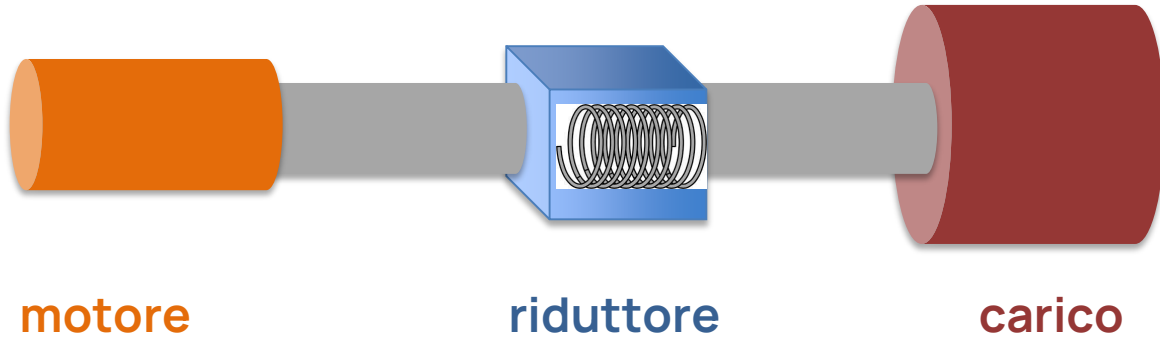
Limitazioni del modello rigido

- Se si eseguono esperimenti aumentando la pulsazione critica emergono chiaramente limitazioni, in termini di rumore, vibrazioni, oscillazioni, ecc.
- Il modello rigido non è infatti adeguato a spiegare come si comporta un servomeccanismo nel caso in cui si aumentino le prestazioni richieste
- Se tuttavia prevediamo di utilizzare controllori industriali (PID) conviene effettuare la **minima modifica al modello matematico** che ci consente di spiegare il riscontro sperimentale
- Occorre allora rivedere l'ipotesi di accoppiamento rigido tra motore e carico



Accoppiamento elastico del motore e del carico

Riprendiamo il sistema motore-riduttore-carico e assumiamo che vi sia elasticità nell'accoppiamento:



Ricordiamo che nel nostro caso il carico è costituito dalla parte del robot movimentata dal giunto

Dinamica del motore:

$$J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm}$$

Dinamica del carico:

$$J_l \ddot{q}_l = n\tau_{lm} - \tau_d$$

Modello della trasmissione:

$$\tau_{lm} = K_{el}(q_m - nq_l) + D_{el}(\dot{q}_m - n\dot{q}_l)$$

Coefficiente di rigidezza

Termine di dissipazione

Per $K_{el} \rightarrow \infty$ si ritrova il modello dell'accoppiamento rigido $q_m = nq_l$

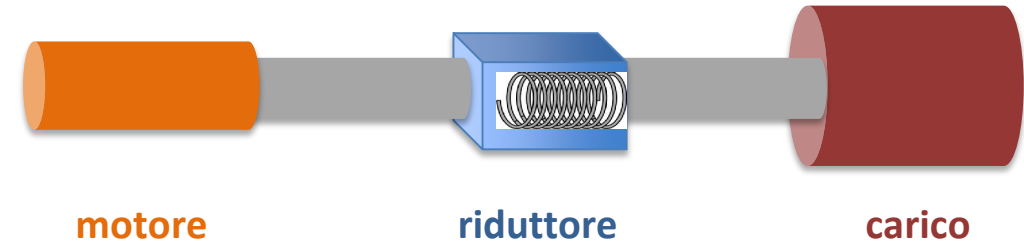
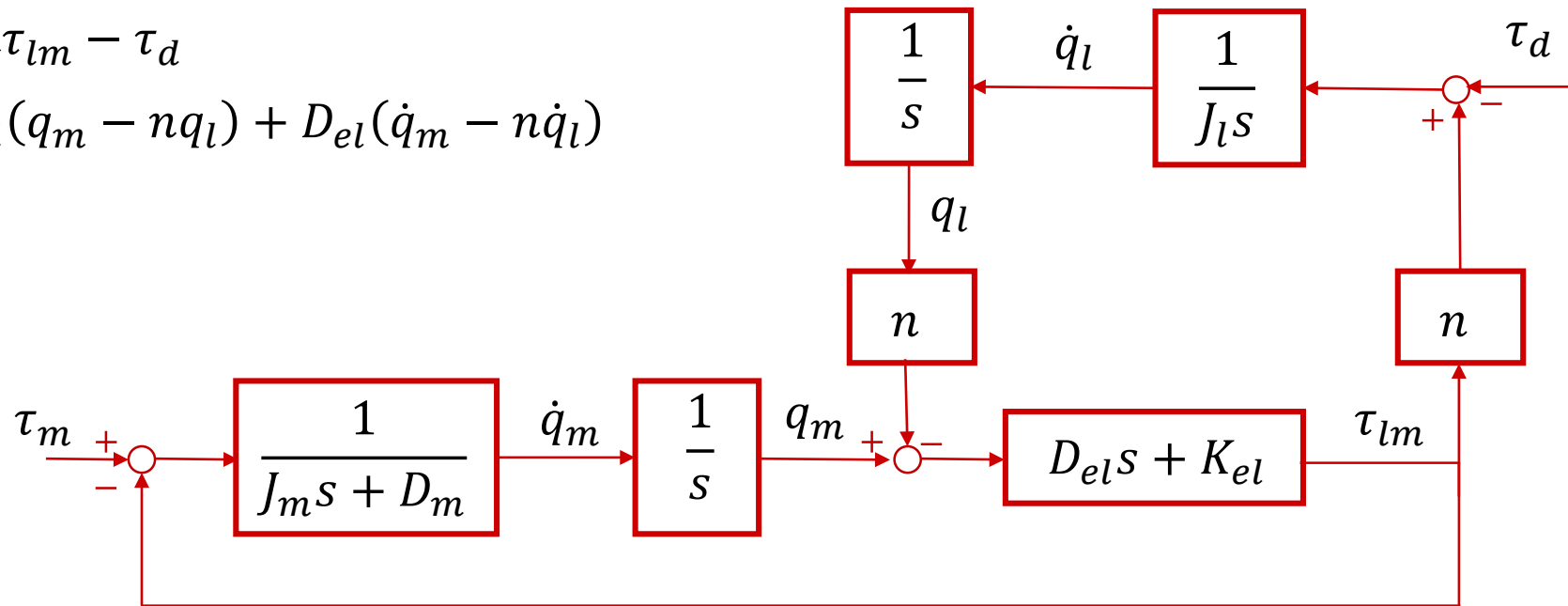
Accoppiamento elastico del motore e del carico

Le equazioni del sistema possono essere rappresentate da uno schema a blocchi:

$$J_m \ddot{q}_m + D_m \dot{q}_m = \tau_m - \tau_{lm}$$

$$J_l \ddot{q}_l = n \tau_{lm} - \tau_d$$

$$\tau_{lm} = K_{el}(q_m - n q_l) + D_{el}(\dot{q}_m - n \dot{q}_l)$$

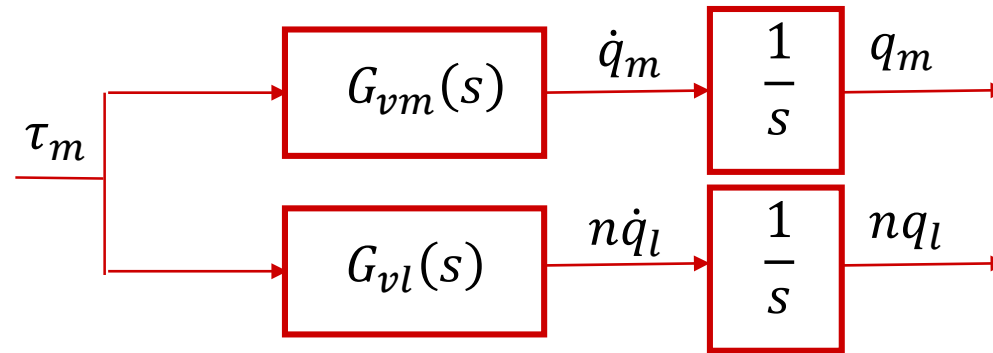


Il sistema è di ordine 4 (ci sono 4 variabili di stato)

Funzioni di trasferimento

Concentriamoci sulla risposta del sistema al comando di coppia τ_m .

Possiamo prendere come uscita la posizione (o velocità) del motore o del carico.



Risolvendo lo schema a blocchi si ottengono le funzioni di trasferimento:

$$G_{vm}(s) = \frac{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}}{J_{lr}J_m s^3 + (J_t D_{el} + J_{lr} D_m) s^2 + (J_t K_{el} + D_m D_{el}) s + D_m K_{el}}$$

$$G_{vl}(s) = \frac{D_{el}s + K_{el}}{J_{lr}J_m s^3 + (J_t D_{el} + J_{lr} D_m) s^2 + (J_t K_{el} + D_m D_{el}) s + D_m K_{el}}$$

i numeratori sono diversi

$$\left[J_{lr} = \frac{J_l}{n^2}, \quad J_t = J_{lr} + J_m \right]$$

Parametri notevoli

Poniamo $D_m = 0$ e introduciamo i seguenti parametri:

$$\rho = \frac{J_{lr}}{J_m} \quad (\text{rapporto di inerzia})$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{K_{el}}{J_{lr}}}, \quad \zeta_z = \frac{D_{el}}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{lr}K_{el}}} \quad (\text{pulsazione naturale e smorzamento degli zeri})$$

$$\omega_p = \sqrt{1 + \rho} \omega_z, \quad \zeta_p = \sqrt{1 + \rho} \zeta_z \quad (\text{pulsazione naturale e smorzamento dei poli})$$

Si ottiene:

dinamica elastica
(alta frequenza)

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

$$G_{vl}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

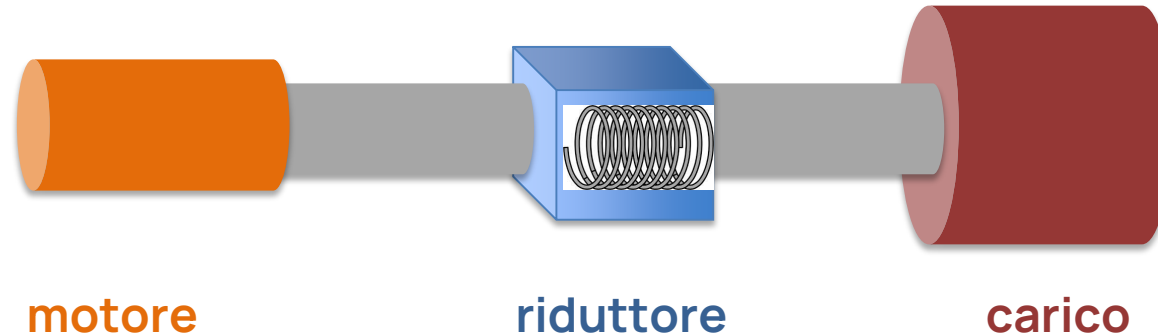
dinamica rigida
(bassa frequenza)

$$\left[\mu = \frac{1}{J_t} \right]$$

Pulsazione naturale

Le funzioni di trasferimento sono quindi caratterizzate da due pulsazioni, ω_p e ω_z

Il significato di ω_p è evidente: si tratta della pulsazione a cui oscilla il sistema libero, ossia della **pulsazione naturale** del sistema (natural frequency)

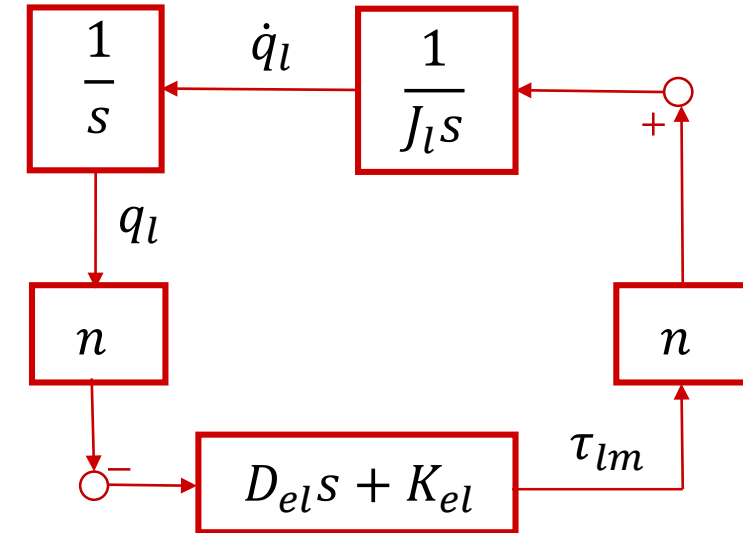
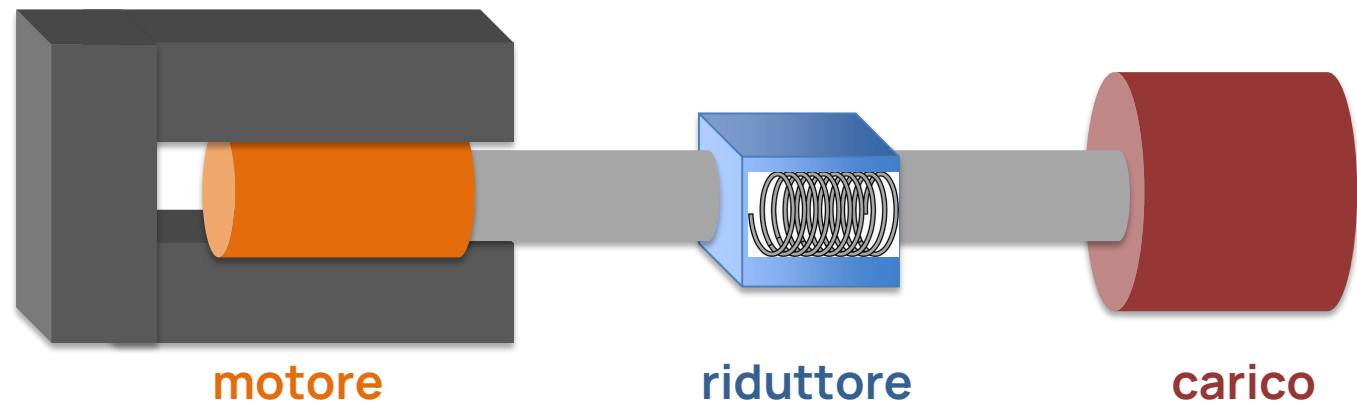


Pulsazione a rotore bloccato

Per comprendere il significato di ω_z riprendiamo lo schema a blocchi e forziamo $\dot{q}_m = 0$

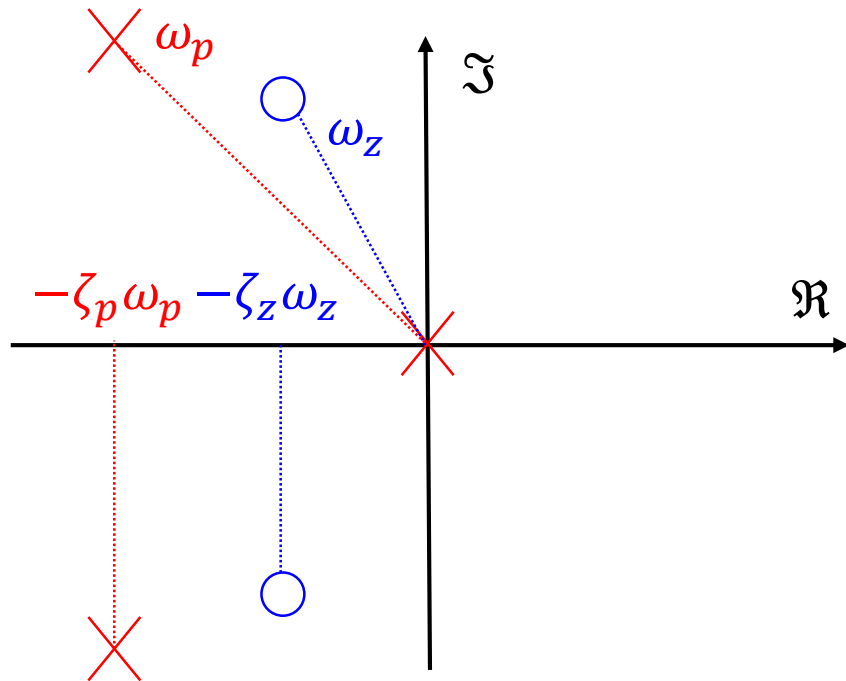
Gli autovalori dell'anello rimanente sono le radici del polinomio $J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}$ ovvero del polinomio $s^2 + 2\zeta_z\omega_zs + \omega_z^2$

ω_z è allora la pulsazione del sistema che si ottiene bloccando meccanicamente la rotazione del motore: **pulsazione a rotore bloccato** (locked frequency)



Disposizione di poli e zeri

Come sono collocati nel piano complesso poli e zeri di $G_{vm}(s)$?



$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2 \frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_z} = \frac{\zeta_p}{\zeta_z} = \sqrt{1 + \rho} > 1$$



I poli sono a più alta
frequenza e più smorzati

Risposta in frequenza

Che aspetto assume la risposta in frequenza di $G_{vm}(s)$?

$$G_{vm}(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1 + 2\frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2\frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}} = \frac{\mu}{\omega_z p} \frac{1 + 2\zeta_z p + p^2}{1 + 2\zeta_z p + \frac{p^2}{1 + \rho}}$$

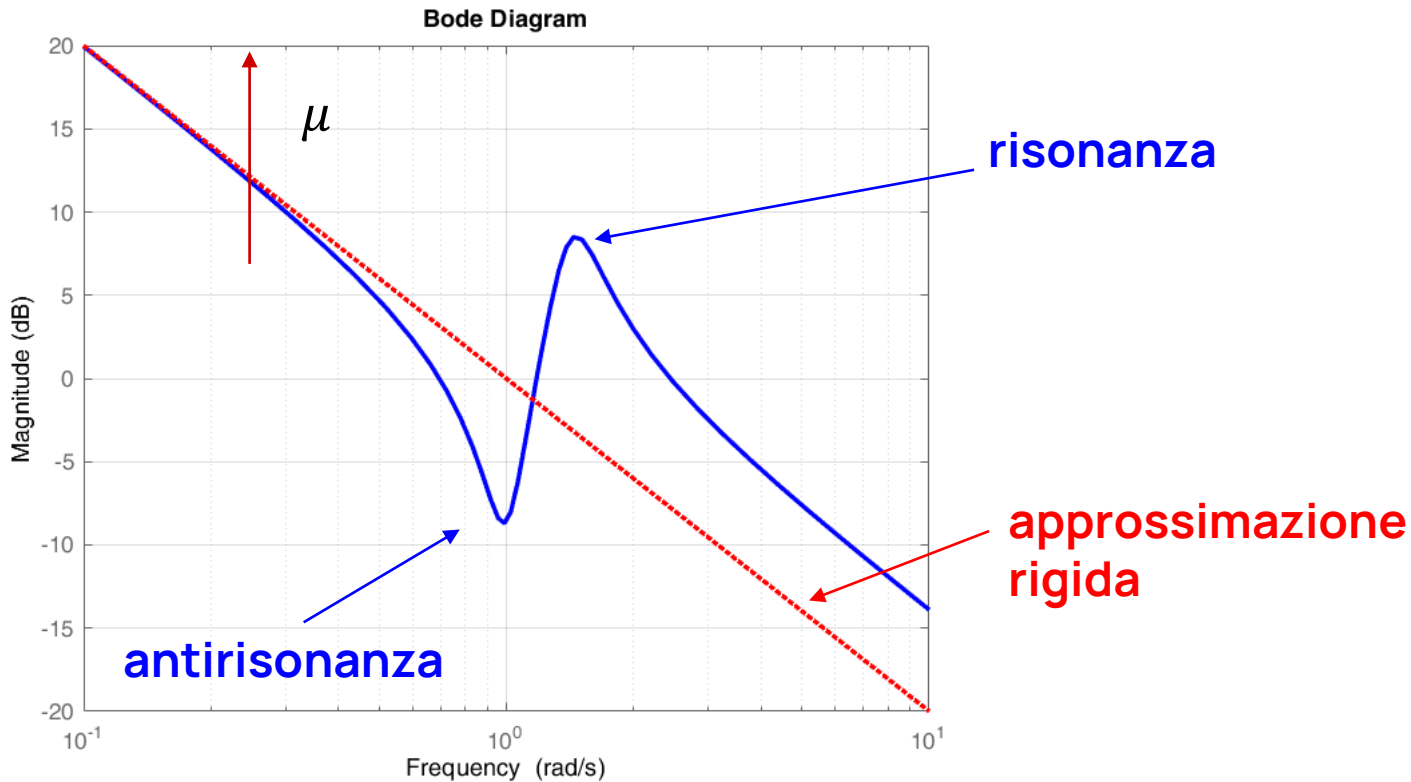
$$\text{con } p = \frac{s}{\omega_z}$$



Il grafico è tracciato per:

- $\rho = 1$
- $\zeta_z = 0.1$

La scala delle pulsazioni è normalizzata a ω_z

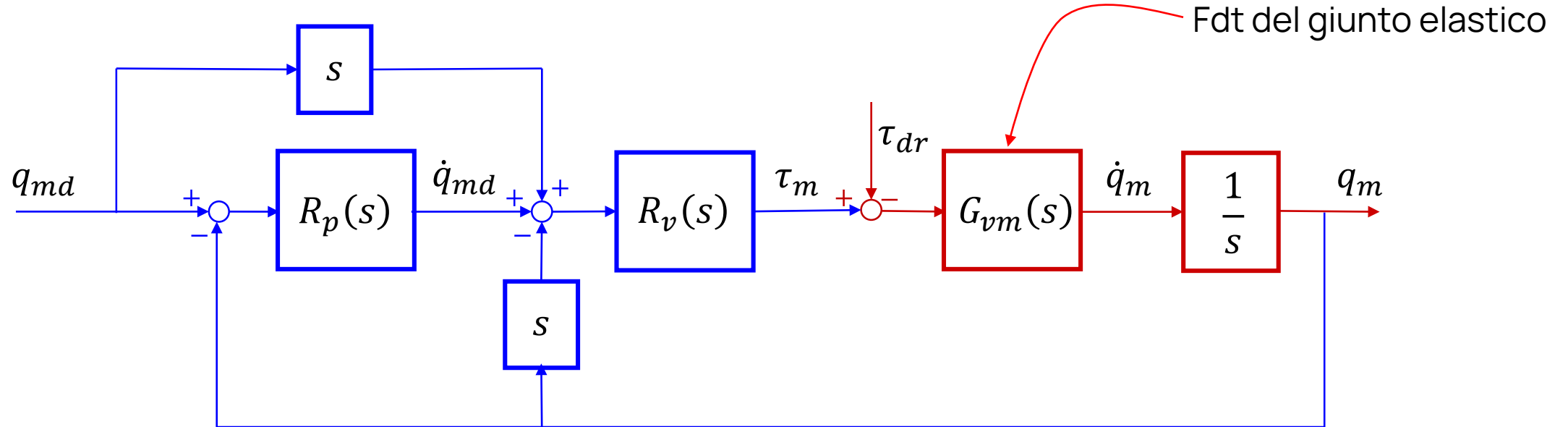


Controllo P/PI del giunto flessibile

02

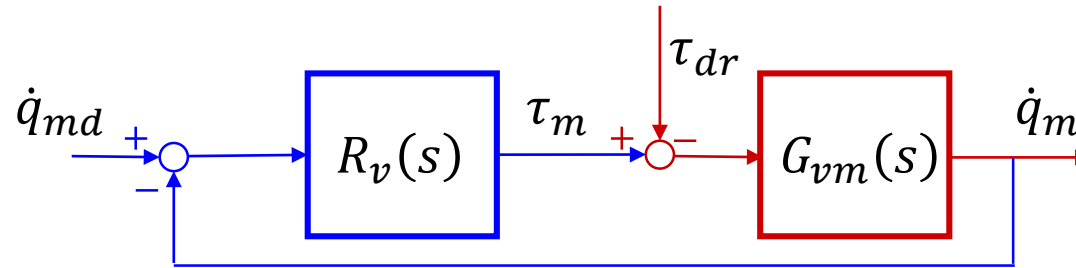
Controllo P/PI sul motore

Nella robotica industriale si utilizza di norma **solo un sensore di posizione lato motore**. Possiamo allora riprendere lo schema di controllo con regolatore PI di velocità e regolatore P di posizione:



Progetto del controllore di velocità

Si adotta un
controllore PI



$$R_v(s) = K_{pv} \left(1 + \frac{1}{sT_{iv}} \right) = K_{pv} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}}$$

$$\text{Funzione d'anello: } L_v(s) = R_{PI}(s)G_{vm}(s) = \frac{K_{pv}\mu}{s} \frac{1 + sT_{iv}}{sT_{iv}} \frac{1 + 2\frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}{1 + 2\frac{\zeta_p s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

Introduciamo il seguente parametro di progetto adimensionale:

$$\tilde{\omega}_{cv} = \frac{K_{pv}\mu}{\omega_z}$$

È la **pulsazione critica di progetto**, valutata sul modello rigido ($K_{pv}\mu$), **normalizzata** alla pulsazione ω_z .

Progetto del controllore di velocità

Possiamo riscrivere la funzione d'anello in termini di parametri adimensionali e della pulsazione normalizzata $p = \frac{s}{\omega_z}$

$$L_v(s) = \frac{\tilde{\omega}_{cv}}{p} \frac{1 + p\tau_{iv}}{p\tau_{iv}} \frac{1 + 2\zeta_z p + p^2}{1 + 2\zeta_z p + \frac{p^2}{1 + \rho}}$$

con $\tau_{iv} = T_{iv}\omega_z$

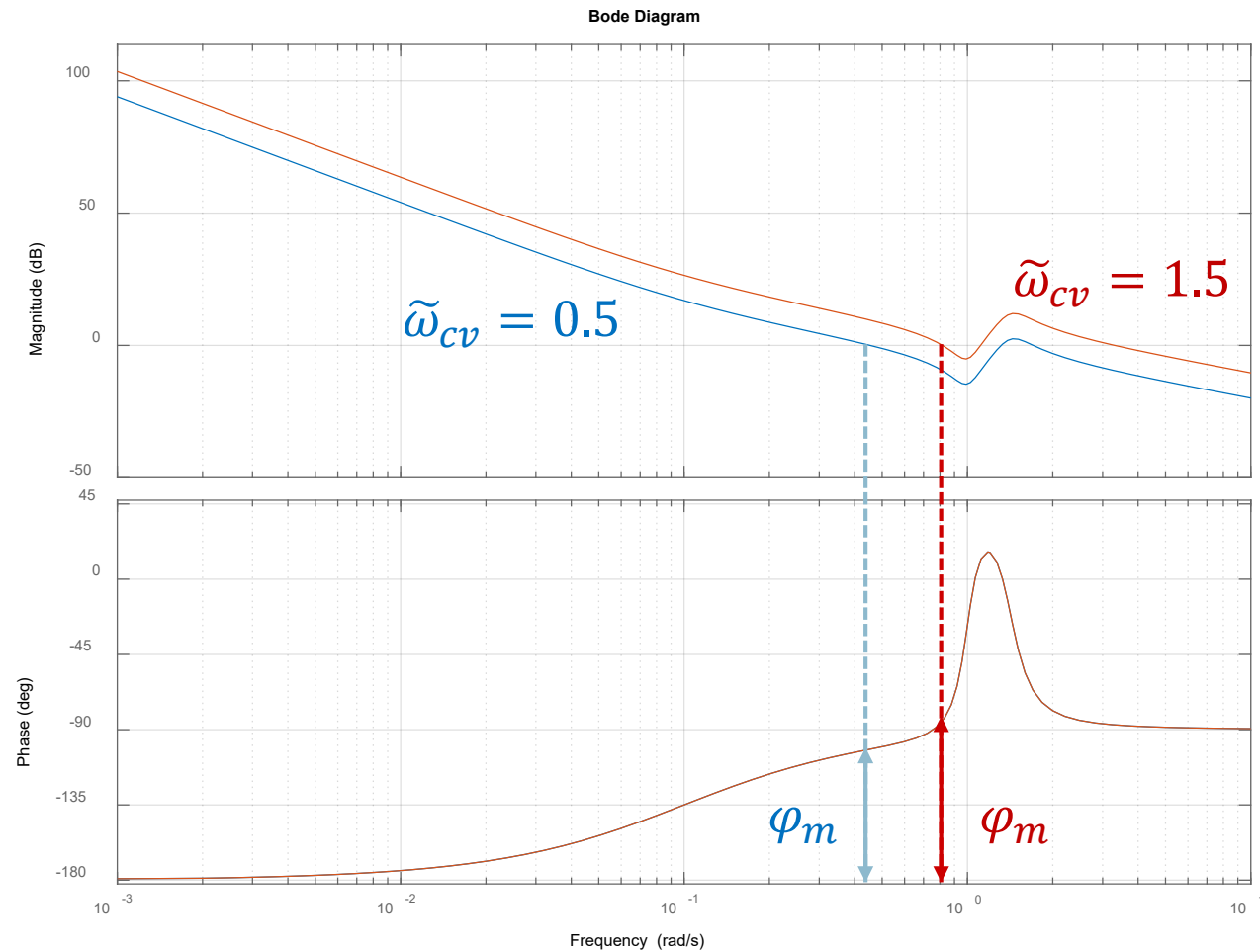
Fissiamo $\tau_{iv} = 10$, cioè lo zero del PI una decade prima di ω_z ($\frac{1}{T_{iv}} = 0.1\omega_z$)

Assumendo nuovamente:

- $\rho = 1$
- $\zeta_z = 0.1$

possiamo studiare la risposta in frequenza di L_v al variare del parametro di progetto $\tilde{\omega}_{cv}$

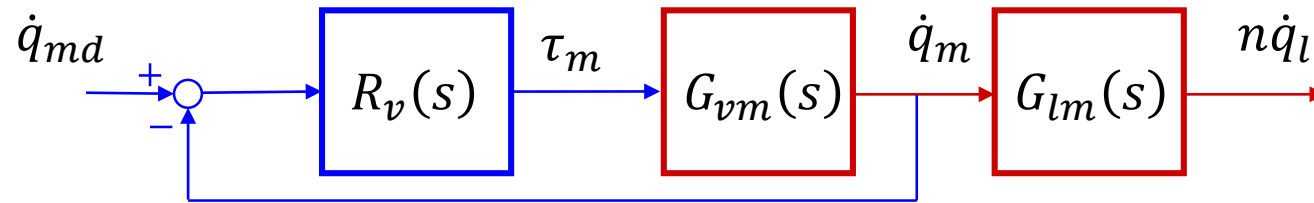
Studio della funzione d'anello



In entrambi i casi il margine di fase è elevato

La velocità lato carico

Con il criterio di Bode (analisi del margine di fase) non si colgono limitazioni alla pulsazione critica. Per farle emergere, studiamo anche il comportamento lato carico:



Ignoriamo in questa analisi il disturbo di coppia

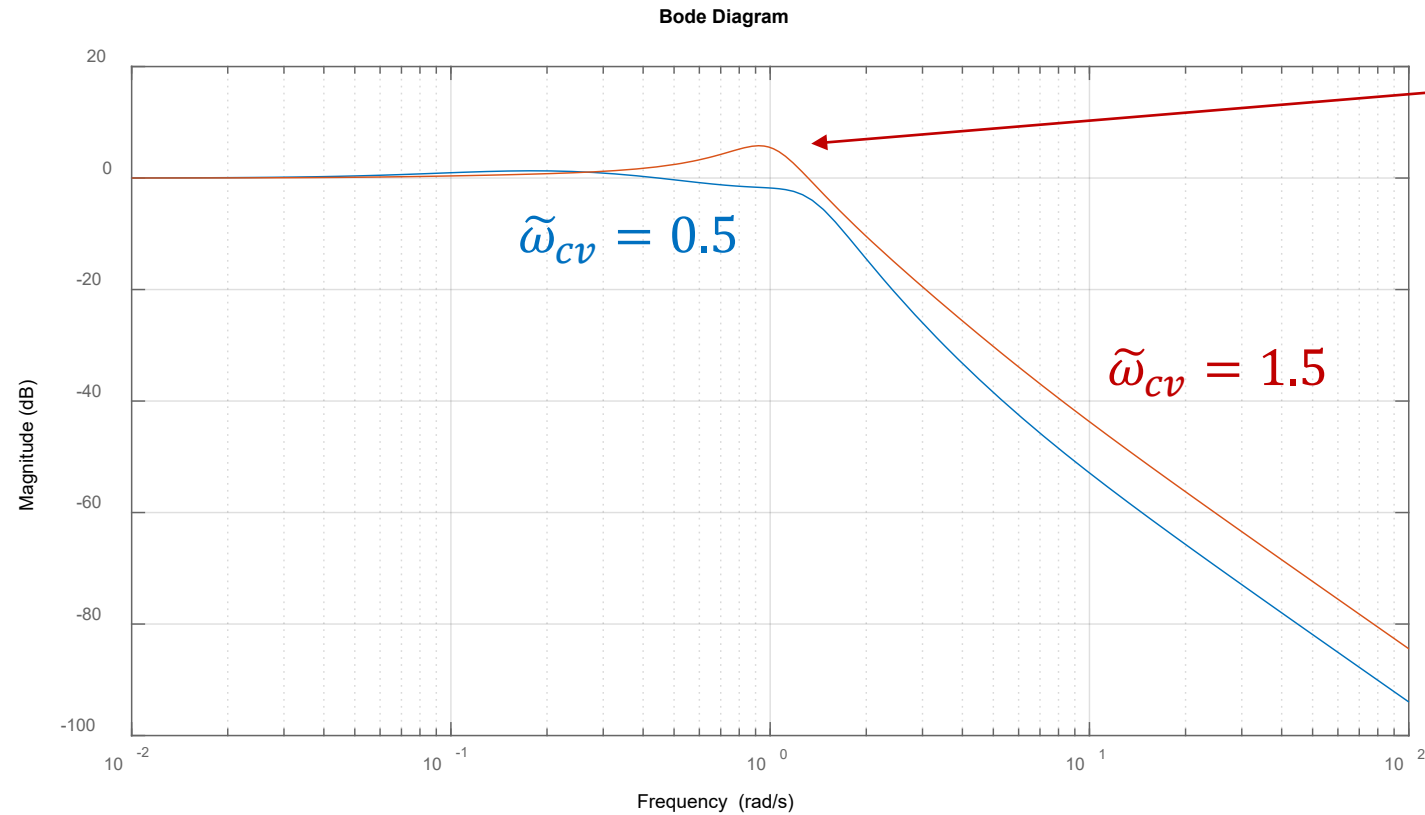
Possiamo includere nello schema a blocchi la velocità lato carico introducendo formalmente la funzione di trasferimento:

$$G_{lm}(s) = \frac{G_{vl}(s)}{G_{vm}(s)} = \frac{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z}}{1 + 2 \frac{\zeta_z s}{\omega_z} + \frac{s^2}{\omega_z^2}}$$

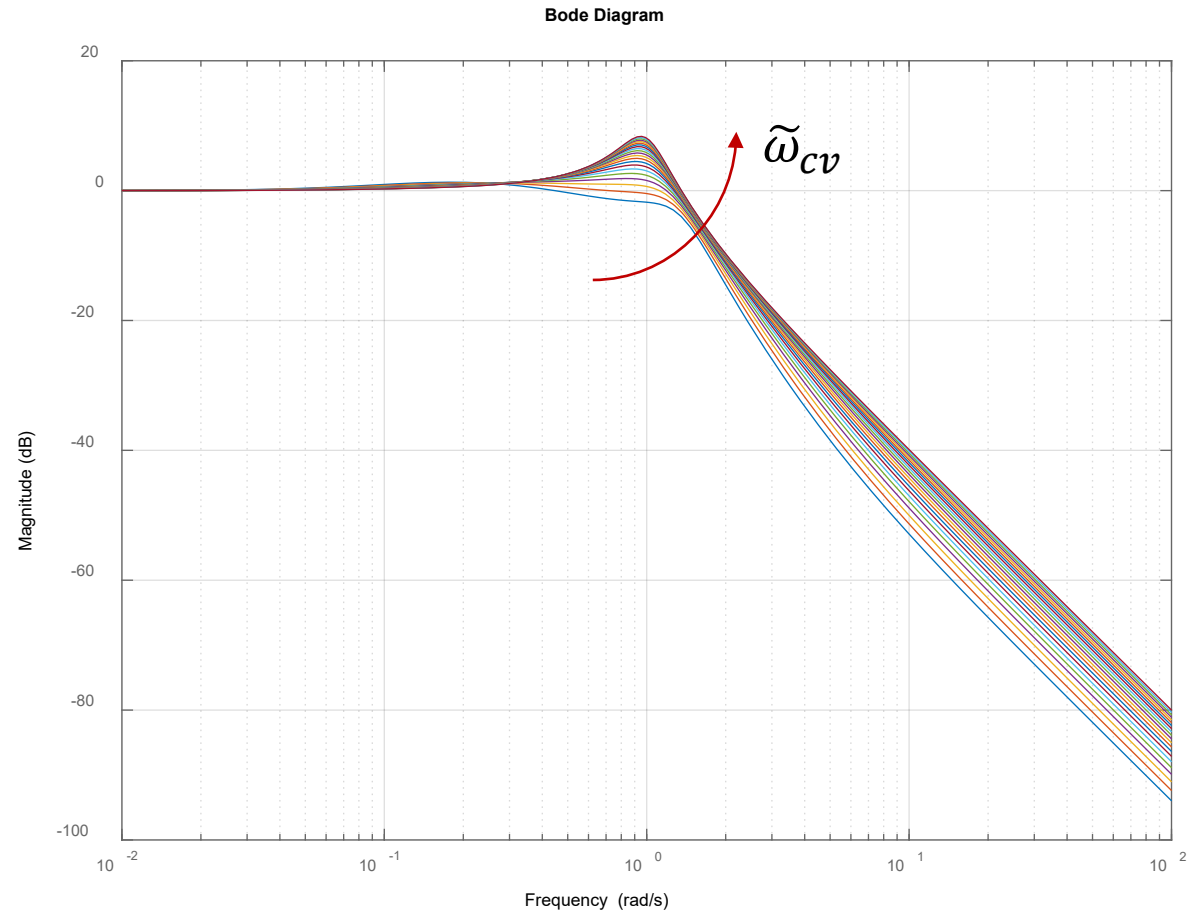
Risonanza lato carico

Consideriamo la risposta in frequenza **in anello chiuso** tra \dot{q}_{md} e $n\dot{q}_l$

con $\tilde{\omega}_{cv} = 1.5$ si manifesta una **risonanza lato carico** che non si riesce a cogliere con il criterio di Bode



Risonanza lato carico



La risonanza aumenta
all'aumentare di $\tilde{\omega}_{cv}$

Aumentano quindi le oscillazioni
lato carico all'aumentare di $\tilde{\omega}_{cv}$

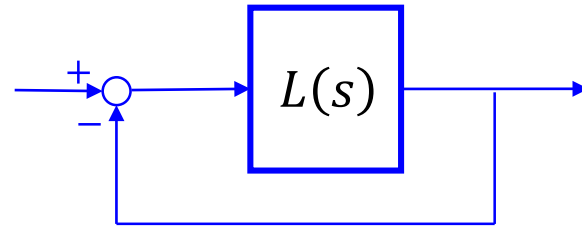
Limitazione delle oscillazioni

03

Il luogo delle radici

Per comprendere meglio la relazione tra la scelta del guadagno del regolatore e il comportamento in anello chiuso, possiamo usare il **luogo delle radici**

Dato un sistema retroazionato negativamente:



con $L(s) = k \frac{N(s)}{D(s)}$, i poli del sistema in anello chiuso sono le radici dell'equazione caratteristica:

$$D(s) + kN(s) = 0$$

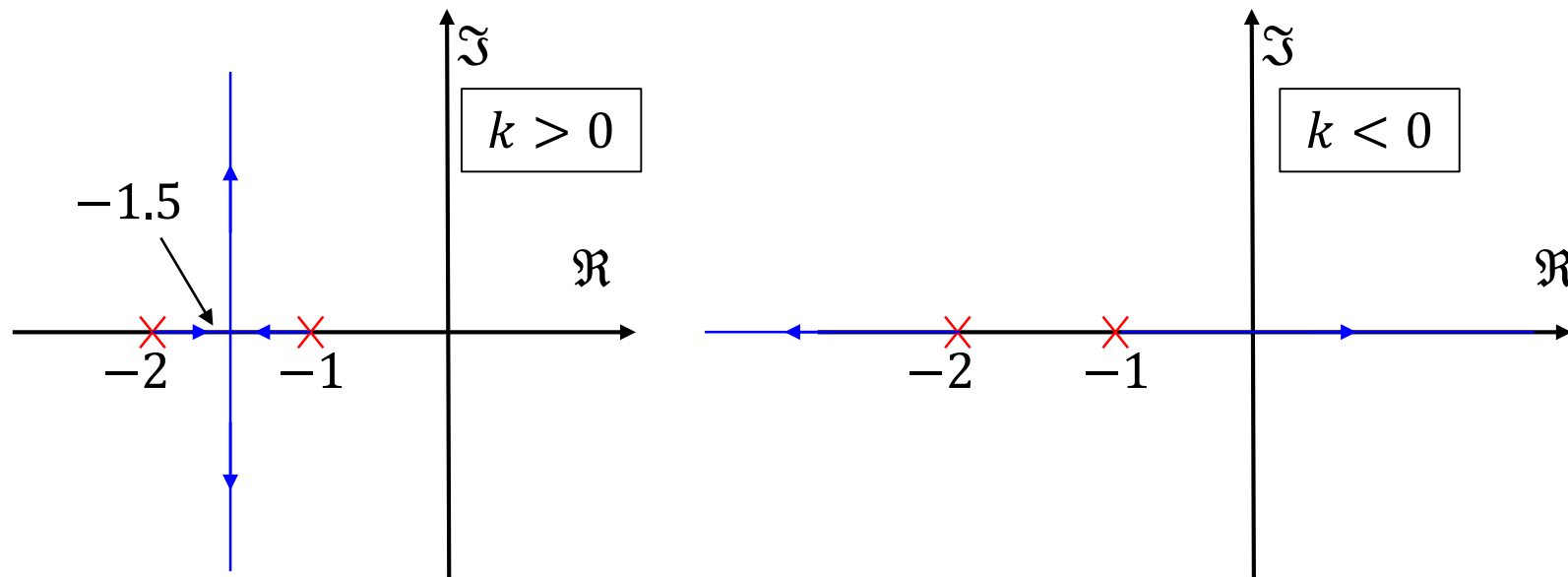
Il luogo delle radici è il luogo geometrico descritto nel piano complesso dai poli in anello chiuso al variare di k

Il luogo delle radici (esempio)

Per esempio, se:
$$L(s) = k \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

l'equazione caratteristica è: $(s+1)(s+2) + k = 0$

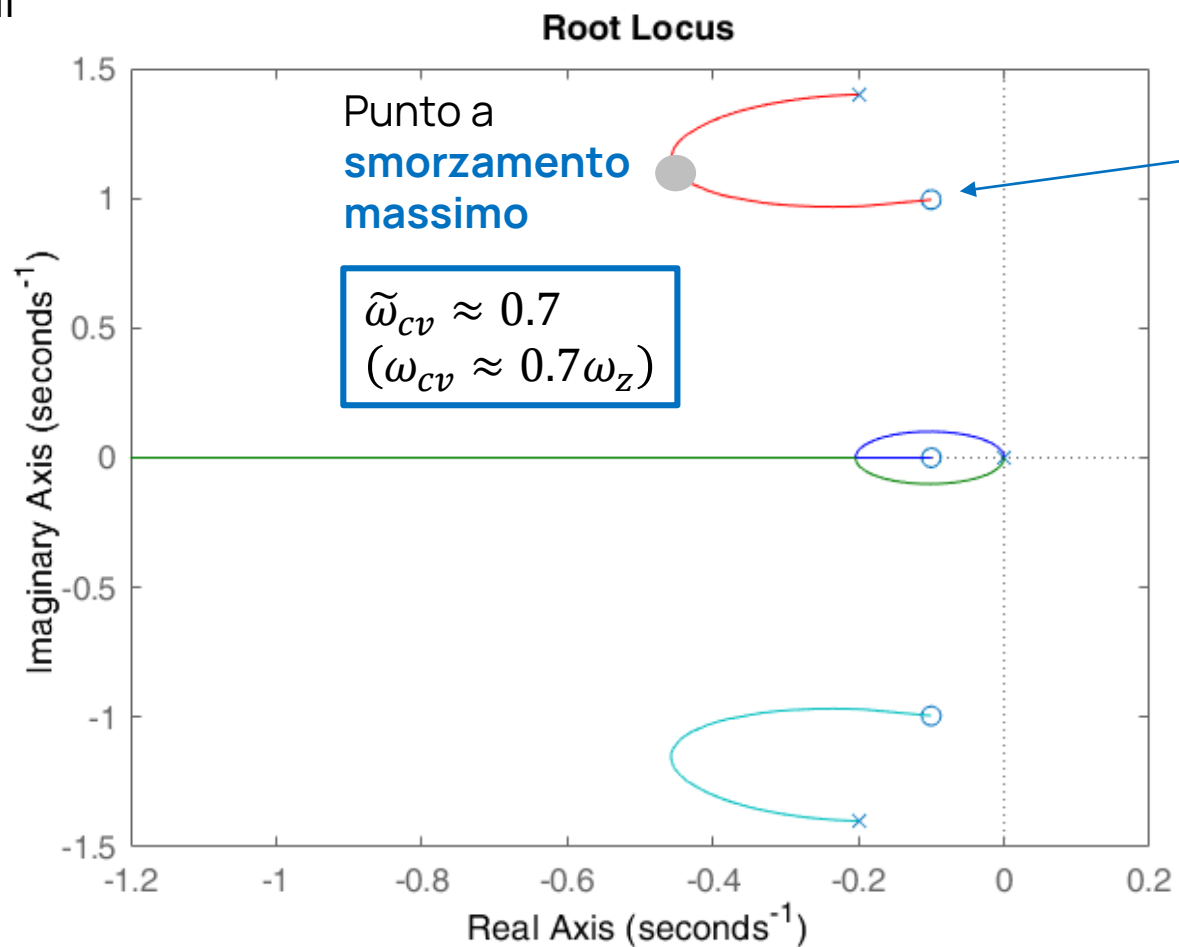
e il luogo delle radici risulta:



Esistono metodi per il tracciamento dei luoghi a partire dall'espressione della funzione di trasferimento d'anello

Anello di velocità: luogo delle radici

Luogo delle radici dell'anello di velocità al variare di $\tilde{\omega}_{cv}$



Frequenza a **rotore bloccato**: ottimo controllo del motore, carico oscillante

Progetto del controllore di velocità

Sulla base della precedente discussione si può seguire la seguente procedura per il **progetto del controllore PI di velocità**:

- Calcolare

$$\mu = \frac{1}{J_{lr} + J_m}$$

- Determinare il guadagno del regolatore:

$$\tilde{\omega}_{cv} = \frac{K_{pv}\mu}{\omega_z} = 0.7 \quad \Rightarrow \quad K_{pv} = 0.7 \frac{\omega_z}{\mu}$$

- Determinare il tempo integrale:

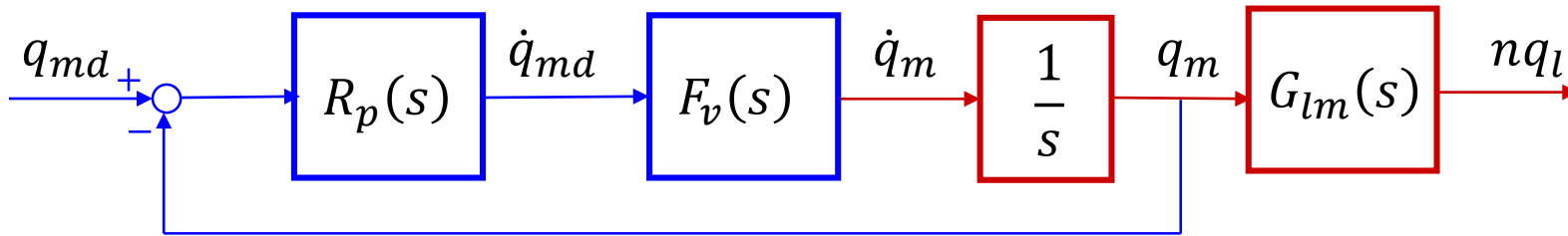
$$T_{iv} = \frac{10}{\omega_z}$$

Progetto del controllore di posizione

Si adotta un
controllore P



$$R_p(s) = K_{pp}$$



La funzione d'anello è quindi:

$$L_p(s) = K_{pp} F_v(s) \frac{1}{s}$$

Come visto nel caso di approssimazione rigida, è sufficiente prendere $K_{pp} \ll \omega_{cv}$ per garantire una banda sull'anello di posizione ω_{cp}

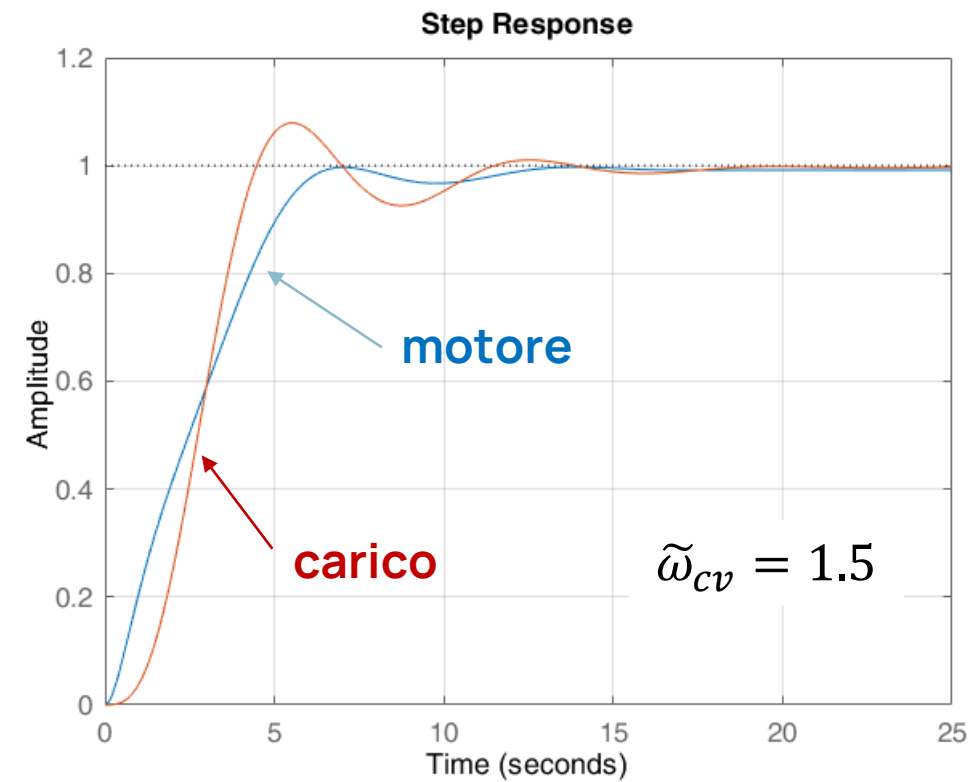
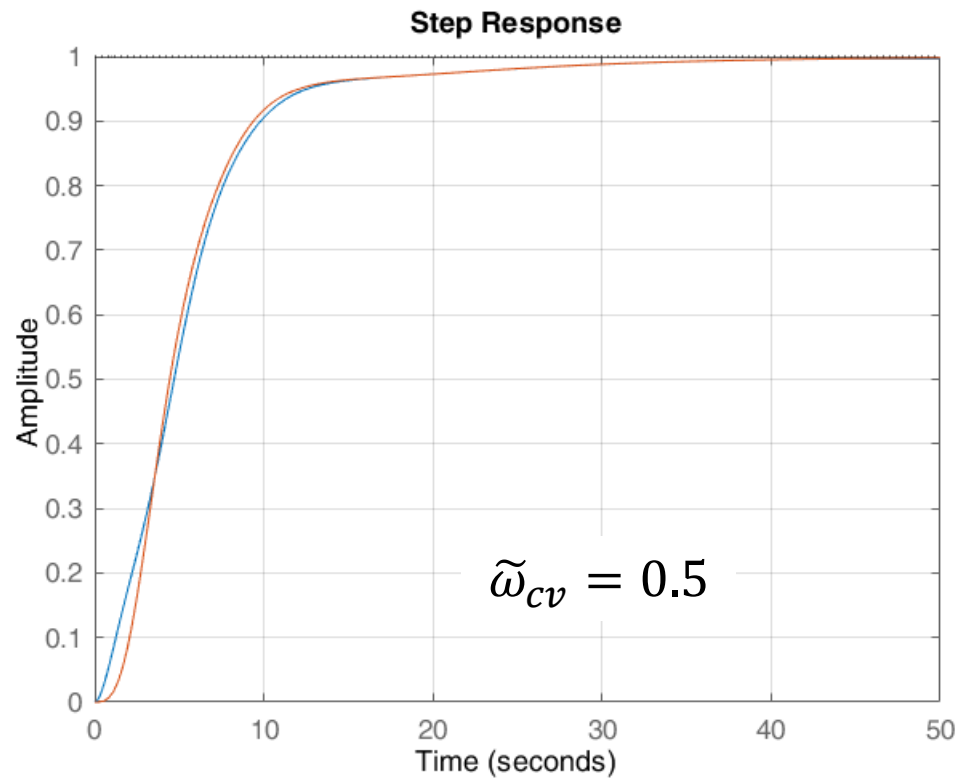
$$\omega_{cp} = K_{pp}$$



selezione del **guadagno P**

Simulazioni

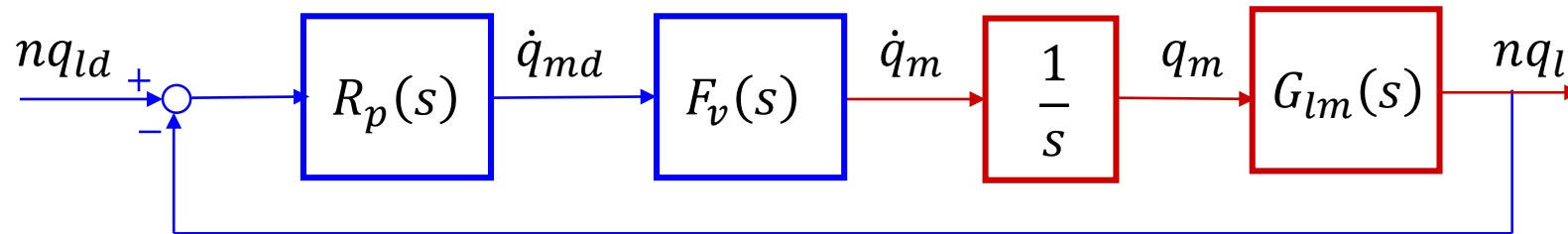
Risposta allo scalino di posizione ($\omega_{cp} = 0.2\omega_{cv}$):



L'asse del tempo va diviso per ω_z per ottenere il tempo effettivo.

Chiusura dell'anello di posizione lato carico

In contesti diversi dalla robotica industriale (per esempio nelle macchine utensili) **si chiude l'anello di controllo di posizione lato carico**:



La funzione d'anello diventa:

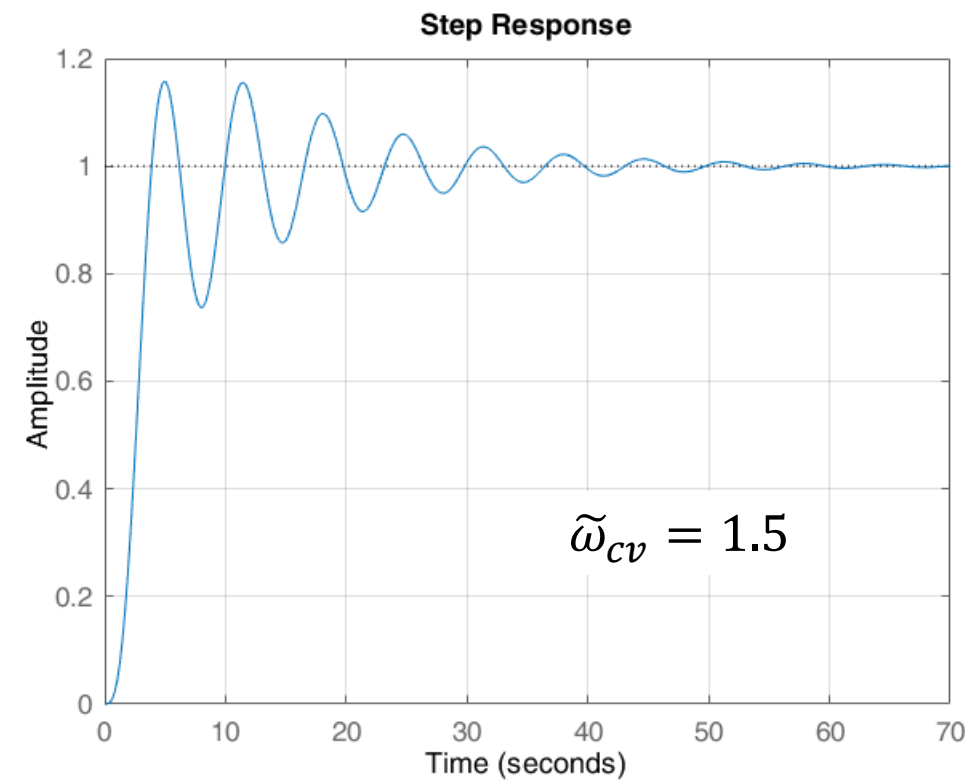
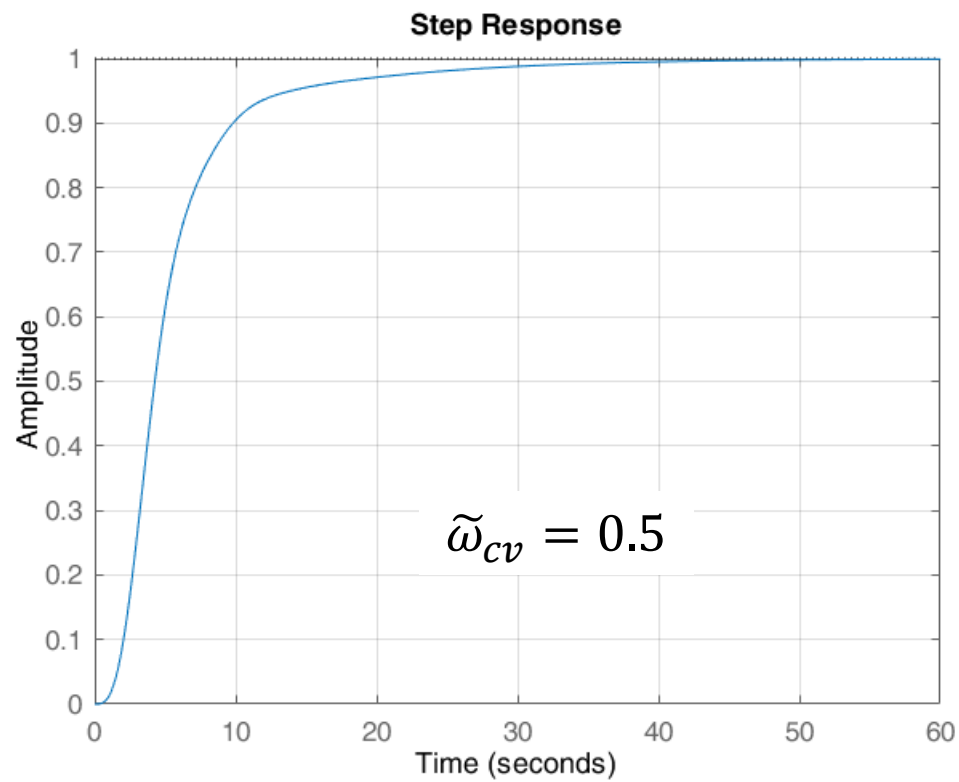
$$L_p(s) = K_{pp} F_v(s) G_{lm}(s) \frac{1}{s}$$

In questo caso aumentano i rischi di oscillazione e addirittura di instabilità.

Un sistema così configurato si dice **non co-localo** (l'azione di controllo e la misura sono da parti opposte rispetto all'elemento elastico)

Simulazioni

Risposta allo scalino di posizione (stessi guadagni delle simulazioni precedenti, solo lato carico):



L'asse del tempo va diviso per ω_z per ottenere il tempo effettivo.



POLITECNICO
MILANO 1863

DIPARTIMENTO DI ELETTRONICA
INFORMAZIONE E BIOINGEGNERIA

Contatti

Paolo Rocco
paolo.rocco@polimi.it